



تحلیل غیرخطی استاتیکی قابهای خمشی با بکارگیری فنرهای مجازی

احمد شوشتری¹، رضا خواجهوی²

1- استادیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران

2- دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران

ashoosht@ferdowsi.um.ac.ir

خلاصه

طراحی ساختمانهای فولادی و بتنی، با چشم پوشی از دامنه مومسانی، از دیدگاه مهندسی، هرگز به صرفه نیست، به ویژه آن جا که بارهای عظیم لرزه ای هم در میان باشند. بدین ترتیب، انجام تحلیلهای غیرخطی، که اثرات ناکشسانی مصالح را منظور کنند، چه استاتیکی (مانند تحلیل بار افزون Pushover) و چه دینامیکی، بسیار ارزشمند است. سالیانی است که پژوهشگران، شیوه های گوناگونی را برای الگوسازی رفتار ناکشسانی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه های فولادی و به ویژه بتنی پیشنهاد می دهند. از آن میان می توان الگوی پرکاربرد عضو قابی با مفصل مومسانی متمرکز، و همچنین، عضو قابی با مومسانی پیش رونده (گسترده) را بر شمرد. هر یک از این روشها دارای برتری ها، و البته کاستی هایی می باشند. در این پژوهش، شیوه ای نوین برای برپاسازی ماتریس سختی کشسان - مومسان عضوهای قابی، بر پایه روش مفصل مومسانی متمرکز جهت بکارگیری در تحلیل استاتیکی غیرخطی پیشنهاد شده است، که در آن، به جای بستن فنرها یا همان مفصل های مومسانی به درجه های آزادی دورانی، فنرهای مجازی در حالت های کرنشی مناسبی از عضو قابی جاسازی می شوند. شیوه پیشنهادی برای تیر اولر - برنولی پیاده سازی شده، و توانایی ماتریس سختی کشسان - مومسان عضو قابی به دست آمده برای ساده سازی فرآیند تحلیل استاتیکی غیرخطی بررسی شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل استاتیکی غیرخطی، حالت کرنشی، عضو قابی، فنر مجازی، مفصل مومسانی.

1. مقدمه

پیشرفت های نوین در زمینه سخت افزار و نرم افزار رایانه ای، مهندسان سازه را بر آن داشته تا برای طراحی بهینه تر ساختمان ها، به ویژه در برابر بارهای لرزه ای، از روش هایی کارآتر چون طراحی بر مبنای عملکرد بهره جویند. چنین روش های طراحی، بر پایه تحلیل های پیچیده تری استوارند که اثر رفتار غیر خطی مصالح را نیز در نظر می گیرند. روش های تحلیل استاتیکی غیرخطی (بار افزون Pushover) و تحلیل های دینامیکی غیرخطی نمونه هایی از این تحلیل های پیشرفته اند، که به کارگیری آنها، تحلیلگران را تا اندازه ای از انجام ساده سازی ها در فرآیند تحلیل و طراحی بی نیاز کرده است.

در تحلیل غیرخطی مواد یا کشسان - مومسان، دو رویکرد بنیادی وجود دارد. در رویکرد نخست، متغیرهای اصلی نقش آفرین، تنش ها هستند، و از همین رو، روش های گرد آمده در این دسته را با نام رابطه سازی های تنش می شناسند. رابطه سازی تنش، همان روش اجزای محدود مومسانی است، که می توان آن را دقیق ترین روش دانست. در این شیوه رابطه سازی، نمودار تنش - کرنش مصالح، در حالت های بارگذاری و باربرداری، به طور مستقیم به کار می آید. بزرگترین کاستی این رویکرد تحلیلی، نیاز آن به پردازش حجم گسترده ای از داده ها و زمانبری و هزینه بالای آن است، که کاربرد آن را برای تحلیل ساختمان های طبقاتی، ناشدنی کرده است.

