

حل معادله آبهای کم عمق در تبدیل ها با استفاده از روش شبکه تطبیقی

ابراهیم علامتیان، محمد رضا جعفرزاده

دانشجوی کارشناسی ارشد عمران، گرایش سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه فردوسی مشهد EB_AL5@Stu-mail.um.ac.ir
دانشیار گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد Jafarzad@Ferdowsi.um.ac.ir

چکیده

برای آنالیز جریان در تبدیل های عریض شونده و تنگ شونده باید معادله دیفرانسیل حاکم که بصورت دو بعدی و نا ماندگار می باشد حل شود. برای بدست آوردن نتایج بهتر باید تعداد گره ها را در فضای فیزیکی افزایش داد. ولی افزایش بیش از حد تعداد گره ها باعث زیاد شدن خطای قطع و همچنین طولانی شدن مدت زمان حل می گردد. در این تحقیق با استفاده از تکنیک متحرک کردن گره ها، آرایش گره ها در هر گام زمانی با توجه به خطای ایجاد شده ناشی از حل عددی اصلاح می گردد. در این راستا برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره ها، راهکار جدیدی بوسیله نویسندگان ارائه شده است. نتایج بدست آمده از این تحقیق نشان می دهد که تراکم گره ها در محل هایی که تغییرات پارامترهای هیدرولیکی زیاد است بیشتر می باشد. همچنین نتایج این روش همخوانی بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد و سرعت میل به جواب را افزایش می دهد.

واژه های کلیدی: تبدیل، شبکه تطبیقی، سرعت در گره ها

مقدمه

تبدیل، سازه هیدرولیکی کوتاهی است که برای تغییر سطح مقطع جریان مورد استفاده قرار می گیرد. هیندز (Hinds, 1928) و راوز (Rouse, 1951) از نخستین کسانی بودند که جریان در تبدیل ها را بررسی کردند. سوامی و همکاران (Swamee et al., 1992) و همچنین رحمان و چاودری (Rahman & Chadhary, 1997) نیز در سال های اخیر جریان در تبدیل ها را مورد مطالعه قرار داده اند.

برای تحلیل عددی جریان در تبدیل ها باید معادلات دیفرانسیل آبهای کم عمق با در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه مورد نظر حل شود. برای این منظور فضای حل شبکه بندی می گردد. هر چند که افزایش تعداد گره ها در فضای حل منجر به کاهش خطای قطع می شود اما افزایش بیش از

$$s_{f_i} = \frac{um^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{R^{1.333}} \quad s_{f_i} = \frac{vm^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{R^{1.333}} \quad (۲)$$

$n =$ ضریب زبری مانینگ، $R =$ شعاع هیدرولیکی مقطع جریان، m .

تطبیق شبکه

رای و اندرسون (Rai & Anderson, 1982) روشی را برای تخمین سرعت در گره ها با استفاده از خطای ایجاد شده از روش عددی، معرفی نمودند. در این روش، هنگامی که خطا در یکی از گره ها از متوسط میزان خطا در کل فضای محاسباتی بیشتر شود، آن گره به گره های مجاور نزدیک می گردد و هنگامی که خطا در گره مورد نظر کمتر از متوسط خطای کل فضای محاسباتی باشد، آن گره از گره های مجاور دور می شود. این روش اصطلاحاً بنام روش جذبی-دفعی نیز نامیده می شود. اگر دستگاه مختصات (X, Y) در فضای فیزیکی و (ξ, η) در فضای محاسباتی در نظر گرفته شود، رای و اندرسون، معادله سرعت گره ها را در حالت دو بعدی بصورت زیر پیشنهاد کردند:

$$(\xi_{i,j})_t = K_1 \sum_{l=1}^N \left[\sum_{k=1}^M \left(\frac{|e^{\xi}|_{k,l} - |e^{\xi}|_{av_i}}{r^n} \right) - \sum_{k=1}^{l-1} \left(\frac{|e^{\xi}|_{k,l} - |e^{\xi}|_{av_i}}{r^n} \right) \right] \quad (۳)$$

$$(\eta_{i,j})_t = K_2 \sum_{k=1}^M \left[\sum_{l=j+1}^N \left(\frac{|e^{\eta}|_{k,l} - |e^{\eta}|_{av_i}}{r^n} \right) - \sum_{l=1}^{j-1} \left(\frac{|e^{\eta}|_{k,l} - |e^{\eta}|_{av_i}}{r^n} \right) \right] \quad (۴)$$

