فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۳۷ تا ۵۴

نامساوی برون ــ مینکوفسکی در گذر زمان

محمد رضا میری، غلامرضا محتشمی برزادران و حسین حسینی گیو

چکیده

اگر V_n نشان‌دهندهٔ اندازهٔ n ــ بعدی لبگ باشد، آن‌گاه نامساوی برون مینکوفسکی بیان می‌کند که برای هر دو جسم محدب K و L در $\mathbb{R}^n$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$،

$$V_n((1-\lambda)K+\lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n}+\lambda V_n(L)^{1/n}.$$

هدف این مقاله، معرفی اجمالی نامساوی مزبور از طریق بحثی تاریخی است. برای نیل به این مقصود، به مرور برخی نامساوی‌های تحلیلی وابسته، توسیع‌ها و گونه‌های دیگر این نامساوی خواهیم پرداخت. ذکر دو مورد از کاربردهای نامساوی عام برون ــ مینکوفسکی که مهم‌ترین توسیع نامساوی بالاست، پایان بخش مطالب این مقاله خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: اجسام محدب، نامساوی برون ــ مینکوفسکی، نامساوی توان آنتروپی.
رده‌بندی موضوعی (MSC2000):52A40، 26D15.

۱. مقدمه

بیش از یک قرن پیش، اندکی پس از ارائهٔ نخستین اثبات کامل از نامساوی برابرمحیطی کلاسیک، مینکوفسکی[1] نشان داد که برای هر عدد حقیقی $0 \leq \lambda \leq 1$،

$$V_n((1-\lambda)K+\lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n}+\lambda V_n(L)^{1/n}. \qquad (1)$$

در این‌جا K و L اجسام محدب (مجموعه‌های فشرده و محدب با درون ناتهی) در $\mathbb{R}^n$، V_n نشان‌دهندهٔ اندازه‌ی n ــ بعدی لبگ و علامت $+$ در سمت چپ (۱) بیانگر جمع برداری مجموعه‌ها

1) Minkowski

و در سمت راست آن، به مفهوم جمع اعداد حقیقی است. این نامساوی که پیش‌تر در سال ۱۸۸۷ توسط برون[1] [٦] به اثبات رسیده بود، امروزه به نامساوی برون ــ مینکوفسکی[2] مشهور است. همان‌گونه که در بخش سوم خواهیم دید، شکل‌های دیگری از این نامساوی، حتی در فضاهای اقلیدسی، مطرح‌اند و لذا برای جلوگیری از سردرگمی، (۱) را نامساوی برون ــ مینکوفسکی برای اجسام محدب می‌نامیم. نامساوی (۱) دارای دو شکل هم‌ارز به‌صورت

$$V_n(K+L)^{1/n} \geq V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}$$

و

$$V_n(sK+tL)^{1/n} \geq sV_n(K)^{1/n} + tV_n(L)^{1/n}$$

است که اثبات هم‌ارز بودن آن‌ها کار دشواری نیست. توجه کنید که در دومین شکل هم‌ارز (۱)، s و t ثابت‌های عددی مثبت و دلخواه هستند.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش به معرفی اجمالی مفاهیمی می‌پردازیم که در سایر بخش‌های متن حاضر به‌کار خواهند رفت. نمادهای V_n و V_n^* به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ اندازهٔ n ــ بعدی لبگ بر $\mathbb{R}^n$ واندازهٔ داخلی لبگ بر $\mathbb{R}^n$ هستند. یادآور می‌شویم که برای هر $A \subset \mathbb{R}^n$، $V_n^*(A)$ سوپرمم اندازهٔ لبگ زیرمجموعه‌های فشردهٔ A است. همچنین، $L_{\mathbb{R}^n}$ نشان دهندهٔ σ ــ جبر زیرمجموعه‌های لبگ ــ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^n$ است. ابتدا دو تعریف دربارهٔ توابع بر فضای $\mathbb{R}^n$ بیان می‌کنیم. فرض کنید f و g توابع اندازه‌پذیر بر $\mathbb{R}^n$ هستند. پیچش f و g، تابع

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

است که برای x هایی تعریف می‌شود که به‌ازای آن‌ها انتگرال فوق موجود است. توجه کنید که در این‌جا dy نشان‌دهندهٔ انتگرال‌گیری نسبت به اندازهٔ n ــ بعدی لبگ است. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را تک مُدی[3] می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $0 \leq c \leq 1$ داشته باشیم $f(cx) \geq f(x)$.

مجموعهٔ همهٔ برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای آن آزمایش می‌نامیم. بردار تصادفی X تابعی اندازه‌پذیر از فضای نمونه‌ای آزمایش است به $\mathbb{R}^n$. به‌وضوح به هر بردار تصادفی X با مقادیر در $\mathbb{R}^n$، n متغیر تصادفی X_1، ...، X_n نظیر می‌شود که مؤلفه‌های آن نامیده می‌شوند و می‌نویسیم $X = (X_1, \ldots, X_n)$. بردارهای تصادفی $X = (X_1, \ldots, X_m)$ و $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ را مستقل نامیم اگر برای هر $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ داشته باشیم

1) Brunn   2) The Brunn-Minkowski Inequality   3) Unimodal

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = F_1(x_1, \dots, x_m)F_2(y_1, \dots, y_n)$$

که در آن F، F_1 و F_2 به‌ترتیب توابع توزیع توأم بردارهای تصادفی $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$، $(X_1, \dots, X_m)$ و $(Y_1, \dots, Y_n)$ هستند. تابع چگالی احتمال یک بردار تصادفی به‌صورت تابع چگالی احتمال توأم مؤلفه‌های آن تعریف می‌شود.

