

خاصیت فقدان حافظه موضعی و ارتباط آن با نرخ شکست تناوبی

صدیقه اپرام^۱، عبدالحمید رضایی رکن آبادی^۲ و غلامرضا محتشمی برزادران^۳

چکیده

در این مقاله خاصیت ضعیف‌تری نسبت به خاصیت فقدان حافظه تحت عنوان خاصیت فقدان حافظه موضعی ارایه شده است و کلاس جدیدی از توزیع‌های طول عمر که دارای این خاصیت می‌باشند معرفی شده است، در ادامه ارتباط این خاصیت را با متغیرهای تصادفی دارای نرخ شکست تناوبی مورد بررسی قرار داده‌ایم. همان‌گونه که متناظر با خاصیت فقدان حافظه، کلاس توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست ثابت حاصل می‌شود، نشان می‌دهیم کلاس متناظر با خاصیت فقدان حافظه موضعی، توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست متناوب است. هم‌چنین در ادامه فرم تابعی توزیع‌های دارای خاصیت فقدان حافظه را معرفی کرده و به برخی قضایای مرتبط اشاره می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: خاصیت فقدان حافظه، خاصیت فقدان حافظه موضعی، نرخ شکست تناوبی.
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 62N05

۱ مقدمه

تصادفی پیوسته و گسسته، به دلیل ثابت بودن نرخ شکست و پیروی آن‌ها از خاصیت معروف فقدان حافظه^۴ (LM)، از اهمیت خاصی در قابلیت اعتماد برخوردارند. برویجن [۱]، فورنت [۷] و جورکت [۹] خاصیت LM را برای توزیع نمایی مطرح نموده و نقش آن را در دسته‌بندی توزیع‌های طول عمر بیان کردند و کران‌های احتمال مربوط به آن را تعیین نمودند. گالامبور و کتتز [۸] توزیع‌های نمایی و هندسی را بر اساس خاصیت LM مشخصه‌سازی نمودند. چکووا و دیمیترو [۲] کلاس جدیدی از توزیع‌های احتمال با عنوان توزیع‌های دارای خاصیت فقدان حافظه موضعی^۵ (ALM) را برای مدل صحیح پدیده‌هایی که دارای رفتار تناوبی‌اند معرفی کردند. چکووا و دیمیترو و خلیل [۳] توزیع‌های احتمال مشخصی را که دارای خاصیت ALM هستند معرفی نمودند. چکووا

دوره‌ای بودن در بسیاری از پدیده‌های طبیعی از قبیل رسوبات زمین‌شناسی، اتفاقات آب و هوایی و فعالیت خورشیدی امری پذیرفته شده است. بسیاری از کالاهایی مانند چاپ‌گرها که به‌طریقی دارای شرایطی تناوبی هستند نیز مطالعه توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست تناوبی را اجتناب ناپذیر می‌سازد، از این‌رو در دهه اخیر توجه تعدادی از آماردانان به این مساله معطوف شده است. در این راستا می‌توان به چکووا و دیمیترو [۲] اشاره نمود. از آنجایی که به‌عنوان حالتی حدی از توابع متناوب می‌توان به تابع ثابت اشاره کرد، نرخ شکست متناوب به‌صورت حدی همان نرخ شکست ثابت است که قبلاً به‌عنوان کلاس مهمی از خانواده توزیع‌های طول عمر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. دو توزیع نمایی و هندسی، به‌ترتیب برای متغیرهای

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، epram_113@yahoo.com

^۲ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، rezaei@math.um.ac.ir

^۳ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، gmb1334@yahoo.com

^۴ Lack of Memory

^۵ Almost Lack of Memory

حقیقی مثبت، فقط ”در دنباله‌ای از نقاط حقیقی مثبت” بیان می‌کند.

تعریف ۳ نرخ شکست متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال (جرم احتمال) $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ به صورت
$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$
 تعریف می‌شود.