M و $N =$ تعداد گره ها در جهت ξ و η ، e^{ξ} و $e^{\eta} =$ شاخص تخمین خطا در جهت محور ξ و η ، e_{av}^{ξ} و $e_{av}^{\eta} =$ متوسط میزان خطا در فضای حل، K_1 ، K_2 و $n =$ ضرایب ثابت، $r =$ فاصله بین دو گره

فاصله r بصورت زیر تعریف می شود:

$$r = \sqrt{(i-k)^2 + (j-l)^2} \quad (۵)$$

سرعت در گره در فضای فیزیکی نیز از روابط زیر محاسبه می شود:

$$X_i = \frac{\eta_j \xi_i - \xi_j \eta_i}{J} \quad Y_i = \frac{\xi_j \eta_i - \eta_j \xi_i}{J} \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (۶)$$

$J =$ جاکوبین تبدیل

افزایش سرعت در گره ها باعث تمرکز بیش از اندازه آنها در مناطق خاصی از فضای حل می گردد. اما همانطور که از روابط (۳) و (۴) مشخص است افزایش ضرایب K_1 و K_2 سرعت گره ها را زیاد می کند و با افزایش n از اثرات گره های دور کاسته می شود. بنابراین به منظور کنترل سرعت باید ضرایب K_1 ، K_2 و n به نحو مناسبی انتخاب گردند.

راهکار پیشنهادی برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره ها

برای جلوگیری از تمرکز بیش از حد گره ها، رحمان و چاودری (Rahman & Chadhary, 1997) سرعت در گره ها را در هر گام زمانی با استفاده از "تغییرات جاکوبین

حد تعداد گره ها باعث افزایش خطای گرد کردن نیز می گردد. علاوه بر این تعداد گره ها در فضای حل، زمان محاسباتی بیشتری برای حل معادلات دیفرانسیل صرف می شود. با استفاده از تکنیک های ویژه ای می توان گره ها را در محل هایی از فضای حل که نیاز بیشتری وجود دارد متمرکز کرد و بطور مشابه در مناطقی که کمتر مورد نیاز است از تمرکز گره ها کاست. در این صورت موقعیت گره ها در گام های زمانی متوالی تغییر پیدا می کند. در این راستا هندمن و اسپنسر (Hindman & spencer, 1983) برای تعیین سرعت گره ها با استفاده از روش بخش مساوی معادله دیفرانسیل درجه دومی که آرایش گره ها از آن پیروی می کند، را مشخص کردند. همچنین رای و اندرسون (Rai & Anderson, 1982) آرایش گره ها را با استفاده از خطای ایجاد شده از روش عددی، در گام های محاسباتی اصلاح کردند.

در این تحقیق، معادلات دیفرانسیل آب های کم عمق در تبدیل ها با استفاده از دو روش عددی یک کورمک و لاکس و ندروف دو گامی حل شد. همچنین در روش مک کورمک با استفاده از تکنیک سرعت در گره ها، شبکه ایجاد شده در هر گام زمانی اصلاح گردید و نیز برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره ها راهکار جدیدی پیشنهاد شد. در نهایت به منظور ارزیابی نتایج، جواب های عددی با داده های حاصل از یک مدل آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفت.

معادلات حاکم

معادلات آب های کم عمق، با فرض اولیه توزیع فشار هیدرواستاتیکی و همچنین سیال غیر قابل تراکم، از متوسط گیری در عمق معادلات سه بعدی ناویر-استوکس حاصل می شود. این معادلات، برای مطالعه بسیاری از پدیده های فیزیکی از جمله شکست سد، جریان در کانالهای باز، موج سیلاب، نیروهای عمل کننده بر سازه های ساحلی، انتقال آلودگی و... بکار می روند. شکل دو بعدی و غیر دائمی این معادلات به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial X} + \frac{\partial G(U)}{\partial Y} = S(U) \quad (۱)$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + .5gh^2 \\ huv \end{bmatrix} \quad G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + .5gh^2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(s_{0_x} - s_{f_x}) \\ gh(s_{0_y} - s_{f_y}) \end{bmatrix}$$