اکنون بازمی‌گردیم به زیرمجموعه‌های فضای $\mathbb{R}^n$. زیرمجموعهٔ فشرده و محدب K از $\mathbb{R}^n$ را که دارای درون ناتهی است یک جسم محدب می‌نامیم. همچنین مساحت سطح جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ بنابه تعریف، عبارت است از

$$S(K) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{V_n(K + \epsilon B^n) - V_n(K)}{\epsilon}$$

که در آن B^n گوی بستهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$ است. دو جسم محدب K و L رامتجانس گوییم اگر عدد حقیقی $\alpha > 0$ و بردار $a \in \mathbb{R}^n$ موجود باشند به‌طوری که $K = \alpha L + a$. همچنین، فاصلهٔ هاسدورف[1] دو زیرمجموعهٔ فشرده و ناتهی K و L از $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_0(K, L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B^n, L \subseteq K + \lambda B^n\}$$

مفهوم مهم دیگر، حجم آمیخته[2] است. بنا به قضیه‌ای منسوب به مینکوفسکی، [۲۱، قضیهٔ ۵.۱.۶]، اگر K_1، ... ،K_m اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ بوده و λ_1، ... ،λ_m اعداد حقیقی نامنفی باشند، آن‌گاه $V_n(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب متغیرهای λ_1، ... ،λ_m است. ضریب $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ منسوب به $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}$ را یک حجم آمیخته می‌نامیم. یکی از مهم‌ترین خواص احجام آمیخته، خطی بودن آن‌ها نسبت به تمامی مؤلفه‌هاست. اگر K و L دو جسم محدب باشند، آن‌گاه برای $i = 1, \dots, n$ تعریف می‌کنیم:

$$V_i(K, L) = V(K, \dots, K, L, \dots, L)$$

که در سمت راست آن K، $n-i$ بار و L، i بار ظاهر شده‌اند. $V_i(K, L)$ را i ـ امین حجم آمیخته متناظر با اجسام محدب K و L می‌نامیم.

در بخش‌هایی از این مقاله به مفهوم فضای گاوس[3] اشاره می‌شود. اندازهٔ استاندارد گاوس بر $L_{\mathbb{R}^n}$، یعنی قلمروی تعریف V_n، به‌صورت

$$\gamma_n(A) = (2\pi)^{-n/2} \int_A e^{-\|x\|^2/2} dx$$

تعریف می‌شود. در این‌جا $\|x\|$ نرم اقلیدسی بردار $x \in \mathbb{R}^n$ است. مجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ همراه با متر اقلیدسی و اندازهٔ استاندارد گاوس را فضای گاوس می‌نامیم.

1) Hausdorff Distance 2) Mixed Volume 3) Gauss Space

دو تعریف آخر این بخش به معرفی مفاهیمی از نظریهٔ اطلاع اختصاص دارند. اگرچه در حال حاضر نمی‌توان دلیل متقاعد کننده‌ای برای مطرح نمودن این مفاهیم ارائه نمود، تلاش خواهیم کرد تا خلاء حاصل را در بخش ۷ پر نماییم. فرض کنیم X یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^n$ با چگالی احتمال f باشد. در این‌صورت آنتروپی X، $h(X)$، به‌صورت

$$h(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x) dx$$

تعریف می‌شود. با استفاده از این تعریف می‌توان توان آنتروپی X را با

$$N(X) = \frac{۱}{۲\pi e} e^{\frac{۲}{n} h(X)}$$

تعریف نمود.

۳. نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی

نامساوی ارائه شده در این بخش، موسوم به نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی [1] را می‌توان مهم‌ترین توسیعِ نامساوی (۱) به‌شمار آورد. بیان و اثبات این نامساوی که در سال ۱۹۳۵ و توسط لوسترنیک [2] [۱۸] انجام پذیرفت، سبب ایجاد تحولی بزرگ در زمینهٔ فعالیت‌های تحقیقاتی پیرامون نامساوی برون ـ مینکوفسکی گردید. برای رسیدن به درک کاملی از چگونگی شکل‌گیری این تحول، لازم است به معرفی نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی بپردازیم.

۱.۳. نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی در $\mathbb{R}^n$

در بخش اول دیدیم که مجموعه‌های مورد بحث در نامساوی (۱)، زیرمجموعه‌های خاصی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، یعنی اجسام محدب بودند. فشردگی این مجموعه‌ها به‌وضوح کران‌داری و اندازه‌پذیر بودن آن‌ها را نسبت به V_n ایجاب خواهد کرد. لذا این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان (۱) را برای زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر و کران‌دار $\mathbb{R}^n$ به اثبات رساند. ارائهٔ پاسخ مثبت به این سؤال در قالب نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی توسط لوسترنیک و با اثبات قضیهٔ زیر صورت پذیرفت.

قضیه ۱. (نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی در $\mathbb{R}^n$) فرض کنید $۰ \leq \lambda \leq ۱$ عدد حقیقی دلخواه بوده و X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار و اندازه‌پذیرِ $\mathbb{R}^n$ باشند به‌طوری که $(۱-\lambda)X + \lambda Y$ نیز اندازه‌پذیر است. در این صورت داریم

$$V_n((۱-\lambda)X + \lambda Y)^{۱/n} \geq (۱-\lambda) V_n(X)^{۱/n} + \lambda V_n(Y)^{۱/n}. \qquad (۲)$$

1) The General Brunn-Minkowski Inequality 2) Lusternik

علاوه بر لوسترنیک، ریاضیدانان دیگری همچون هویر[1] و اُمان[2] [۱۰] و هنشتوک[3] و مک‌بیت[4] [۱۶] نیز به اثبات قضیهٔ ۱ همت گمارده‌اند. برای مشاهدهٔ طرحی از برهان هویر و اُمان به قضیهٔ ۴.۱ از [۱۱] مراجعه کنید. روش به‌کار رفته در [۱۶] برای اثبات قضیهٔ ۱، بر پایهٔ استقراء روی n استوار است. لازم به ذکر است که همانند آنچه در مورد نامساوی برون ـ مینکوفسکی (۱) بیان شد، نامساوی عام (۲) نیز دارای دو شکل هم‌ارز به‌صورت

$$V_n(X+Y)^{1/n} \geq V_n(X)^{1/n} + V_n(Y)^{1/n} \tag{۲'}$$

و

$$V_n(sX+tY)^{1/n} \geq sV_n(X)^{1/n} + tV_n(Y)^{1/n}$$

است که در آخرین نامساوی، s و t اعداد حقیقی مثبت و دلخواه هستند.