رویکرد دوم، با نام رابطه سازی برآیند تنش ها شناخته می شود، که در آن، متغیرهای اصلی، نیروها (و لنگرها) داخلی (برآیند تنش ها) هستند. در روش های تحلیلی این دسته، برآیندی از رفتار کشسان - مومسان مقطع عضو به کار گرفته می شود. از همین روست که نیروها و لنگرهای داخلی به جای تنش ها به کار می آیند. پیداست که روش های این رویکرد، نمی توانند نمودارهای تنش - کرنش را به طور مستقیم به کار گیرند، و رفتار مومسانی، باید در چارچوب نیروها و لنگرهای داخلی الگوسازی گردد [1].



روش های گوناگونی برای الگوسازی رفتار کشسان - مومسان عضو های قابی، با بهره گیری از رویکرد دوم پیشنهاد شده است. در ساده ترین شیوه، فرآیند مومسانی شدن عضو قابی را تنها در گره هایی از سازه متمرکز می کنند. این کار با جاسازی مفصل های مومسانی به درازای صفر در آن گره ها انجام می پذیرد. بیشتر، این مفصل ها در دو سر عضو جای می گیرند، و به صورت سری، به درجه های آزادی گره های دو سر بسته می شوند [2]. گفتمنی است، این شیوه تحلیل، به دلیل سادگی، زمانبری و هزینه اندک، در سنجش با دیگر شیوه ها، کاربرد فراوان تری در تحلیل های کشسانی - مومسانی ساختمانهای طبقاتی پیدا کرده است، و بیشتر پژوهش ها در زمینه تحلیل های ناکشسانی قاب ها نیز این شیوه را برای بررسی برگزیده اند. در این مقاله نیز از همین رویکرد برای برپاسازی قالب عضو تیر خمشی بهره جسته می شود.

در این پژوهش، شیوه نوینی برای برپاسازی ماتریس سختی کشسان - مومسان عضو های قابی با بهره جویی از روش مفصل های مومسانی پیشنهاد شده است. این شیوه بر پایه شناسایی حالت های کرنشی گوناگون جزء انجام می پذیرد، و همان گونه که در ادامه خواهد آمد، به جای کارگذاری فنرهای مومسانی در درجه های آزادی دورانی دو سر عضو قابی، فنرهای مجازی در حالت های کرنشی مناسب عضو جاسازی می شوند. پیش از پرداختن به شیوه پیشنهادی، نگاهی گذرا بر حالت های کرنشی جزء محدود خواهیم انداخت، و چگونگی ساخت ماتریس سختی کشسان تیر خمشی را در دستگاه پایه حالت های کرنشی بررسی خواهیم کرد. آن گاه، با گسترش این مفهوم به فضای مومسانی، ماتریس سختی کشسان - مومسان جدیدی را با سه ضریب سختی را معرفی می نمایم، و از آن، در بهینه و ساده سازی تحلیل ایستایی غیرخطی استفاده خواهیم نمود.

2. ماتریس سختی کشسانی در فضای حالت های کرنشی

در فرآیند ساماندهی ماتریس سختی کشسانی تیر اولر - برنولی، می توان به جای بهره گیری از تابع های شکل آشنای هرمیتی، تابع های پایه زیر را برگزید [3]:

$$N_q = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ماتریس نگاشت G با جایگذاری مختصه x دو گره، $-L/2$ و $L/2$ ، در تابع های پایه و مشتق آنها ساخته می شود:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -L/2 & L^2/8 & -L^3/48 \\ 0 & 1 & -L/2 & L^2/8 \\ 1 & L/2 & L^2/8 & L^3/48 \\ 0 & 1 & L/2 & L^2/8 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ستون های این ماتریس بردارهای پایه حالت های کرنشی جزء تیر خمشی اند. نمایش آنها در شکل (1) آمده است. وارون این ماتریس را H می نامیم. برای ساخت ماتریس سختی عضو تیر خمشی، در دستگاه حالت های کرنشی نشان داده شدن در شکل (1)، در گام نخست، ماتریس کرنش - حالت کرنشی B_q پیدا می شود:

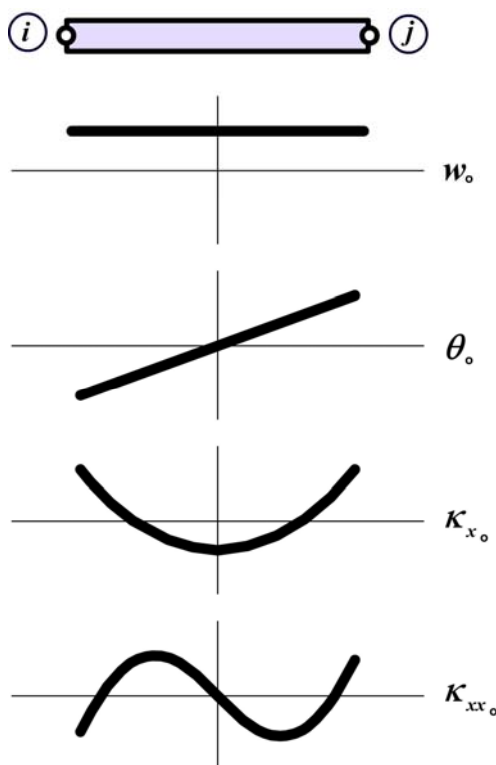
$$B_q = \frac{d^2}{dx^2} N_q = \begin{bmatrix} B_{q1} & B_{q2} & B_{q3} & B_{q4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (3)$$

با بهره جویی از این ماتریس، می توان ماتریس سختی جزء محدود تیر خمشی را در دستگاه حالت های کرنشی برپا کرد:

$$K_q = \int_V B_q^T D_m B_q dV = \int_{-L/2}^{L/2} B_q^T (EI) B_q dx$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & EI & \\ & & & \frac{EI L^3}{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

نام این ماتریس سختی قطری، با وام گیری از واژگان حساب تانسورها، ماتریس سختی اصلی نهاده می شود. هر یک از درایه های قطر اصلی ماتریس (4)، ویژه سختی نامیده می شوند [4]. هر ویژه سختی، نماینده اندازه سختی عضو تیر خمشی در برابر پیدایش حالت کرنشی همتای آن است. روشن



شکل 1 - نمایش حالت‌های کرنشی جزء تیر خمشی اولر - برنولی

است، عضو تیر خمشی در برابر هر یک از دو حالت جابجایی یا دوران جسم سخت، تغییرشکلی پیدا نکرده، سختی از خود نشان نمی دهد. از همین روست که ویژه سختی های همتای این دو حالت کرنشی برابر صفرند.

3. ماتریس سختی کشسان مومسان تیر خمشی

برای ساخت ماتریس سختی کشسان مومسان تیر خمشی با بهره جویی از روش مفصل های مومسانی متمرکز، فنرهای مومسانی در درجات آزادی دورانی دو سر عضو جاسازی می شوند [5]. در این مقاله، برای ساخت قالب کشسان مومسان جزء تیر خمشی، به جای جاسازی فنرهای مومسانی در درجه های آزادی دورانی، فنرهایی مجازی به درجه های آزادی همتای حالت های کرنشی ناصفر انحنای ثابت K_{x_0} ، و انحنای خطی K_{xx_0} ، بصورت سری بسته می شوند. این کار با افزودن وارون ماتریس سختی (ماتریس نرمی) اصلی کشسان عضو تیر خمشی، به وارون ماتریس سختی فنرهای مومسان حالت های کرنشی انجام می پذیرد، تا ماتریس نرمی کشسان مومسان عضو در دستگاه پایه حالت های کرنشی به دست آید. ماتریس سختی کشسان مومسان حالت های کرنشی، وارون این ماتریس نرمی خواهد بود:

$$K_{qep} = (K_{q_e}^{-1} + K_{q_p}^{-1})^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} EIL & 0 \\ 0 & \frac{EIL^3}{12} \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p12} & k_{p22} \end{bmatrix}^{-1} \right)^{-1} \quad (5)$$

در ساماندهی رابطه بالا، دو نکته مورد توجه قرار گرفته است. نخست آن که در روند رابطه سازی، ویژه سختی های صفر همتای جابجایی و دوران جسم سخت کنار گذاشته شده اند، تا فرآیند وارون سازی ماتریس ها به درستی انجام پذیرد. دوم آن که ماتریس سختی مومسان همتای حالت های کرنشی پنداشته شده شکل (1) الزاماً قطری نیست. به سخن دیگر، قطری بودن ماتریس سختی عضو تیر خمشی برای این حالت های کرنشی، تنها در فضای کشسانی پذیرفتنی است [6,7]، و در فضای مومسانی، این ویژگی همیشگی نیست.