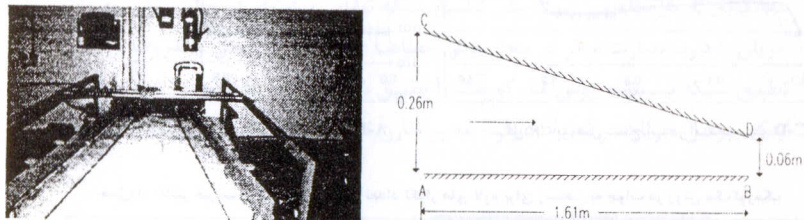
$h =$ عمق جریان، m ، $u(v) =$ سرعت جریان در جهت $X(Y)$ ، m/s ، $g =$ شتاب جاذبه، m/s^2 ، $S_{0_x}(S_{0_y}) =$ شیب بستر کانال، $(S_{f_x})(S_{f_y}) =$ شیب اصطکاکی شیب اصطکاکی بر اساس رابطه مانینگ بصورت زیر تخمین زده می شود:

ارزیابی مدل عددی

به منظور ارزیابی روش عددی، جریان فوق بحرانی در یک تبدیل تنگ شونده مطابق شکل (۱) مطالعه شد. طول تبدیل 1.61 متر بود و فضای حل به ۴۸×۲۶ گره تقسیم گردید. شرایط مرزی جریان در ورودی تبدیل با دبی ثابت $Q = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}$ و $v = 0$ بود. ضریب زبری مانیگ (n) برابر ۰/۰۱۱ و شیب طولی کانال نیز $S = 0.03169$ در نظر گرفته شد. شرایط مرزی در خروجی تبدیل بوسیله درونبایی مقادیر وابسته (u, v, h) در هر گره مشخص شد. شرایط مرزی در دیواره ها نیز با استفاده از روش انعکاسی تعیین گردید. (Bhallaudi & Chaudhry, 1992) تطبیق شبکه بعد از هر پنج تکرار محاسباتی انجام گرفت و برای تخمین خطا از روابط زیر استفاده شد: (Rahman & Chadhary, 1997)

$$e^s = h_s X_s \quad e^n = h_n X_n \quad (12)$$

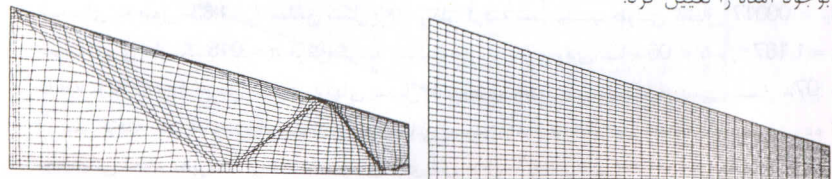
برای تحقیق درستی نتایج بدست آمده، مدلی در آزمایشگاه هیدرولیک دانشکده مهندسی ساخته شد. طول مدل ۱/۶۱ متر و عرض آن ۰/۹۰ متر بود. طراحی مدل به گونه‌ای انجام شد که توانایی اعمال شیب های مختلف طولی و زاویه‌های تنگ‌شدگی و باز شدگی گوناگون را دارا باشد. (شکل (۲))



شکل (۱)- تبدیل تنگ شونده مورد مطالعه

شکل (۲)- مدل آزمایشگاهی تبدیل تنگ شونده

یک کد کامپیوتری بر اساس روش‌های عددی مک کورمک بدون تطبیق شبکه، مک کورمک با تطبیق شبکه و لاکس وندروف بدون تطبیق شبکه برای داده‌های مسئله نوشته شد تا رسیدن به جریان دائمی اجرا گردید. شکل های (۳) و (۴) آرایش اولیه و نهایی گره‌ها را نشان می‌دهند. همانگونه که مشخص است تمرکز گره‌ها در محل هایی که تغییرات مشخصات جریان زیاد است (محل تشکیل امواج ایستا) بیشتر شده است و به راحتی می توان از روی آرایش گره ها شکل و موقعیت امواج ایستای بوجود آمده را تعیین کرد.



شکل (۳)- آرایش اولیه گره ها در تبدیل تنگ شونده

شکل (۴)- آرایش نهایی گره ها در تبدیل تنگ شونده

تبدیل“ اصلاح کردند. کاربرد این روش به دلیل اضافه شدن دو ضریب ثابت جدید و همچنین محاسبات طولانی برای بدست آوردن مقدار جاکوبین زمانبر است. به پیشنهاد نویسندگان می توان برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره ها، ضرایب K_1 و K_2 را بصورت مناسبی انتخاب نمود. روابط پیشنهادی برای تعیین ضرایب مربوطه بصورت زیر می‌باشد:

$$K_1 = \frac{\Delta \xi_{\min}}{\Delta t \cdot [\xi_i]_{\max}} \quad K_2 = \frac{\Delta \eta_{\min}}{\Delta t \cdot [\eta_i]_{\max}} \quad (7)$$

$$= \Delta \xi_{\min} (\Delta \eta_{\min}) = \text{حداقل فاصله بین دو گره متوالی در جهت } (\eta) \cdot \xi_i \cdot [\xi_i]_{\max}$$

حداکثر سرعت در گره های شبکه، $\Delta t = \text{گام زمانی}$.