نرخ شکست اندازه‌ای برای بیان روند ادامه حیات یا طول عمر موجودات زنده و غیرزنده است و در این رابطه کلاس‌های متفاوتی از متغیرهای تصادفی طول عمر تعریف شده‌اند که عمدتاً عبارت‌اند از نرخ شکست ثابت^۷ (CFR) ، نرخ شکست صعودی^۸ (IFR) ، نرخ شکست نزولی^۹ (DFR) ، نرخ شکست وان حمامی شکل^{۱۰} (BT) ، و نرخ شکست وان حمامی شکل معکوس^{۱۱} (UBT) . در این مقاله کلاس دیگری از متغیرهای طول عمر با نرخ شکست تناوبی^{۱۲} (PFR) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در عمل با موارد فراوانی از سیستم‌ها یا مولفه‌های دارای نرخ شکست تناوبی مواجه هستیم. همه کالاهایی مانند چاپ‌گرها که عملکرد آن‌ها به‌نحوی در یک روند تناوبی قرار می‌گیرد را می‌توان در این گروه قرار داد.

همان‌گونه که تناظری یک‌به‌یک بین خاصیت فقدان حافظه و کلاس CFR وجود دارد، قضیه زیر نیز ارتباط بین کلاس توزیع‌های ALM و کلاس CFR را نشان می‌دهد.

قضیه ۱ متغیر تصادفی نامنفی X دارای نرخ شکست متناوب با دوره تناوب $c \geq 0$ است اگر و تنها اگر X خاصیت ALM را بر دنباله $\{a_n = cn; n \geq 1\}$ داشته باشد.

و دیمیترو و گاریدو [۴] شرایط لازم و کافی برای آن که یک فرآیند پواسون نایستا^۱ (NPP) دارای نرخ شکست تناوبی باشد را ارائه نمودند. دیمیترو و ریکو و کروگلی و قیطانی [۵] پارامترهای توزیع‌های دارای خاصیت ALM را برآورد کردند و آزمون نسبت درست‌نمایی را برای آزمون فرض توزیع‌های دارای خاصیت ALM انجام دادند. در ادامه دیمیترو و گرین و ریکو و استن‌چو [۶] این کار را کامل‌تر کردند.

تبیین شرایطی که خاصیت ALM تنها برای دنباله‌ای از مقادیر حقیقی برقرار باشد ساختار مشابهی با دو توزیع مهم نمایی و هندسی دارد، که به شرح آن می‌پردازیم.

۲ نرخ شکست تناوبی

قبل از ادامه مباحث لازم است که به تعاریف زیر پردازیم.

تعریف ۱ متغیر تصادفی X را دارای خاصیت فقدان حافظه (LM) گوئیم هرگاه به‌ازای هر $b > 0$ ،

$$P(X \geq x + b | X \geq b) = P(X \geq x); \quad x > 0. \quad (1)$$

تعریف ۲ متغیر تصادفی X را دارای خاصیت فقدان حافظه موضعی (ALM) گوئیم هرگاه دنباله‌ای از مقادیر حقیقی مثبت $\{a_n; n \geq 1\}$ وجود داشته باشد طوری که،

$$P(X \geq x + a_n | X \geq a_n) = P(X \geq x); \quad x > 0. \quad (2)$$

در حقیقت این خاصیت را می‌توان خاصیت فقدان حافظه موضعی نامید که خاصیت فقدان حافظه را به جای ”تمام نقاط

Non-stationary Poisson Process^۱
Constant Failure Rate^۷
Increasing Failure Rate^۸
Decreasing Failure Rate^۹
Bathtub Shape^{۱۰}
Upside-down Bathtub Shape^{۱۱}
Periodic Failure Rate^{۱۲}

فرض کنید $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دو دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع به ترتیب با توابع توزیع F_X و F_Y ، باشند در این صورت متغیرهای تصادفی N و Z را برحسب آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N = \min\{n \mid X_n < Y_n, n \geq 1\},$$

$$Z = \sum_{n=1}^N \min(X_n, Y_n). \quad (3)$$

در سیستمی با طول عمر Z که از قطعات مستقل مختلف و قابل تعویض تشکیل شده است، می‌توان Y_n را به عنوان طول عمر و X_n را به عنوان مدت زمان استفاده قطعه n ام در این سیستم در نظر گرفت. قضیه زیر ارتباط توزیع متغیر تصادفی Z و دنباله متغیرهای تصادفی X_n و Y_n را بیان می‌کند.