۲.۳. مسألهٔ اندازه‌پذیری ترکیب محدب

قضیهٔ ۱ حاوی نکتهٔ مهمی است که شاید توجه خوانندگان را به خود جلب کرده باشد. در واقع، همان‌طور که از صورت قضیه برمی‌آید، ترکیب محدب هر دو زیرمجموعهٔ لبگ ـ اندازه‌پذیرِ $\mathbb{R}^n$ لزوماً لبگ اندازه‌پذیر نیست. این حقیقت را سرپینسکی[5] از طریق مثال نقضی که در سال ۱۹۲۰ منتشر ساخت، آشکار نمود [۲۳]. تاکنون راه‌های متفاوتی برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده‌اند. یک راه ساده برای حذف شرط اندازه‌پذیری $(1-\lambda)X + \lambda Y$، در نظر گرفتن اندازه‌ی داخلی لبگ به‌جای اندازهٔ لبگ در سمت چپ نامساوی (۲) است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش دوم، به نامساوی

$$V_n^*((1-\lambda)X+\lambda Y)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(X)^{1/n} + \lambda V_n(Y)^{1/n}$$

می‌رسیم که برای مشاهدهٔ اثبات آن می‌توانید به [۱۶] قضیهٔ ۱ مراجعه کنید. روش دیگر، جایگزین نمودن جمع برداری با نوع دیگری از جمع موسوم به‌جمع اساسی است. برای این منظور، کافی است به‌یاد آوریم که جمع برداری مجموعه‌های X و Y را می‌توان به‌صورت

$$X+Y = \{z : X \cap (z-Y) \neq \emptyset\}$$

نوشت. در این صورت با اعمال یک تغییر مختصر، به تعریف مورد نظر خواهیم رسید. در واقع، جمع اساسی مجموعه‌های X و Y را به‌صورت

$$X +_e Y = \{z : V_n(X \cap (z-Y)) > 0\}$$

تعریف می‌کنیم.

1) Hadwiger 2) Ohmann 3) Henstock 4) Macbeath 5) Sierpinski

اکنون شکل اساسی نامساوی برون ــ مینکوفسکی بیان می‌کند که اگر $1 > \lambda > 0$ و X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار و اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^n$ باشند، آن‌گاه

$$V_n(X +_e Y)^{1/n} \geq V_n(X)^{1/n} + V_n(Y)^{1/n}.$$

اثباتی از این نامساوی را می‌توانید در ضمیمهٔ [۵] بیابید.

۴. ارتباط با نامساوی‌های دیگر

در مقدمهٔ بخش سوم بیان کردیم که ارائه و اثبات نامساوی عام (۲) موجب ایجاد تحولی شگرف در مسیر فعالیت‌های تحقیقاتی مرتبط با نامساوی برون ـ مینکوفسکی شد. در این بخش قصد داریم تا ضمن معرفی اجمالی برخی نامساوی‌های تحلیلی مرتبط با نامساوی‌های (۱) و (۲) در $\mathbb{R}^n$، به توصیف تحول مزبور بپردازیم. این مهم توسط نمودار صفحهٔ بعد صورت می‌پذیرد. توجه کنید که در این نمودار علامت پیکان میان دو نامساوی نشان دهندهٔ آن است که نامساوی واقع در انتهای پیکان را می‌توان از نامساوی واقع در ابتدای آن نتیجه گرفت.

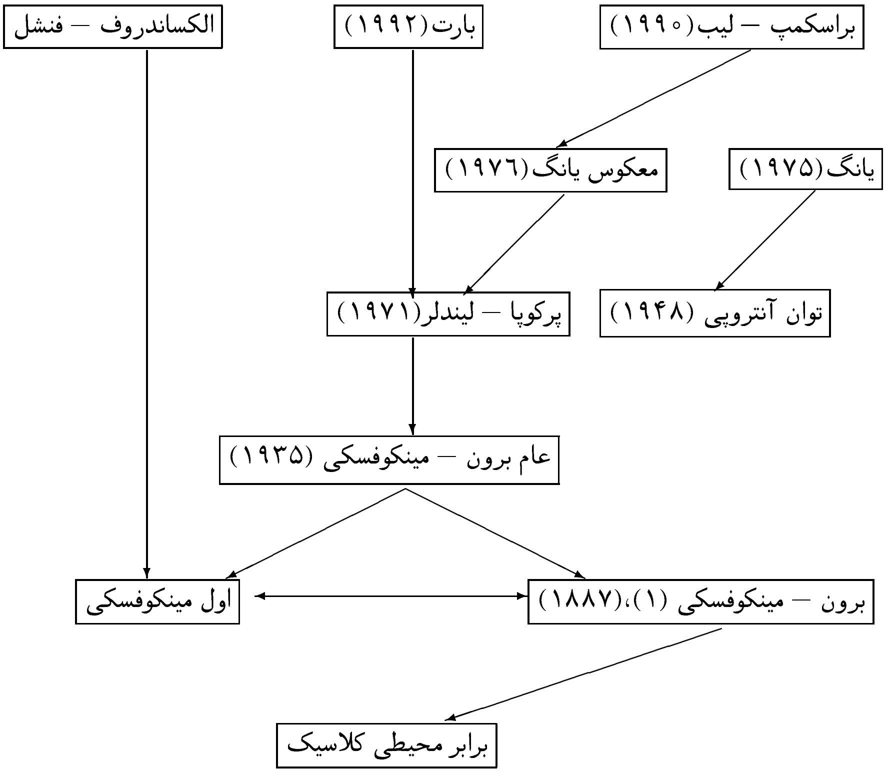
۱.۴. حرکت به سوی آنالیز

در بخش اول با نامساوی برون ــ مینکوفسکی برای اجسام محدب آشنا شدیم و دیدیم که انگیزهٔ طرح این نامساوی در بحث‌های هندسی پیرامون نامساوی برابرمحیطی کلاسیک نهفته بود. در واقع، اشتیاق به یافتن اثبات ساده‌ای از نامساوی برابرمحیطی مهم‌ترین دلیل برای اندیشیدن به موضوعاتی بود که منجر به طرح نامساوی برون ــ مینکوفسکی گردید. با این توضیح و توجه به تحدب مجموعه‌های مورد بحث در (۱)، شگفت‌آور نخواهد بود اگر بیان کنیم که نامساوی برون ـ مینکوفسکی تا مدت‌ها متعلق به هندسه پنداشته می‌شده است. اما دیری نپایید که لوسترنیک وضعیت را تغییر داد. او با بیان و اثبات قضیهٔ ۱ سبب شد تا بحث به حیطه‌ی آنالیز راه یابد و امکان استفاده از ابزارهای قدرتمند آنالیز ریاضی جهت پیشروی در این مسیر تحقیقاتی فراهم گردد. این امر همچنین موجبات یافتن کاربردهای گوناگون و توسیع‌های مهم دیگری همچون نامساوی پرکوپا ـ لیندلر[1] را فراهم آورد.

۲.۴. نامساوی‌های مرتبط با (۱) و (۲) در $\mathbb{R}^n$

اکنون به معرفی اجمالی نامساوی‌هایی می‌پردازیم که در ارتباط تنگاتنگ با نامساوی‌های برون ـ مینکوفسکی (۱) و (۲) هستند.