با بهره جویی از یک تحلیل ابعادی ساده می توان ماتریس سختی مومسان عضو تیر خمشی را در دستگاه حالت های کرنشی، بر پایه شناسه های کشسانی آن بازنوشت:

$$K_{q_p} = \begin{bmatrix} k_{p_{11}} & k_{p_{12}} \\ k_{p_{12}} & k_{p_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a EIL & b EIL^2 \\ b EIL^2 & c EIL^3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

a, b, و c ضریب های عددی در ماتریس سختی مومسانی هستند. با جایگذاری این رابطه در رابطه (5)، ماتریس سختی اصلی کشسان مومسان تیر خمشی، با چشم پوشی از حالت های کرنشی جابجایی و دوران جسم سخت، چنین خواهند شد:

$$K_{q_{ep}} = \begin{bmatrix} \frac{-12c^2 + a(12b+1)}{12(1+a)b - 12c^2 + 1 + a} EIL & sym. \\ \frac{c}{12(1+a)b - 12c^2 + 1 + a} EIL^2 & \frac{(b+ab-c^2)}{12(1+a)b - 12c^2 + 1 + a} EIL^3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

این ماتریس را می توان به نمایش ساده زیر در آورد:

$$K_{q_{ep}} = \begin{bmatrix} \alpha EIL & \gamma EIL^2 \\ \gamma EIL^2 & \beta EIL^3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

با افزودن ویژه سختی صفر همتای جابجایی و دوران جسم سخت، ماتریس سختی اصلی کشسان مومسان عضو تیر خمشی همانند زیر به دست خواهد آمد:

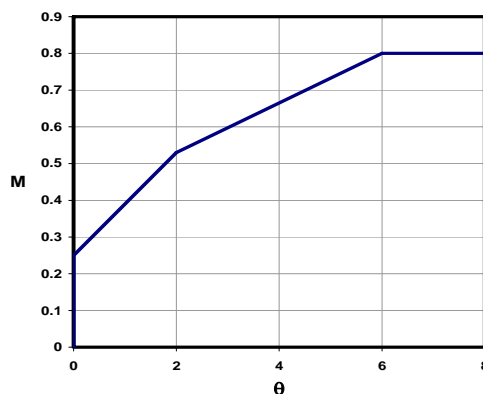
$$K_{q_{ep}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \alpha EIL & \gamma EIL^2 & \\ & & \gamma EIL^2 & \beta EIL^3 & \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس سختی کشسان مومسان عضو تیر خمشی با بهره جویی از نگاشت زیر به دست خواهد آمد [4]:

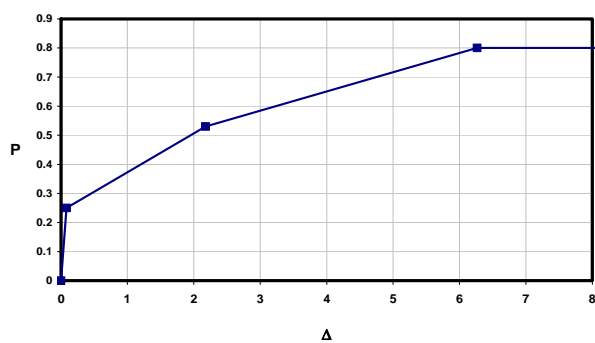
$$K_{ep}(\alpha, \beta, \gamma) = H^T K_{q_{ep}}(\alpha, \beta, \gamma) H \quad (10)$$