قضیه ۳ اگر دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع Y_n دارای توزیع هندسی باشد، متغیر تصادفی Z و دنباله متغیرهای تصادفی X_n هم توزیع هستند، اگر و تنها اگر X_n ها نیز دارای توزیع هندسی باشند.

این قضیه را می‌توان با استفاده از تابع مولد احتمال متغیر تصادفی Z یعنی،

$$\psi_Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(Z = k)$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) t^k \sum_{v=k+1}^{\infty} P(Y_n = v)}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k) t^k \sum_{v=k}^{\infty} P(X_n = v)} \quad (4)$$

ثابت نمود. برای جزئیات بیشتر به خلیل و دیمیترو و دیون [۱۰] مراجعه نمایید.

مثال ۱ فرض کنید برای فیلم برداری از یک مراسم، بخواهیم از دوربین قابل حملی که با باتری کار می‌کند استفاده کنیم و طول مدت مراسم متغیر تصادفی مانند Z باشد. مراسم ممکن است آن قدر طولانی شود که چندین باتری با طول عمر

برای مشاهده اثبات این قضیه می‌توان به چکوا و دیمیترو و خلیل [۳] مراجعه نمود.

قضیه زیر ارتباط خاصیت LM در نقطه $c > 0$ و خاصیت ALM را بیان می‌کند.

قضیه ۲ اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت LM در نقطه $c > 0$ باشد، یعنی به ازای مقدار ثابت $c > 0$ ،

$$P(X \geq x + c | X \geq c) = P(X \geq x); \quad x > 0,$$

آن‌گاه X دارای خاصیت ALM بر دنباله حسابی $\{a_n = nc\}$ است.

برهان چون متغیر تصادفی X خاصیت LM را در نقطه c دارد، پس

$$P(X \geq x)P(X \geq c) = P(X \geq x + c),$$

این برابری به ازای هر $x \geq 0$ از جمله

$$x = kc, \dots, x = 2c, x = c$$

نیز برقرار است بنابراین از تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$P(X \geq kc) = (P(X \geq c))^k.$$

از طرفی به استقرا ثابت می‌شود

$$P(X \geq nc + x | X \geq nc) = P(X \geq x), \quad n \in N.$$

یعنی در حقیقت نشان دادیم، اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت LM در نقطه c باشد، دنباله‌ای چون $\{nc\}$ وجود دارد که به ازای هر $x > 0$

$$P(X \geq nc + x | X \geq nc) = P(X \geq x),$$

و این همان تعریف ALM است.

قضیه ۵ فرض کنید متغیر تصادفی Z بنا به رابطه (۳) تعریف شده باشد. اگر دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع X_n ها دارای چگالی به فرم (۵) بوده و به ازای عدد طبیعی ثابت اختیاری M داشته باشیم $P(Y_n = Mc) = 1$ ، آن گاه X_n ها و $Z = \sum_{n=1}^N \min(X_n, Y_n)$ هم توزیع خواهند بود.

برهان تابع مولد احتمال متغیر تصادفی نامنفی Z بنا به رابطه (۴) به صورت زیر است

$$\psi_Z(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k)t^k \sum_{v=k+1}^{\infty} P(Y_n = v)}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k)t^k \sum_{v=k}^{\infty} P(X_n = v)}$$

اگر Y_n دارای توزیع تباہیده در نقطه b باشد آن گاه

$$P(Y_n = y) = \begin{cases} 0 & y \neq b \\ 1 & y = b \end{cases}$$

بنابراین اگر $k = 0, 1, \dots$ و $b \geq k + 1$ باشد، در این صورت

$$\sum_{v=k+1}^{\infty} P(Y_n = v) = P(Y_n = b) = 1,$$

لذا صورت کسر $\psi_Z(t)$ معادل با $\sum_{k=0}^{b-1} P(X_n = k)t^k$ است و به تشابه در مخرج کسر