1) The Prekopa-Leindler Inequality



نمودار نشان‌دهندهٔ ارتباط نامساوی‌های مورد بحث

الف) نامساوی برابرمحیطی

نامساوی برابر محیطی[1] کلاسیک را می‌توان به‌عنوان پاسخی برای مسألهٔ برابرمحیطی در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفت. مسألهٔ مذکور یک مسألهٔ بهینه‌سازی است، زیرا مطلوب آن کمینه نمودن مساحت سطح در میان تمام حوزه‌های با حجم برابر و یا معادلاً بیشینه نمودن حجم در میان تمام حوزه‌هایی است که دارای مساحت سطح ($n-1$ ـ بعدی) ثابتی می‌باشند. قضیهٔ زیر پاسخ این مسأله را در قالب نامساوی برابرمحیطی کلاسیک بیان می‌کند.

1) The Isoperimetric Inequality

قضیه ۲. (نامساوی برابر محیطی کلاسیک در $\mathbb{R}^n$) فرض کنید K یک حوزهٔ دلخواه در $\mathbb{R}^n$ با مساحت سطح A باشد. دراین‌صورت نامساوی

$$A^n \geq n^n \omega_n V_n^{n-1}(K) \tag{۳}$$

برقرار است که درآن ω_n حجم (اندازهٔ لبگ) گوی بستهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$ است. تساوی در (۳) برقرار است اگر و تنها اگر K یک گوی باشد.

اثبات این نامساوی با استفاده از نامساوی برون ـ مینکوفسکی (۱) به‌سادگی و در چند سطر امکان‌پذیر است. برای مشاهدهٔ جزئیات برهان، می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.

ب) نامساوی اول مینکوفسکی

در این‌جا به معرفی نامساوی مهم دیگری منسوب به مینکوفسکی، موسوم به نامساوی اول مینکوفسکی[1]، می‌پردازیم که با (۱) هم‌ارز است.

قضیه ۳. (نامساوی اول مینکوفسکی در $\mathbb{R}^n$) فرض کنیم K و L دو جسم محدب در $\mathbb{R}^n$ با اولین حجم آمیختهٔ $V_1(K,L)$ باشند. در این‌صورت نامساوی

$$V_1(K,L) \geq V_n(K)^{(n-1)/n} V_n(L)^{1/n} \tag{۴}$$

برقرار است. تساوی در (۴) رخ می‌دهد اگر و تنها اگر K و L متجانس باشند.

اثبات قضیهٔ فوق با در دست داشتن نامساوی برون ـ مینکوفسکی (۱) بسیار ساده است ([۱۱] صفحات ۳٦۴ و ۳٦۵). از طرف دیگر، اثبات این‌که (۴)، (۱) را نتیجه می‌دهد نیز با استفاده از خطی بودن احجام آمیخته امکان‌پذیر است که برای مشاهدهٔ جزئیات برهان می‌توانید به [۱۳] صفحهٔ ۳۷۰ مراجعه کنید.

نامساوی اول مینکوفسکی از چندین جهت حائز اهمیت است. نخستین وجه اهمیت آن، کاربرد در حل مسألهٔ شفارد است. این مسأله را می‌توان بدین شرح بیان نمود: فرض کنیم K و L اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ هستند که یک انتقال‌یافته از هریک از آن‌ها نسبت به مبدأ متقارن است. اگر حجم تصویر متعامد K بر هر ابرصفحه، کوچکتر از حجم تصویر متعامد L بر همان ابرصفحه باشد، آیا حجم K نیز از حجم L کوچکتر است؟ پاسخ این سؤال در حالت کلی منفی است ([۱۳] فصل چهار و [۱۹] صفحهٔ ۲۵۵ را ببینید). کاربرد دوم این نامساوی، دراثبات گونه‌ای از نامساوی برابرمحیطی موسوم به نامساوی برابرمحیطی برای اجسام محدب است. این نامساوی بیان می‌کند که برای هر جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ داریم

1) Minkowski's First Inequality

$$\left(\frac{V_n(K)}{V_n(B^n)}\right)^{1/n} \leq \left(\frac{S(K)}{S(B^n)}\right)^{1/(n-1)}.$$

برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر دربارهٔ این کاربرد، به [۱۱] مراجعه کنید.

پ) نامساوی پرکوپا ــ لیندلر

اثبات هنشتوک و مک‌بیت ([۱٦]) از قضیهٔ ۱ انگیزه‌ای برای کشف یک نامساوی قوی‌تر توسط پرکوپا[۱] و لیندلر[۲] گردید. این نامساوی که امروزه به نامساوی پرکوپا ــ لیندلر مشهور است در قضیهٔ زیر بیان می‌گردد.

قضیه ۴. **(نامساوی پرکوپا ــ لیندلر در $\mathbb{R}^n$)** فرض کنید $0 < \lambda < 1$ و f، g و h توابع انتگرال‌پذیر نامنفی بر $\mathbb{R}^n$ واجد شرط

$$h((1-\lambda)x+\lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ باشند. در این‌صورت داریم

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy\right)^{\lambda}. \quad (5)$$

شرایط کاملاً پیچیده‌ای برای برقراری تساوی در(۵) در حالت $n = 1$ ارائه شده‌اند که برای مشاهدهٔ آن‌ها می‌توانید به [۹] و [۲۴] مراجعه کنید. با وجود این، شرایط برقراری تساوی در حالت کلی همچنان غیرمشخص است.

اثبات قضیهٔ فوق به‌سادگی و با استفاده از استقراء بر n امکان‌پذیر است ([۱۲] قضیهٔ ۴.۲). اکنون برای آن‌که شکل هم‌ارز نامساوی عام (۲) را از نامساوی پرکوپا ــ لیندلر به‌دست آوریم، کافی است در (۵) قرار دهیم $f = \chi_X$، $g = \chi_Y$ و $h = \chi_{(1-\lambda)X+\lambda Y}$.

ت) نامساوی توان آنتروپی

نامساوی توان آنتروپی[۳] یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین نامساوی‌ها در حیطهٔ نظریهٔ اطلاع است. در سال ۱۹۴۸، شانن[۴] [۲۲] این نامساوی را بیان و اثبات نمود تا کرانی پایینی برای ظرفیت یک کانال به‌دست آورد.

قضیه ۵. **(نامساوی توان آنتروپی)** فرض کنیم X و Y دو بردار تصادفی مستقل در $\mathbb{R}^n$ با چگالی‌های احتمال در $L^p(\mathbb{R}^n)$ برای یک $p > 1$ باشند. در این صورت داریم

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y). \quad (6)$$

برای مشاهدهٔ دو اثبات ساده و جدید از قضیهٔ فوق، [۱۵] و [۲۵] را ببینید.