4. بهینه سازی تحلیل غیرخطی استاتیکی با بکارگیری قالب

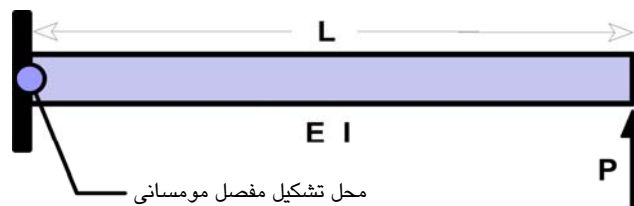
از ماتریس سختی کشسان مومسان تیر خمشی رابطه (10) می توان برای بهینه سازی تحلیل و ساخت جزءهای با کارآیی بالا بهره جست. در این بخش، کارآمدی ماتریس سختی پیشنهادی در ساده سازی فرآیند تحلیل غیرخطی استاتیکی نشان داده می شود. چنین انگاشته می شود که رفتار حقیقی مومسانی عضو تیر خمشی با پدیداری مفصل های مومسانی در گره های لبه ای، با کارکردی همانند آن چه در شکل (2) آمده است، الگوسازی شود. تحلیل ایستایی غیرخطی این تیر با تکیه گاه یکسر گیردار و شناسه های $E=1$ ، $L=1$ ، و $I=1$ ، همانند شکل (3)، نمودار نیرو تغییر مکان شکل (4) را به دست می دهد. چنین می پنداریم که این نمودار نمایانگر رفتار حقیقی کشسانی مومسانی این تیر، با افزایش بار در سر آزاد باشد.



شکل 2- نمودار لنگر - دوران مفصل مومسان حقیقی



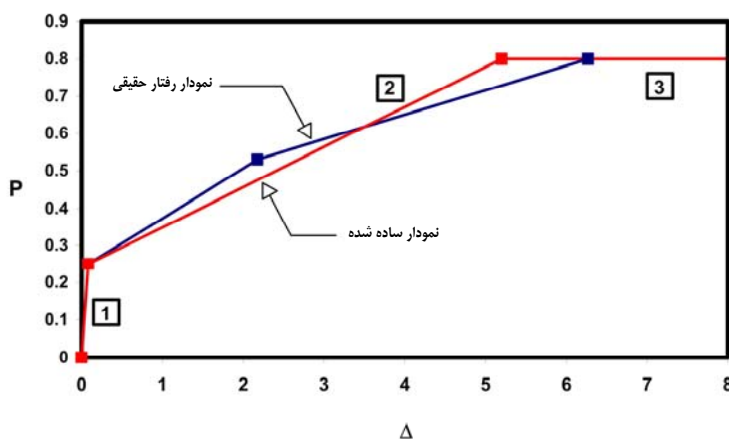
شکل 4- نمودار بار - تغییر مکان تیر یکسر گیردار با مفصل مومسانی حقیقی



شکل 3- تیر یکسر گیردار کشسان مومسان

اکنون، در جهت ساده سازی فرآیند تحلیل، نمودار چهار قطعه ای شکل (4) با یک نمودار سه قطعه ای جایگزین می شود. این درونیایی که در شکل (5) نشان داده شده، به گونه ای انجام پذیرفته است که سطح زیر دو نمودار، که نماینده ای از انرژی داده شده به عضو است، برابر باشند. فرآیند بهینه یابی، عامل های آزاد ماتریس سختی جزء تیر خمشی رابطه (10) را، بر پایه این درونیایی تازه، برای هر یک از سه قطعه، برابر زیر به دست می دهد:

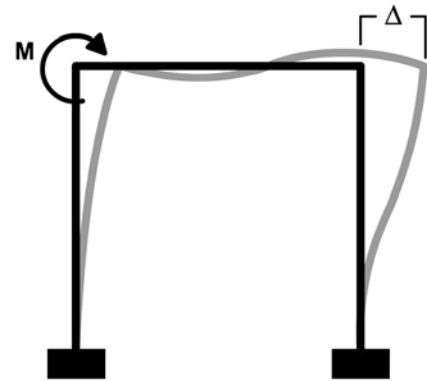
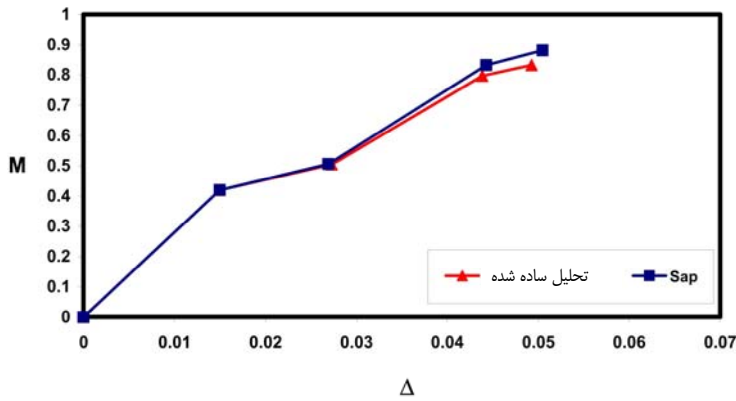
$$\begin{aligned}
 \text{Sec. 1} & : \quad \alpha = 1 & \beta = 0.08333 & \gamma = 0 \\
 \text{Sec. 2} & : \quad \alpha = 0.65 & \beta = 0.02 & \gamma = \pm 0.105 \\
 \text{Sec. 3} & : \quad \alpha = 0 & \beta = 0 & \gamma = 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$