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k)t^k \sum_{v=k}^{\infty} P(X_n = v) = t^b \sum_{v=b}^{\infty} P(X_n = v),$$

و در این حالت مخرج کسر برابر با $1 - t^b \sum_{v=b}^{\infty} P(X_n = v)$ می باشد. پس نشان دادیم اگر متغیر تصادفی Y_n دارای توزیع تباہیده در نقطه b باشد آن گاه

$$\psi_Z(t) = \frac{\sum_{k=0}^{b-1} P(X_n = k)t^k}{1 - t^b \sum_{v=b}^{\infty} P(X_n = v)}, \quad (6)$$

حال کافی است نشان دهیم تابع مولد احتمال دنباله متغیرهای تصادفی X_n ها و Z هر دو به فرم (۶) هستند و این موضوع نیز با توجه به چگالی X_n ها که در صورت قضیه معرفی شده است به سادگی حاصل می گردد.

ثابت c به طور کامل مورد استفاده قرار گرفته و تنها بخشی از باطری آخر مصرف شود و متغیر تصادفی N را شماره آخرین باطری مورد استفاده بنامیم، با فرض آن که X_i مدت زمانی از مراسم باشد که با استفاده از باطری i ام فیلم برداری شده است، در این صورت بدیهی است اگر هیچ اطلاعی از طول مدت مراسم نداشته باشیم X_1, \dots, X_N متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع بوده و داریم

$$Z = \sum_{n=1}^N \min(X_n, Y_n = c) = (N - 1)c + X_N,$$

که در آن

$$N = \min\{n \mid X_n < c, \quad n \geq 1\}.$$

قضیه زیر که برای اثبات آن می توان به چکوا و دیمینترو و خلیل [۳] مراجعه نمود، فرم تابعی توزیع های احتمال گسسته دارای خاصیت LM را در حالت کلی معرفی می کند.

قضیه ۴ متغیر تصادفی X دارای خاصیت LM در نقطه $c > 0$ است اگر و تنها اگر چگالی آن به فرم زیر باشد

$$P_X(nc + k) = \alpha^n (1 - \alpha) q_k ;$$

$$k = 0, 1, \dots, c - 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

که در آن

$$\alpha \in (0, 1), \quad q_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{c-1} q_k = 1.$$

شایان ذکر است توزیع هندسی به کلاس توزیع های به فرم (۵) تعلق دارد. زیرا با قرار دادن $\alpha = \beta^c$ و $q_k = \frac{\beta^k(1-\beta)}{1-\beta^c}$ در فرم (۵)، توزیع هندسی با پارامتر β حاصل می شود.

که معادل با $\psi_Z(t)$ است لذا نتیجه مطلوب از یکتایی تابع مولد احتمال حاصل می‌گردد.

قضیه ۶ متغیر تصادفی Z دارای خاصیت LM در نقطه c است اگر و تنها اگر بتوان آن را به فرم $Z = X_c + cT$ تجزیه کرد، که در آن X_c متغیر تصادفی مستقل با تکیه‌گاه $[0, c]$ و T دارای توزیع هندسی روی مقادیر صحیح نامنفی است.

با فرض آن که در قضیه ۳ متغیر تصادفی T دارای توزیع هندسی با پارامتر α باشد $T \sim Ge(\alpha)$ ، به سادگی می‌توان نشان داد برآورد گشتاوری پارامتر این توزیع به صورت $\hat{\alpha} = \frac{\bar{Z} - \bar{X}}{c + \bar{Z} - \bar{X}}$ است.

مثال (۱) رامجددا یادآور می‌شویم.

بدیهی است در آن مثال $(N-1)$ دارای توزیع هندسی روی مقادیر صحیح نامنفی با احتمال موفقیت α است که در آن احتمال آن است که یک باطری به‌طور کامل مصرف نشود. بنابراین شرایط قضیه (۶) در این مثال برقرار بوده و Z دارای خاصیت LM در نقطه c است و بنابه قضایای ذکر شده Z دارای خاصیت ALM نیز می‌باشد.