در روش پیشنهادی ابتدا سرعت گره ها با استفاده از مقادیر تخمینی برای K_1 و K_2 (ترجیحا $K_1 = K_2 = 1$) تعیین می‌گردد. سپس با استفاده از رابطه (۷) مقادیر K_1 و K_2 بطور دقیق محاسبه شده و آرایش گره ها مشخص می شود.

روش عددی

برای حل معادلات دیفرانسیل آبهای کم عمق از دو روش مک کورمک و لاکس وندروف دو گامی استفاده شد. (Anderson et al, 1984) هر دو روش فوق دارای دقت مرتبه دوم در مکان و زمان می‌باشند و باعث پخش خطاهای فاز و دامنه در فضای حل می‌گردند. توزیع خطای فاز در محل هایی که گرادیان متغیرها زیاد است نوساناتی را بوجود می آورد. روش های مختلفی برای حذف نوسانات ایجاد شده وجود دارد مثلا جیمسون (Jameson, 1981) مقادیر متغیر وابسته در هر گام زمانی را با استفاده از روابط پیشنهادی زیر اصلاح می کند:

$$\alpha_{\xi_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + 2|h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad \alpha_{\eta_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + 2|h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad (8)$$

در گره‌های مرزی که $h_{i,j+1}$ یا $h_{i,j-1}$ وجود ندارد داریم:

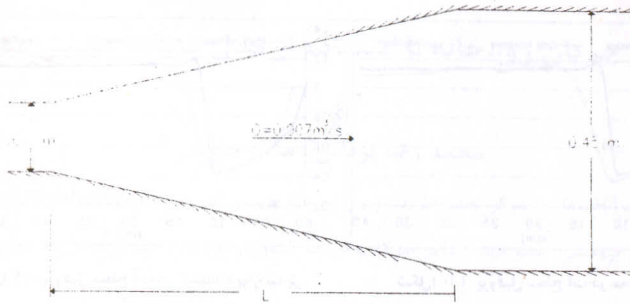
$$\alpha_{\xi_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j+1}| + |h_{i,j}|} \quad \alpha_{\eta_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j+1}| + |h_{i,j}|} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\xi_{i,j+1/2}} = \chi \max(\alpha_{\xi_{i,j}}, \alpha_{\xi_{i,j+1}}) \quad \varepsilon_{\eta_{i,j+1/2}} = \chi \max(\alpha_{\eta_{i,j}}, \alpha_{\eta_{i,j+1}}) \quad (10)$$

$\chi = \text{ضریب ثابت}$. مقدار χ با توجه به نوع مسئله تعیین می گردد. مقدار اصلاحی متغیر وابسته (u, v, h) در هر گام زمانی با استفاده از رابطه زیر اصلاح می شود:

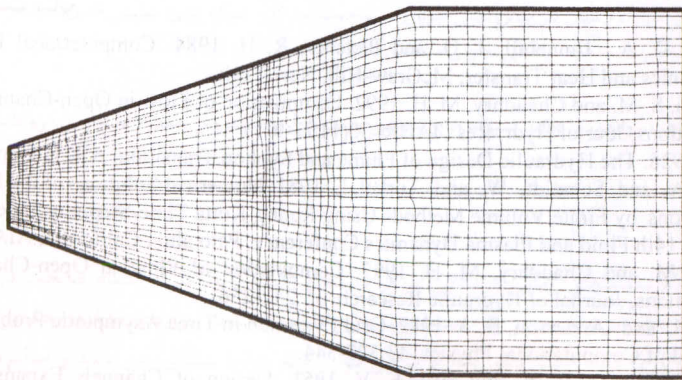
$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^{k+1} + \left[\varepsilon_{\xi_{i+1/2,j}} (f_{i+1,j}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) - \varepsilon_{\xi_{i-1/2,j}} (f_{i,j}^{k+1} - f_{i-1,j}^{k+1}) \right] + \left[\varepsilon_{\eta_{i,j+1/2}} (f_{i,j+1}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) - \varepsilon_{\eta_{i,j-1/2}} (f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j-1}^{k+1}) \right] \quad (11)$$