شکل 5- نمودارهای رفتار حقیقی و تقریبی تیر یکسر گیردار

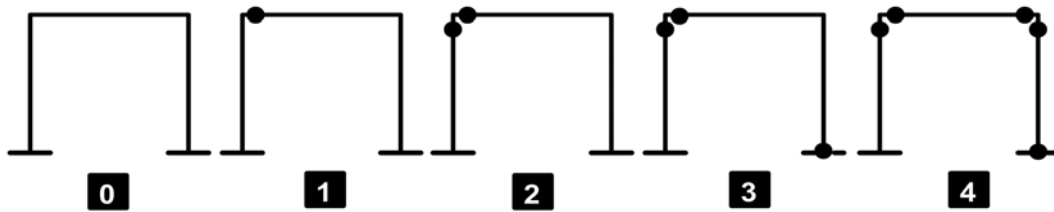
تحلیل کشسانی مومسانی قاب پرتال شکل (6)، با به کارگیری ضریب های سختی بالا، نمودار لنگر - تغییر مکان را به گونه مناسبی، آن گونه که در شکل (7) نشان داده شده است، به دست می دهد. همچنین، تحلیل کشسانی مومسانی ساده شده، ترتیب پدیداری مفصل های مومسانی را درست همانند آن چه از تحلیل SAP2000 به دست می آید، شکل (8)، پیش بینی می کند.

اکنون و در نمونه ای دیگر، با بهره جویی از ماتریس سختی کشسان مومسان ساده شده، قاب پرتال یک دهانه و یک طبقه، که دارای سختی های متفاوت اعضا، همانند شکل (9) می باشد، تحلیل، و با پاسخ های درست سنجیده می شود. فرآیند تحلیل، به پاسخ هایی همانند شکل (10) خواهد انجامید.

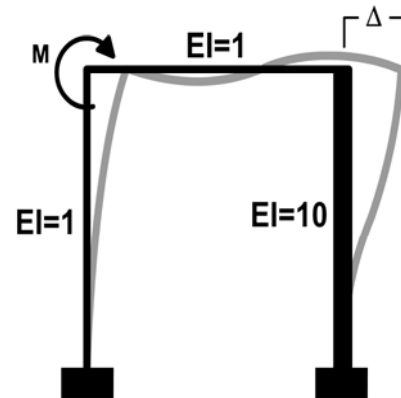
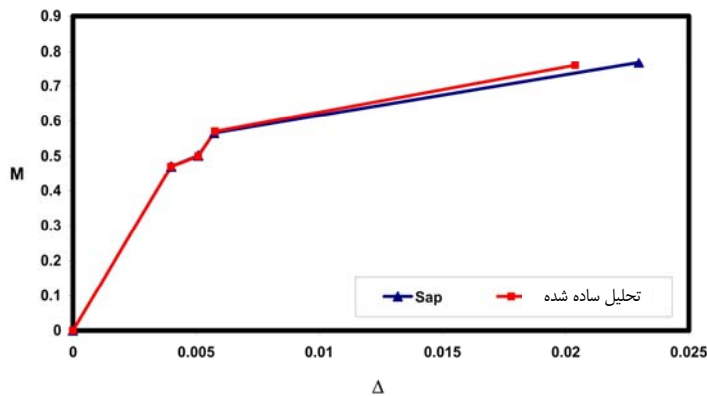