۳ نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

نکاتی در مورد خاصیت فقدان حافظه موضعی و ارتباط آن با نرخ خرابی به‌عنوان شروع بحث در این نوشتار مطرح شد. شایان ذکر است که ویژگی‌های قابلیت اعتماد در توزیع‌های با نرخ شکست تناوبی از قبیل میانگین باقی مانده عمر و برآورد دوره تناوب می‌تواند مورد توجه علاقه‌مندان به این مبحث قرار گیرد. علاوه بر آن مباحث استنباط آماری از جمله آزمون فرض توزیع‌های دارای خاصیت ALM و برآورد پارامترها، می‌تواند از جمله مسیر آینده تحقیق باشد.

نتیجه ۱ اگر در قضیه بالا $M = 1$ باشد و X_n ها با Z هم‌توزیع باشند، آن‌گاه تابع چگالی دنباله متغیرهای تصادفی X_n در حالت گسسته به فرم (۵) می‌باشد.

برهان از فرض قضیه نتیجه می‌شود $Z = (N-1)c + X_N$ و چون N دارای توزیع هندسی با احتمال موفقیت $1 - \alpha = P(X < c)$ است و X_N و N مستقل از یکدیگرند، داریم

$$\psi_Z(t) = \psi_{(N-1)c}(t) \psi_{X_N}(t),$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \psi_{(N-1)c}(t) &= E(t^{(N-1)c}) & (7) \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} t^{(N-1)c} (1-\alpha)\alpha^{N-1} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} t^{Nc} (1-\alpha)\alpha^N \\ &= (1-\alpha) \sum_{N=0}^{\infty} (\alpha t^c)^N \\ &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha t^c}, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\psi_Z(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha t^c} \psi_{X_N}(t).$$

نهایتاً اگر چگالی متغیر تصادفی X_n به فرم (۵) باشد، آن‌گاه تابع مولد احتمال X_n عبارت است از

$$\begin{aligned} \psi_{X_n}(t) = E(t^{X_n}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{c-1} \alpha^n (1-\alpha) q_k t^{nc+k} \\ &= (1-\alpha) \sum_{k=0}^{c-1} q_k t^k \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha t^c)^n \\ &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha t^c} \sum_{k=0}^{c-1} q_k t^k \\ &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha t^c} \psi_{X_N}(t), \end{aligned}$$

مراجع

- [1] BRUIJN, N. G. (1966), *On almost additive functions*. Colloqu. Math., 15:59-63.
- [2] CHUKOVA, S. and DIMITROV, B. (1992), *On distributions having the almost-lack-of-memory property*. J. Appl. Prob., 29, 691-698.
- [3] CHUKOVA, S., DIMITROV, B. and KHALIL, Z. (1993), *A characterization of probability distributions similar to the exponential*. The Canadian Journal of Statistics, Vol. 21, No. 3, 269-276.
- [4] CHUKOVA, S., DIMITROV, B. and GARRIDO, J. (1993), *Renewal non-homogeneous Poisson processes generated by distribution with periodic failure rates*. Stat. Prob. Lett., Vol. 7, No. 5, 19-25.
- [5] DIMITROV, B.N., RYKOV, V.V., KROUGLY, Z.L. and GHITANY, M.E. (2003), *On Properties and Statistical Estimation of ALM Distribution*. Hawaii Int. Conf. Statistics and Related Fields, Honolulu.
- [6] DIMITROV, B.N., GREEN, D., RYKOV, V.V. and STANCHEV, P. (2003), *On statistical hypothesis testing via simulation method*. Inter. J. Information Theories and Appl., Vol. 10, 408-414.
- [7] FORTET, R. (1977), *Elements of Probability Theory*. New York: Gordon and Breach.
- [8] GALAMBOS, J. and KOTZ, S. (1978), *Characterizations of Probability Distributions: A unified approach with an emphasis on exponential and related models*. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- [9] JURCAT, W. B. (1965), *On Cauchy's functional equation*. Proc. Amer. Math. Soc., 16: 683-686.
- [10] KHALIL, Z., DIMITROV, B. and DION, J.P. (1991), *A characterization of the geometric distribution related to random sums*. Comm. Statist. Stoch. Models, 7, 321-326.