1) Prekopa 2) Leindler 3) The Entropy Power Inequality 4) Shannon

نکتهٔ جالب توجه در مورد نامساوی توان آنتروپی، ارتباط غیرمستقیم آن با نامساوی برون ــ مینکوفسکی است. در این‌جا عبارت «ارتباط غیرمستقیم» را می‌توانیم به‌شرح زیر تعبیر کنیم. هر کدام از نامساوی‌های بیان شده در این بخش، به نحوی در ارتباط مستقیم با نامساوی برون ــ مینکوفسکی هستند. به‌عنوان مثال نامساوی اول مینکوفسکی (۴) با (۱) هم‌ارز است و نامساوی پرکوپا ــ لیندلر (۵)، نامساوی عام (۲) را نتیجه می‌دهد. همچنین گزاره‌هایی مشابه (و البته نه کاملاً یکسان با) آنچه بیان شد در مورد ارتباط مابقی نامساوی‌های این بخش و نامساوی‌های برون ــ مینکوفسکی (۱) و (۲) صدق می‌کنند. لیکن وضع نامساوی توان آنتروپی مطلقاً متفاوت با دیگر نامساوی‌هاست. در واقع نمی‌توان با داشتن هر کدام از نامساوی‌های توان آنتروپی و برون ــ مینکوفسکی، دیگری را نتیجه گرفت. همچنین هیچ‌کدام از این دو نامساوی یک نامساوی مستقیماً مرتبط با دیگری را نتیجه نمی‌دهند. پس این سؤال مطرح می‌شود که دلیل معرفی نامساوی توان آنتروپی در این‌جا چیست؟ به‌عنوان یک پاسخ جامع، مانع ولی مبهم می‌توان شباهت‌های متعدد میان این دو نامساوی را دلیل موجهی دانست. در حقیقت همین شباهت‌ها هستند که می‌توان آن‌ها را تحت عنوان ارتباط «غیرمستقیم» تلقی نمود و سعی خواهیم کرد تا ابهام موجود در مورد این شباهت‌ها را به‌تدریج برطرف نمائیم. یک مورد از وجوه تشابه دو نامساوی را پس از معرفی نامساوی یانگ و عکس آن در زیربخش بعد بیان خواهیم کرد و بیان مورد دیگر را به بخش ۷ موکول می‌کنیم.

ث) نامساوی یانگ و عکس آن

فرض کنیم اعداد حقیقی $p, q, r \geq ۱$ در شرط

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱ + \frac{۱}{r} \qquad (۷)$$

صدق کنند و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ توابعی نامنفی باشند. اگر $f * g$ پیچش توابع f و g باشد، آن‌گاه نامساوی کلاسیک یانگ[1] بیان می‌کند که

$$\| f * g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q \; . \qquad (۸)$$

قضیهٔ زیر به معرفی دو نامساوی اختصاص دارد: (۹) توسیعی از (۸) است که به‌طور مستقل توسط بکنر[2] [۲] و براسکمپ[3] و لیب[4] [۴] به اثبات رسیده است و (۱۰) شکل وارون (۹) است که توسط براسکمپ و لیب [۴] اثبات شده است.

قضیه ٦. (نامساوی یانگ و عکس آن در $\mathbb{R}^n$) فرض کنیم $p, q, r > ۰$ در شرط (۷) صدق کنند و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ توابعی نامنفی باشند. در این‌صورت

1) The Classical Young Inequality 2) Beckner 3) Brascamp 4) Lieb

الف. اگر $p,q,r \geq ۱$، نامساوی یانگ

$$\| f * g \|_r \leq C^n \| f \|_p \| g \|_q \tag{۹}$$

و

ب. اگر $p,q,r \leq ۱$، عکس نامساوی یانگ

$$\| f * g \|_r \geq C^n \| f \|_p \| g \|_q \tag{۱۰}$$

برقرارند. در اینجا $C = \frac{C_p C_q}{C_r}$ که در آن برای s و s' صادق در شرط $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = ۱$ داریم $C_s^۲ = \frac{|s|^{۱/s}}{|s'|^{۱/s'}}$.

آنچه نامساوی یانگ و عکس آن را با نامساوی برون ــ مینکوفسکی مرتبط می‌سازد، نتیجه شدن صورتی معادل از نامساوی پرکوپا ــ لیندلر، موسوم به شکل اساسی نامساوی پرکوپا ــ لیندلر ([۱۲] قضیه ۹.۱)، از حالت حدی $r \to ۰$ در عکس نامساوی یانگ است. اثباتی از این حقیقت را می‌توانید در [۱۲] قضیهٔ ۱۴.۲ بیابید. با توجه به آنچه در مورد ارتباط نامساوی‌های پرکوپا ــ لیندلر و برون ــ مینکوفسکی می‌دانیم، نتیجهٔ بحث فوق این است که حالت حدی $r \to ۰$ در عکس نامساوی یانگ، نامساوی عام (۲) را نتیجه می‌دهد. نکتهٔ دیگری که خود به‌عنوان یکی از شباهت‌های نامساوی عام (۲) و توان آنتروپی (٦) مطرح می‌گردد آن است که حالت حدی $r \to ۱$ از نامساوی یانگ، (٦) را ایجاب می‌کند([۱۲] لم ۱۸.۲ و نتیجهٔ ۱۸.۳).

ج) نامساوی‌های براسکمپ ــ لیب و بارت[1]

نامساوی‌های ارائه شده در این بخش، قوی‌ترین توسیع‌های شناخته شده در ارتباط با نامساوی یانگ و عکس آن هستند.

قضیه ۷. (نامساوی‌های براسکمپ ــ لیب و بارت در $\mathbb{R}^n$) برای هر $i = ۱,\ldots,m$ فرض کنید $c_i > ۰$ و $n_i \in \mathbb{N}$ چنان باشند که $\sum_i c_i n_i = n$. همچنین فرض کنید $f_i \in L^۱(\mathbb{R}^{n_i})$ ها توابعی نامنفی و برای $i = ۱,\ldots,m$، $B_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$ ها توابعی خطی و پوشا باشند. در این‌صورت اگر $D = \inf\{\frac{\det(\sum_{i=۱}^m c_i B_i^* A_i B_i)}{\prod_{i=۱}^m \det(A_i)^{c_i}} :$ یک ماتریس $n_i \times n_i$ معین مثبت است $A_i\}$، آن‌گاه نامساوی‌های

الف. براسکمپ ــ لیب

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=۱}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \leq D^{-۱/۲} \prod_{i=۱}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x) dx \right)^{c_i} \tag{۱۱}$$

و

1) Barthe

ب. بارت

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^n}} \sup\left\{\prod_{i=1}^{m} f_i(z_i)^{c_i} \,:\, x=\sum_i c_i B_i^* z_i,\ z_i\in\mathbb{R}^{n_i}\right\} dx \geq D^{1/2} \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{R^{n_i}} f_i(x)dx\right)^{c_i} \tag{۱۲}$$

برقرارند. می‌توان نشان داد که (۱۱) نامساوی یانگ را نتیجه می‌دهد و (۱۲) نامساوی پرکوپا ـ لیندلر را ایجاب می‌کند. برای مشاهدهٔ جزئیات می‌توانید به [۱۱] بخش ۱۵ مراجعه کنید.