شکل 6- قاب پرتال با لنگر خارجی

شکل 7- مقایسه نمودارهای لنگر- تغییر مکان روش تقریبی و SAP



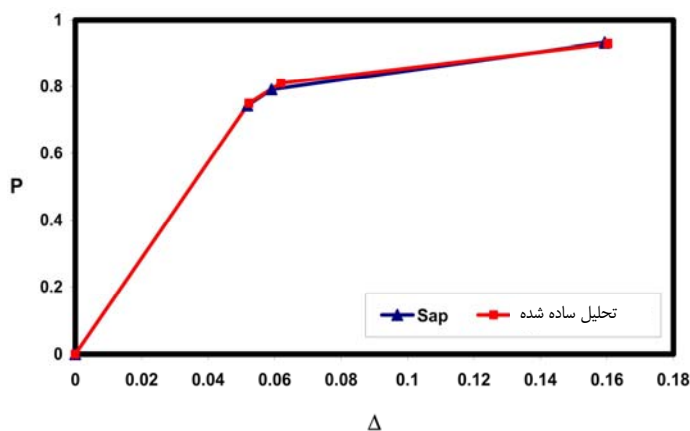
شکل 8- ترتیب تشکیل مفصل های مومسانی بر پایه تحلیل تقریبی ساده شده و SAP



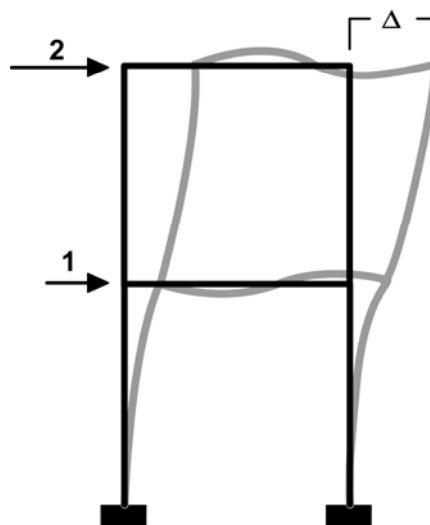
شکل 10- مقایسه نمودارهای نیرو - تغییر مکان روش تحلیلی تقریبی و SAP

شکل 9- قاب پرتال با سختی های متفاوت اعضا

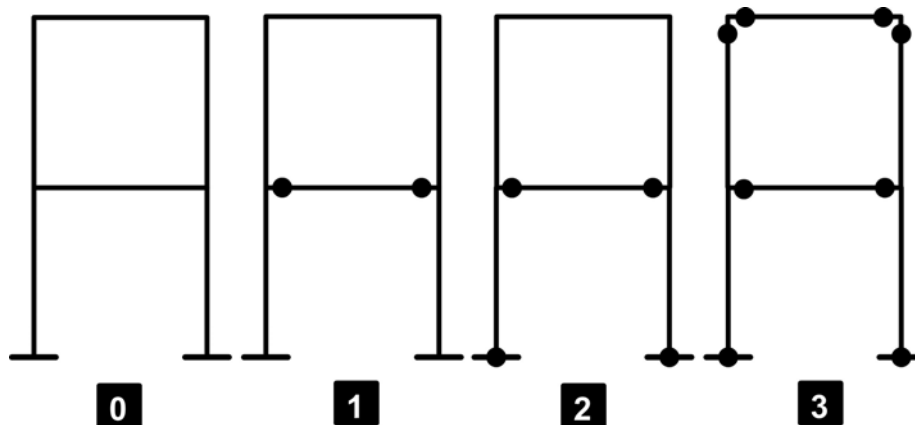
در نمونه ای دیگر، از ماتریس سختی ساده شده برای تحلیل قاب دو طبقه و یک دهانه شکل (11)، که همه اعضای آن دارای ضریب مومسانی، لنگر لختی و دارازای یکه هستند، بهره جسته شده است. همان گونه که از شکل (12) بر می آید، ماتریس سختی ساده و بهینه شده به خوبی توانسته است پاسخ های درست تحلیل را رهگیری نماید. همچنین، این تحلیل، ترتیب پدیداری مفصل های مومسانی را، آن گونه که در شکل (13) آمده است، به درستی پیش بینی می کند.