$f_{i,j}^{k+1} = \text{میزان متغیر وابسته در گام زمانی } k+1 \text{ در گره } (i, j)$



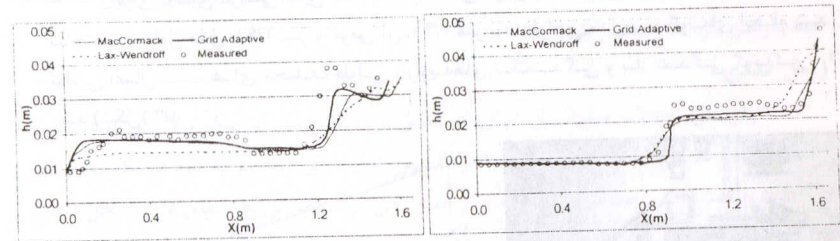
شکل (۷) - تبدیل عرض شونده مورد مطالعه

شکل (۸) آرایش نهایی گره ها را نشان می دهد. همانطور که مشخص است تمرکز گره ها در محل ایجاد پرش هیدرولیکی افزایش یافته است. در سایر مناطق، تغییر قابل ملاحظه ای در آرایش گره ها مشاهده نمی شود. شکل های (۹) و (۱۰) پروفیل سطح آب در محور تقارن و مرکز تبدیل نشان می دهد. در این شکل ها نتایج بدست آمده از روش های مختلف با یکدیگر مقایسه شده اند. همانگونه که ملاحظه می شود روش تطبیق شبکه توانایی بیشتری در مدل کردن تغییرات ناگهانی جریان را دارد. بعبارت دیگر در محل پرش خطاها در دو روش لاکس و وندروف و مک کورمک بدون تطبیق شبکه نسبت به روش مک کورمک با تطبیق شبکه بیشتر پخش می شوند. نکته قابل توجه اینکه پروفیل جریان در امتداد دیوار و محور تقارن تبدیل تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.



شکل (۸) - آرایش نهایی گره ها در تبدیل عرضی شونده

در شکل های (۵) و (۶) پروفیل جریان در امتداد دیوار های AB و CD با استفاده از روش های مختلف رسم شده است. همچنین در این شکل ها نتایج اندازه گیری شده در مدل آزمایشگاهی نیز آورده شده است. همانگونه که ملاحظه می گردد نتایج روش مک کورمک با تطبیق شبکه در مقایسه با روش مک کورمک و لاکس و وندروف بدون تطبیق شبکه با نتایج آزمایشگاهی همخوانی بیشتری دارد. اما در هر سه روش عددی حداکثر عمق آب در محل برخورد امواج مایل با دیواره ها کمتر از میزان اندازه گیری شده آب تخمین زده شده است. بالا آمدن موضعی آب می تواند ناشی از تصادم جت مانند آب با دیواره باشد که در این صورت معادلات متوسط گرفته شده در عمق سنت-ونانت قادر به تفسیر آن نیستند. در جدول (۱) تاثیر ضریب لزجت مصنوعی در تعداد تکرار های لازم برای رسیدن به جواب در روش های مختلف آورده شده است. با توجه به این جدول می توان گفت که اگرچه در راهکار پیشنهادی تعداد گام های محاسباتی برای رسیدن به جواب افزایش می یابد ولی در کل مدت زمان محاسبات کاهش پیدا می کند.



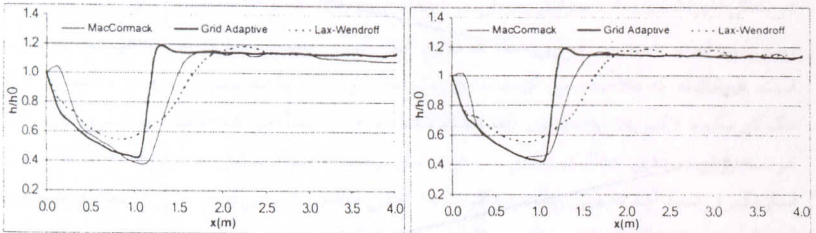
شکل (۵) - پروفیل سطح آب در امتداد دیوار A-B