چ) نامساوی الکساندروف ـ فنشل [1]

در زیربخش **نامساوی اول مینکوفسکی** بیان کردیم که نامساوی‌های برون ـ مینکوفسکی (۱) و اول مینکوفسکی (۴) هم‌ارزند. در این‌جا به معرفی توسیعی از نامساوی اول مینکوفسکی می‌پردازیم که با توجه به آنچه بیان شد، توسیعی از (۱) نیز به‌شمار می‌آید.

قضیه ۸ (نامساوی الکساندروف ـ فنشل در $\mathbb{R}^n$) فرض کنید K_1، ...، K_n اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $1 \leq i \leq n$ عددی ثابت باشد. در این صورت داریم

$$V(K_1,\ldots,K_n)^i \geq \prod_{j=1}^{i} V(K_j,i;K_{i+1},\ldots,K_n). \tag{۱۳}$$

نامساوی (۱۳) قوی‌ترین توسیع نامساوی برون ـ مینکوفسکی (۱)، البته برای اجسام محدب است. متأسفانه هیچ اثبات ساده‌ای برای قضیهٔ فوق موجود نیست. برای مشاهدهٔ اثباتی از آن می‌توانید [۲۱] قضیه ۶.۳.۱ را ببینید. این اثبات که مبتنی بر روش مورد استفاده توسط الکساندروف است، ابتدا به اثبات نامساوی برای گونهٔ خاصی از چندوجهی‌های محدب پرداخته و سپس از تقریب استفاده می‌نماید. شرایط برقراری تساوی تا به امروز مجهول باقی مانده‌اند. برای مشاهدهٔ توضیحات تاریخی بیشتر می‌توانید به [۷] صفحهٔ ۱۴۳ مراجعه کنید. اگر در (۱۳) قرار دهیم $i=n$، $K_1=L$ و $K_2=\ldots=K_n=K$، به نامساوی اول مینکوفسکی می‌رسیم.

۵. مسائل پایانی

همان‌طور که برون و مینکوفسکی نشان دادند، تساوی در نامساوی برون ـ مینکوفسکی (۱) رخ می‌دهد اگر و تنها اگر K و L اجسام محدب متجانسی باشند، یعنی برای $\alpha > 0$ و $a\in\mathbb{R}^n$ یی داشته باشیم $K=\alpha L + a$. حال فرض کنید که برای $0<\lambda<1$ و یک $\epsilon>0$ داشته باشیم

$$V_n((1-\lambda)K+\lambda L)^{1/n} \leq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n} + \lambda V_n(L)^{1/n} + \epsilon$$

یعنی تساوی میان دو کمیت واقع در دو طرف نامساوی (۱) با تقریب $\epsilon>0$ برقرار باشد،

1) The Aleksandrov-Fenchel Inequality

در این صورت مایلیم بدانیم که آیا می‌توان حداکثر فاصلهٔ K و L نسبت به متر هاسدورف را برحسب n، λ و ϵ به‌دست آورد؟
مسائلی از این قبیل را معمولاً مسائل پایایی و تخمین‌های روشنی را که به چنین سؤالاتی پاسخ مثبت می‌دهند، اغلب نتایج پایایی می‌نامند.

قضیهٔ زیر، منسوب به گرومر[1] (قضیهٔ ۳ از [۱۴])، به مسألهٔ پایایی فوق پاسخ می‌دهد.

قضیه ۹. فرض کنید $K_\circ$ و $K_۱$ دو جسم محدب در $\mathbb{R}^n$ بوده و $\epsilon \geq \circ$ و $\circ < \lambda < ۱$ اعدادی ثابت باشند. برای $i = \circ, ۱$ فرض کنید $d(K_i)$ قطر K_i باشد و قرار دهید $v_i = V_n(K_i)^{۱/n}$. همچنین فرض کنید D عددی حقیقی صادق در شرط $d(K_i) \leq v_i D$ باشد. قرار دهید $M = \max\{v_۱, v_۲\}$ و $m = \min\{v_۱, v_۲\}$. اگر

$$V_n((۱-\lambda)K_\circ + \lambda L)^{۱/n} \leq (۱-\lambda)V_n(K_\circ)^{۱/n} + \lambda V_n(K_۱)^{۱/n} + \epsilon$$

آن‌گاه

$$h_\circ(K_\circ, K_۱) \leq \gamma_n \left(\frac{M}{m} \frac{۱}{\sqrt{\lambda(۱-\lambda)}} + ۲ \right) m^{-۱/(n+۱)} D \epsilon^{۱/(n+۱)}. \qquad (۱۴)$$

که در آن $\gamma_n = \left(۱ + \frac{۱}{۴} ۲^{-۱۳}\right) ۳^{(n-۱)/n} ۲^{(n+۲)/(n+۱)} n < ٦.\circ\circ\circ ۲۵ n$.
به‌روشنی، نامساوی (۱۴) همان نتیجهٔ پایایی مورد نظر است.

٦. توسیع‌ها و نامساوی‌هایی از نوع برون ـ مینکوفسکی

در این بخش به مرور یکی از توسیع‌ها و بیان دیگری از نامساوی‌های برون ـ مینکوفسکی (۱) و (۲) در فضاهای گاوس می‌پردازیم. در سال ۱۹۵۷ نوث[2]، [۱۷]، به برهانی جدید از نامساوی (۱) دست یافت و با گسترش مفاهیم به‌کار رفته در اثبات خود موفق به استنتاج نتیجهٔ کلی‌تر زیر گردید. برای هر جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ فرض کنیم $F(K,x)$، $x \in K$، تابعی حقیقی مقدار، نامنفی و پیوسته نسبت به K و x باشد. همچنین فرض کنیم عدد حقیقی $m \geq \circ$ موجود است به‌طوری که

$$F(\lambda K + a, \lambda x + a) = \lambda^m F(K,x) \qquad (۱۵)$$

برای هر $\lambda > \circ$ و $a \in \mathbb{R}^n$. علاوه بر این،

$$\log F((۱-\lambda)K + \lambda L, (۱-\lambda)x + \lambda y) \geq (۱-\lambda)\log F(K,x) + \lambda \log F(L,y) \qquad (۱٦)$$