شکل 12-مقایسه نمودارهای نیرو - تغییر مکان روش تحلیلی تقریبی و SAP



شکل 11-قاب پرتال دو طبقه یک دهانه



شکل 13- ترتیب تشکیل مفصل های مومسانی با تحلیل تقریبی و SAP

5. نتیجه گیری

پژوهش کنونی، شیوه ای نو را در برپاسازی ماتریس سختی کشسان - مومسان عضوهای قابی، با الهام گرفتن از روش آشنای مفصل های مومسانی متمرکز، پیشنهاد کرده است. در این شیوه، فنرهای مومسانی مجازی در حالت های کرنشی عضو جای می گیرند. با این کار، امکان الگوسازی گونه های مفصل های خمشی و برشی به گونه ای درست، و بدون آن که حالت های جابجایی و دوران جسم سخت عضو کارمابه دار شوند، فراهم می شود. همچنین این روش می تواند پایه ای برای ساخت ماتریس های سختی با امکان الگوسازی مفصل های مومسانی در هر گره ای از عضو قابی، و نه فقط گره های دو سر آن باشد. نکته مهم دیگر درباره شیوه پیشنهادی این است که می توان آن را به آسانی به گونه های دیگر جزءهای محدود، و از آن میان صفحه و پوسته نیز گسترش داد. همچنین شیوه کنونی، راهکاری نظام مند را برای یافتن سختی فنرهای مومسانی پیشنهاد می کند. این کار، با اعمال حالت های کرنشی مناسب به عضو و اندازه گیری تغییرشکل های مومسانی انجام می پذیرد. در این پژوهش، روش پیشنهادی برای جزء محدود تیر اولر - برنولی به کار رفته، و ماتریس سختی کشسان مومسان تیر خمشی با سه ضریب سختی به دست آمده است. از این ماتریس سختی می توان برای ساده سازی فرآیند تحلیل استاتیکی غیرخطی مواد استفاده کرد. نمونه ای از این ساده سازی تحلیل با بهره گیری از یک گزینه بهینه سازی انجام گرفته بر روی ضریب های ماتریس سختی کشسان مومسان، در این مقاله آورده شده است، و نتایج تحلیل با پاسخ های درست، که از تحلیل SAP به دست آمده،



سنجیده شده اند. روند کار، توانمندی و کارآیی قالب را در تحلیل کشسان مومسان قابها نشان می دهد. ماتریس سختی کشسان مومسان ساده و بهینه سازی شده به خوبی توانسته است نمودار بار افزون را برای نمونه قاب های گوناگون مورد بررسی به درستی و بسیار نزدیک به نمودار حقیقی رصد کند. همچنین این ماتریس سختی به دست آمده برای عضو قابی، در پیش بینی ترتیب رخداد مفصل های مومسانی نیز بدون هیچ گونه اشتباه بوده است.

6. مراجع

1. Ren, W. X. and Tan X., Zheng Z., (1999), "Nonlinear Analysis of Plane Frames Using Rigid Body-Spring Discrete element method", Computers and Structures, **71**, pp. 105-119.
2. Elsiwat, J., (1993), "Effect of Anchorage Slip and Inelastic Shear on Seismic Response of Reinforced Concrete Frames", Pd.D Assertion, University of Ottawa, Canada.
3. Dow, John O., (1999), "A Unified Approach to The Finite Element Method and Error Analysis Procedures", Academic Press.
4. رضا خواجوی، (1383)، "پاره سازی ماتریس سختی و قالب اصلی جزء محدود"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی گروه عمران، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران.
5. سید مهدی ارفعی شهیدی زاده، (1381)، "بررسی پایداری قابهای دوبعدی با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مواد"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.
6. Felippa, C. A., (2001), "Customizing High Performance Elements by Fourier Methods", TRENDS IN COMPUTATIONAL STRUCTURAL MECHANICS CIMNE, Barcelona, Spain.
7. Felippa, C. A., (2003), "A Template Tutorial", delivered in Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria (CIMNE), Barcelona, Spain.