شکل (۶) - پروفیل سطح آب در امتداد دیوار C-D

جدول (۱) - تاثیر ضریب لزجت مصنوعی در تعداد تکرار های لازم برای رسیدن به جواب در روش مک کورمک

| χ | روش استفاده از شبکه تطبیقی | | روش رحمان و جاودری | | راهکار پیشنهادی | |
|--------|----------------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| | تکرار | زمان اجرا (ثانیه) | تکرار | زمان اجرا (ثانیه) | تکرار | زمان اجرا (ثانیه) |
| ۰.۰۵ | ۷۹۴۵ | ۹۱۰ | ۴۷۹۵ | ۹۶۰۰ | ۵۶۱۰ | ۷۲۱۰ |
| ۰.۱۰ | ۶۴۷۰ | ۷۰۵ | ۳۸۹۰ | ۷۸۶۲ | ۴۵۸۵ | ۵۸۳۰ |
| ۰.۱۵ | ۵۲۶۵ | ۵۷۲ | ۳۳۵۰ | ۶۷۸۰ | ۳۷۲۰ | ۴۷۶۰ |
| ۰.۲۰ | ۴۸۰۵ | ۵۲۶ | ۲۸۵۰ | ۵۷۲۰ | ۳۳۵۰ | ۴۲۵۰ |

برای بررسی قابلیت روش در مدل کردن هم زمان جریان های فوق بحرانی و زیر بحرانی، تبدیل عرضی شونده ای به طول $L = 1.83m$ مطابق شکل (۷) در نظر گرفته شد. شیب طولی کانال $S_0 = 0.00017$ و ضریب زبری مانینگ $n = 0.015$ فرض گردید. شرایط جریان در ورودی با $u = 1.167 m/s$ ، $h = 0.06m$ و $v = 0$ ($Fr = 1.52$) فرض شد. در انتهای تبدیل با توجه به وجود جریان زیر بحرانی مقدار $h = 0.07m$ در نظر گرفته شد. u و v با استفاده از درون یابی بدست آمدند. تطبیق شبکه نیز در هر ده گام محاسباتی انجام پذیرفت. برنامه کامپیوتری برای این مثال با روش های مختلف اجرا شد.



شکل (۱۰)- پروفیل سطح آب در محور تقارن تبدیل

شکل (۹)- پروفیل سطح آب در امتداد دیوار تبدیل

نتیجه گیری

در این مقاله جریان دائمی در تبدیل ها با استفاده از معادلات ناماندگار آبهای کم عمق، با روش های مک کورمک و لاکس و ندرروف دو گامی مورد مطالعه قرار گرفت. سپس به منظور افزایش دقت جواب ها از روش سرعت در گره ها برای تطبیق و اصلاح شبکه در هر گام زمانی در روش مک کورمک استفاده گردید. به منظور بررسی مدل های مختلف عددی عمق جریان در یک تبدیل آزمایشگاهی نیز اندازه گیری شد. تجربیات عددی نشان داد که روش مک کورمک با شبکه تطبیقی همخوانی بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد. این روش به خوبی قادر است تا پیشانی شاک را مدل کند. در راهکار پیشنهادی به منظور جلوگیری از تمرکز بیش از حد گره ها علاوه بر تخمین مناسب ضرایب ثابت روش رای و اندرسون، زمان محاسباتی نیز به میزان قابل توجهی نسبت به روش رحمان و چاودری کاهش پیدا می کند.

فهرست منابع

- Anderson, D. A., Tannehill, J. D. and Pletcher, R. H. 1984. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, New York.
- Bhalla mud i, S. M. and Chaudhry, M. H. 1992. Computation of Flow in Open-Channel Transitions, Jour of Hydr. Res., IAHR. 30(1):77-93.
- Hinds, J. 1928. The Hydraulic Design of Flume and Syphon Transition. ASCE Trans.
- Jameson, A. and Schmidt, W. and Turkel, E. 1981. Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Ruong-Kutta Time-Stepping Schemes. AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo alto , California, AIAA.
- Rahman, M. and Chaudhry, M. H. 1997. Computation of Flow in Open-Channel Transitions, Journal of Hydraulic Research. 35:242-256.
- Rai, M. M. and Anderson, D. A. 1982. Grid Evolution in Time Asymptotic Problems. Journal of Computational Physics. 43:327-344.
- Rouse, H., Bhoota, B. V. and Hsu, E. V. 1951. Design of Channels Expansions. Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs., 116:374-363.
- Swamee, P. K. and Basak, B. C. 1992. Comprehensive Open Channel Expansion Transitions Design. Journal of Irrigation and Drainage Eng. 119(1):1-17.