که در آن $x \in K$، $y \in L$ و $\circ \leq \lambda \leq ۱$. در این صورت اگر برای هر جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم

$$G(K) = \int_K F(K,x)dx$$

1) Groemer 2) Knothe

آن‌گاه خواهیم داشت

$$G(K+L)^{\frac{1}{n+m}} \geq G(K)^{\frac{1}{n+m}} + G(L)^{\frac{1}{n+m}} \tag{۱۷}$$

در این‌جا K و L اجسام محدب دلخواهی در $\mathbb{R}^n$ هستند. اکنون بررسی می‌کنیم که (۱۷) چگونه از (۱) نتیجه می‌شود. به‌وضوح تابع $F(K,x) = 1$، $x \in K$ در (۱۶) صدق کرده و شرط (۱۵) را به‌ازای $m = 0$ برمی‌آورد. همچنین متناظر با این تابع، برای هر جسم محدب K خواهیم داشت

$$G(K) = \int_K F(K,x)dx = \int_K dx = V_n(K)$$

لذا (۱) از (۱۷) نتیجه می‌شود. برای مشاهده توضیحات بیشتر در مورد توسیع نوث و اثبات آن، به [۱۷] مراجعه کنید.

در ادامه، به معرفی اجمالی یک نامساوی از نوع برون ــ مینکوفسکی می‌پردازیم.

قضیه ۱۰. (نامساوی برون ــ مینکوفسکی در فضای گاوس) فرض کنید $0 \leq \lambda \leq 1$ عددی ثابت و K و L دو زیرمجموعهٔ کران‌دار و اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ باشند به‌طوری که $(1-\lambda)K + \lambda L$ نیز اندازه‌پذیر است. در این‌صورت نامساوی

$$\gamma_n((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \gamma_n(K)^{(1-\lambda)}\gamma_n(L)^{\lambda} \tag{۱۸}$$

برقرار است.

توجه کنید که (۱۸) به لحاظ ظاهری شباهتی تام با شکل اول نامساوی عام ([۱۲]، قضیه ۵.۱) دارد و همین امر وجه تسمیهٔ آن است. اثبات قضیهٔ فوق با استفاده از نامساوی پرکوپا ــ لیندلر (۵) انجام می‌شود که برای مشاهدهٔ جزئیات آن می‌توانید به [۴] رجوع کنید.

۷. کاربردهایی از نامساوی عام (′۲)

همان‌طور که تا این‌جا دیده‌ایم، نامساوی برون ــ مینکوفسکی دارای صورت‌های هم‌ارز، توسیع‌ها و گونه‌های متعددی است. لیکن هر کدام از این نامساوی‌ها دارای کاربردهای مختلفی می‌باشند. از این‌رو، حجم عظیم کاربردهای نامساوی‌های مورد بحث در این مختصر نمی‌گنجد و ناچاراً به ذکر دو مورد از کاربردهای نامساوی عام (′۲) بسنده می‌کنیم. توجه کنید که با توجه به معادل بودن نامساوی‌های عام (۲) و (′۲)، آنچه به‌عنوان کاربردی از (′۲) بیان می‌گردد، کاربردی از (۲) نیز خواهد بود.

۱.۷. کاربرد در نظریهٔ اطلاع

در سال ۱۹۸۴، کاستا[1] و کاور[2] [۸] ضمن اشاره به مورد دیگری از وجوه تشابه نامساوی‌های

1) Costa 2) Cover

عام ($'۲$) و توان آنتروپی (٦)، به استفاده از آن برای تعریف مفهوم جدید مساحت سطح برای متغیرهای تصادفی چندمتغیره و به‌قدر کافی خوش‌رفتار پرداختند. در واقع هنر کاستا و کاور در استفاده از شباهت‌های نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی و نامساوی توان آنتروپی به منظور حصول نتایجی مرتبط با مفهوم آنتروپی از نتایج شناخته شدهٔ هندسی مرتبط با نامساوی عام بود. آن‌ها، در نخستین قدم، نشان دادند که اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل بوده و X' و Y' متغیرهای تصادفی نرمال و مستقل باشند به‌طوری که $h(X') = h(X)$ و $h(Y') = h(Y)$، آن‌گاه نامساوی

$$h(X+Y) \geq h(X'+Y') \qquad (۱۹)$$

با نامساوی توان آنتروپی (٦) معادل است. این دو، در قدم بعد و با فرایندی مشابه، به یک نامساوی هم‌ارز با نامساوی عام ($'۲$) دست یافتند که از لحاظ ظاهری مشابه (۱۹) بود. این نامساوی بیان می‌کند که اگر A و B زیرمجموعه‌های لبگ ـ اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^n$ واجد شرط اندازه‌پذیری $A+B$ باشند و گوی‌های باز A' و B' را چنان اختیار کنیم که $V_n(A') = V_n(A)$ و $V_n(B') = V_n(B)$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$V_n(A+B) \geq V_n(A'+B'). \qquad (۲۰)$$

کار مهم بعدی مؤلفین مزبور تحقیق درستی نامساوی برابرمحیطی کلاسیک برای حوزه‌های فشرده و محدب در $\mathbb{R}^n$ و ایده گرفتن از شباهت حاصل میان نامساوی‌های ($'۲$) و (٦) (در رسیدن به نامساوی‌های کاملاً مشابه (۱۹) و (۲۰)) جهت تعریف مساحت سطح متغیر تصادفی چندمتغیرهٔ X با چگالی به‌طور مناسب هموار $p(t)$ به‌صورت

$$S(X) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{e^{2h(X+Z_\epsilon)} - e^{2h(X)}}{\epsilon}$$

بود که در آن Z_ϵ بردار تصادفی گاوسی با ماتریس کوواریانس ϵI و مستقل از X است. کاستا و کاور سرانجام با استفاده از صورت معادل نامساوی توان آنتروپی (۱۹) به مشابه نامساوی برابرمحیطی کلاسیک برای آنتروپی رسیدند:

$$\frac{1}{n} E \frac{\| \nabla p \|^2}{p^2} \geq 2\pi e e^{-\frac{2}{n}h(X)}.$$

۲.۷. کاربرد در آمار و نظریهٔ احتمال

در سال ۱۹۵۵، اندرسون[1] [۱]، نامساوی برون ـ مینکوفسکی را در تحقیق خود پیرامون توابع تک‌مدی چندمتغیره به‌کار برد. وی نتیجهٔ اصلی خود را در قالب قضیهٔ زیر بیان نمود.

قضیه ۱۱. (اندرسون) فرض کنیم K جسمی محدب در $\mathbb{R}^n$ و متقارن نسبت به مبدأ باشد. همچنین فرض کنیم f تابعی نامنفی، متقارن و تک‌مدی باشد که بر $\mathbb{R}^n$ انتگرال‌پذیر است. در این‌صورت

1) Anderson

برای هر $0 \leq c \leq 1$ و $y \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$\int_K f(x+cy)dx \geq \int_K f(x+y)dx.$$

با استفاده از قضیهٔ اندرسون می‌توان نتیجه گرفت که اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال بر $\mathbb{R}^n$ بوده و Y متغیری تصادفی و مستقل از X باشد، آن‌گاه

$$P\{X \in K\} \geq P\{X+Y \in K\}$$

که در آن K جسمی محدب در $\mathbb{R}^n$ و متقارن نسبت به مبدأ است. اثبات قضیهٔ اندرسون به‌طور کامل وابسته است به $1/n$ ــ مقعر بودن تابع $g_{K,L}$ (یعنی مقعر بودن تابع $g_{K,L}$ به‌توان $1/n$) بر $\mathbb{R}^n$ که متناظر با اجسام محدب K و L به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{K,L}(x) = V_n(K \cap (L+x)).$$

نامساوی عام برون ــ مینکوفسکی را می‌توان برای اثبات $1/n$ ــ مقعر بودن $g_{K,L}$ بر تکیه‌گاهش به‌کار برد. برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر در مورد اثبات قضیهٔ فوق و کاربرد نامساوی عام در آن، به [۱] مراجعه کنید.

۸. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری نهایی

اگرچه پیشینهٔ تاریخی مباحث مرتبط با نامساوی برون ــ مینکوفسکی به اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم برمی‌گردد، این مبحث همچنان در زمرهٔ شاخه‌های تحقیقاتی فعال ریاضیات نوین قرار دارد. بدون شک مهم‌ترین دلیل این پویایی اتصال نامساوی برون ــ مینکوفسکی، صورت‌های معادل و گونه‌های مختلف آن به مقاصد کاربردی است. البته برای اهل ریاضیات که هیچ ادعایی را بدون اقامهٔ برهان نمی‌پذیرند، تحقیق فعال بودن این قلمروی تحقیقاتی بسیار آسان بوده و با جستجویی ساده در اینترنت می‌توان به آخرین مقالات مربوطه دست یافت. به‌عنوان نمونه‌ای از چنین مقالاتی می‌توان [۳] را نام برد.

مراجع

[1] Anderson, T. W., "The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1955), 170-176.

[2] Beckner, W., "Inequalities in Fourier analysis", *Ann. of Math.*, **102**(1975), 159-182.

[3] Borell, C., "Inequalities of the Brunn-Minkowski type for Gassian measures", *Probab. Theory Relat. Fields*, **140**(2008), 195-205.

[4] Brascamp H. J., and Lieb, E. H., "Some inequalities for Gaussian measures and the long-range order of one-dimensional plasma", *Functional Integration and its Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1975, pp. 1-14.

[5] Brascamp H. J., and Lieb E. H., "On extensions of Brunn-Minkowski and Prekopa-Liendler theorems, including inequalities for long concave functions, and with an application to the diffusion equation ", *J. Functional Anal.*, **22**(1976), 366-389.

[6] Brunn, H.,*Uber ovale und eiflachen dissertation*, Munchen, 1887.

[7] Burago Y. D., and Zalgaler V. A., *Geometric inequalities*, Springer, New York, 1988.

[8] Costa M. H. M., and Cover T. M., "On the similarity of the entropy power inequality and the Brunn-Minkowski inequality", *IEEE Trans. Information Theory*, **30**(1984), 837-839.

[9] Dancs S., and Uhrin, B., "On the conditions of equality in an integral inequality", *Pub. Math.*, **29**(1982), 117-132.

[10] Hadwiger, H., and Ohmann, D., "Brunn-Minkowskischer satz und isoperimetrie", *Math. Zeit.*, **66**(1956), 1-8.

[11] Gardner R. J., "The Brunn-Minkowski inequality", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**(2002), 355-405.

[12] Gardner R. J., "The Brunn-Minkowski inequality: A survey with proofs", available at http://www.ac.wwu.edu/ gardner. .

[13] Gardner R. J., *Geometric Tomography* , Cambridge University Press, New York, 1995.

[14] Groemer, H., "On the Brunn-Minkowski theorem ", *Geom. Dedicata*, **27**(1988), 357-371.

[15] Guo, D., and Shamai S., and Verdu S., *Proof of entropy power inequalities via MMSE*, ISIT 2006, Seattle, USA, July 9-14 (2006).

[16] Henstock, R., and Macbeath, M., "On the measure of sum-sets, I: The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik ", *Proc. London Math. Soc.*, **3**(1953), 182-194.

[17] Knothe, H., "Contributions to the theory of convex bodies", *Michigan Math. J.*, **4**(1957), 39-52.

[18] Lusternik, L. A., "Die Brunn-Minkowskische ungleichung fur beliebige messbare mengen", *C. R. Acad. Sci*, URSS **8** (1935), 55-58.

[19] Lutwak, E., "Intersection bodies and dual mixed volume", *Adv. Math.*, **71**(1988), 232-261.

[20] Osserman, R., "The isoperimetric inequality", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**(1978), 1182-1238.

[21] Schneider, R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[22] Shannon, C. E., "A Mathematical theory of communication", *Bell System Tech. J.*, **27**(1948), 623-656.

[23] Sierpinski, W., "Sur la question de la mesurabilite de la base de M. Hamel", *Fund. Math.*, **1**(1920), 105-111.

[24] Uhrin, B., "Extensions and sharpenings of Brunn-Minkowski and Bonnesen inequalities", Intuitive Geometry, Siofok, 1985, ed. by K. Boroczky and G. Fejes Toth, *Coll. Math Soc.*, 1987, 551-571.

[25] Verdu. S., and Guo, D., "A simple proof of the entropy power inequality", *IEEE Trans. Information Theory*, **52** (2006), 2165-2166.

محمدرضا میری mmiri@birjand.ac.ir
حسین حسینی گیو hossein.giv@gmail.com
دانشگاه بیرجند، گروه ریاضی
غلامرضا محتشمی برزادران gmb1334@yahoo.com
دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار