کاربرد روش چند شبکه ای AMG-CG برای حل سریع دستگاه معادلات خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها

ناصر موسویان[1]، محمد رضا جعفرزاده[2]، بهروز مدرس احمدی[3]
۱-دانشجوی دکتری عمران-آب، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد
۲-استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد
۳-دانشجوی دکتری عمران-آب، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد
Jafarzad@um.ac.ir

خلاصه

امروزه روش های مختلف بر اساس نیوتن مانند الگوریتم گرادیان بطور گسترده برای تحلیل هیدرولیکی جریان دائمی در شبکه های آبرسانی بکار برده می شوند. محاسبات بر اساس روش نیوتن به یک دستگاه معادلات خطی منجر می شود که از ماتریس ژاکوبین مربوط به معادلات شبکه تشکیل می گردد. حل دستگاه معادله خطی، بیشترین هزینه محاسباتی روش های گرادیان را تشکیل می دهد بخصوص برای شبکه های بسیار بزرگ که بیش از صدها هزار متغیر داشته باشند. یکی از روش های مشهور که امروزه برای حل دستگاه معادلات خطی کاربرد فراوانی دارد، روش چند شبکه ای جبری (AMG) است که یک روش سلسله مراتبی است و با استفاده از سیستم هایی با اندازه های کوچکتر تخمین مناسبی از سیستم واقعی ارائه می دهد.

برای سرعت بخشیدن به AMG می توان از پیش شرط ساز گرادیان مزدوج در روش های کرایلف استفاده نمود. در این مقاله به کاربرد روش پیش شرط ساز AMG-CG در حل معادلات خطی شده شبکه لوله ها پرداخته می شود که این دستگاه معادله از روش گرادیان بدست آمده است. شکل ماتریس ژاکوبین در روش گرادیان بصورت یک ماتریس مربعی است که درایه های آن تابع میزان جریان و مقاومت لوله می باشند و قابل حل بوسیله روش چند شبکه ای است. شرایط ماتریس ژاکوبین در روش گرادیان طوری است که با ماتریس قابل حل توسط روش چند شبکه ای منطبق است. هم اکنون در نرم افزار EPANET از روش چولسکی اسپارس به همراه مرتب سازی گره ها برای حل این دستگاه معادلات استفاده می گردد.

کلمات کلیدی: شبکه لوله، تحلیل هیدرولیکی، روش چند شبکه ای

کد مقاله : ۱۲۲۷۴

کاربرد روش چند شبکه ای AMG-CG برای حل سریع دستگاه معادلات خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها

ناصر موسویان[۱]، محمد رضا جعفرزاده[۲]، بهروز مدرس احمدی[۳]

۱-دانشجوی دکتری عمران-آب، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۲-استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۳-دانشجوی دکتری عمران-آب، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

Jafarzad@um.ac.ir

خلاصه

امروزه روش های مختلف بر اساس نیوتن مانند الگوریتم گرادیان بطور گسترده برای تحلیل هیدرولیکی جریان دائمی در شبکه های آبرسانی بکار برده می شوند. محاسبات بر اساس روش نیوتن به یک دستگاه معادلات خطی منجر می شود که از ماتریس ژاکوبین مربوط به معادلات شبکه تشکیل می گردد. حل دستگاه معادله خطی، بیشترین هزینه محاسباتی روش های گرادیان را تشکیل می دهد بخصوص برای شبکه های بسیار بزرگ که بیش از صدها هزار متغیر داشته باشند. یکی از روش های مشهور که امروزه برای حل دستگاه معادلات خطی کاربرد فراوانی دارد، روش چند شبکه ای جبری (AMG) است که یک روش سلسله مراتبی است و با استفاده از سیستم هایی با اندازه های کوچکتر تخمین مناسبی از سیستم واقعی ارائه می دهد.

برای سرعت بخشیدن به AMG می توان از پیش شرط ساز گرادیان مزدوج در روش های کرایلف استفاده نمود. در این مقاله به کاربرد روش پیش شرط ساز AMG-CG در حل معادلات خطی شده شبکه لوله ها پرداخته می شود که این دستگاه معادله از روش گرادیان بدست آمده است. شکل ماتریس ژاکوبین در روش گرادیان بصورت یک ماتریس مربعی است که درایه های آن تابع میزان جریان و مقاومت لوله می باشند و قابل حل بوسیله روش چند شبکه ای است. شرایط ماتریس ژاکوبین در روش گرادیان طوری است که با ماتریس قابل حل توسط روش چند شبکه ای منطبق است. هم اکنون در نرم افزار EPANET از روش چولسکی اسپارس به همراه مرتب سازی گره ها برای حل این دستگاه معادلات استفاده می گردد.

کلمات کلیدی: شبکه لوله، تحلیل هیدرولیکی، روش چند شبکه ای

۱.مقدمه

برای تحلیل شبکه های آبرسانی روش های متعددی ارائه شده است. این روش ها با توجه به شکل مجهولات طبقه بندی می شود. مثلا دستگاه معادلات را می‌توان بر اساس مجهولات به سه دسته معادلات دبی، Q، معادلات هد، H و دبی اصلاح شده ΔQ تقسیم بندی کرد. در معادلات بر حسب دبی Q به تعداد حلقه ها معادلات غیرخطی و به تعداد گره ها معادلات خطی(پیوستگی) وجود دارد. در معادلات هد H، به تعداد گره ها معادلات غیرخطی و در معادلات ΔQ به تعداد حلقه ها معادلات غیر خطی وجود دارد. نخستین بار هاردی کراس روشی را بر مبنای معادلات دبی Q در لوله ها ارائه کرد، [1] ، اما همگرایی این روش با بزرگ شدن شبکه بسیار کند بود و در برخی موارد مدل واگرا می شد بعلاوه سرعت همگرایی به مقدار حدس اولیه دبی در لوله ها بستگی پیدا می‌کرد [۲]. بعدها هاردی کراس روش دیگری بر مبنای معادلات انرژی در گره ها ارائه کرد اما این روش نیز به حدس اولیه بسیار حساس بود[2]. راهکار مارتین و پیترز [۳] بر حسب معادلات هد H و استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون تا حدودی مشخصه های همگرایی را بهبود بخشید ولیکن ایرادات کلی روش نیوتن-رافسون از قبیل وابستگی روند همگرایی به حدس اولیه، دشوار بودن محاسبه ماتریس

ژاکوبین در شبکه های بزرگ و پیچیده، اصلاح ماتریس مذکور در هر تکرار و زمانبری عملیات معکوس سازی ماتریس ژاکوبین همچنان برقرار بود. شامیر و هوارد نشان دادند که از این روش می توان برای شبکه های با پمپ و شیر نیز استفاده نمود [۴].

روش وود [۵] به نام تئوری خطی که برای معادلات دبی Q بکار برده شد نیز در مقایسه با روش نیوتن-رافسون همگرایی کندتری داشت. کولینز و جانسون [۶] روش المان محدود را برای تحلیل شبکه های آبرسانی ارائه کردند که روشی خطی بر حسب معادلات H می باشد. در این روش با انتخاب حدس اولیه برای دبی، ماتریس ضرایب تخمین زده می شود و با حل دستگاه معادلات خطی حاصله، مقادیر H در هر گره به دست می‌آید. در مرحله بعد دبی لوله ها با توجه به هدهای گرهی محاسبه شده و ماتریس ضرایب بوسیله ترکیبی از دبی محاسبه شده در این مرحله و دبی موجود در تکرار قبلی بروزرسانی می گردد و این عملیات تا رسیدن به همگرایی مطلوب ادامه می یابد.

تودینی و پیلاتی [۷] روش گرادیان سراسری (GGA) را برای تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها بکار بردند. قبلا پاول[8] این الگوریتم را با استفاده از مضارب لاگرانژ برای مسائل بهینه سازی با قیود تساوی ارائه کرده بود. این روش برای معادلات ترکیبی Q-H فرمول بندی می شود و بطور مستقیم مقادیر اصلاح شده مجهولات را در هر تکرار محاسبه می کند. در این روش معادلات افت انرژی در حلقه ها به صورت تابع هدف و معادلات پیوستگی به صورت قید، در یک مسئله بهینه سازی تعریف می شود. سپس با استفاده از مضارب لاگرانژ مسئله بهینه سازی، بدون قید شده و معادلات حاصله با به کار بردن روش نیوتن- رافسون حل می شود [۹]. این روش سرعت همگرایی را بطور قابل ملاحظه ای افزایش می دهد بعلاوه تا حدودی نیز از حدس اولیه مستقل می باشد و اگر نقطه آغازی به اندازه کافی به جواب نهایی نزدیک باشد با مرتبه حداقل دو همگرا می گردد [۱۰] درحال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه های آبرسانی بخصوص در نرم افزارهای تجارتی Epanet و WaterGems استفاده می شود.

از الگوریتم‌های چندشبکه‌ای در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی با روش‌های تفاضل محدود و المان محدود استفاده می‌شود. معادلات بیضی لاپلاس و پواسون با روش‌های چندشبکه‌ای سازگاری خوبی دارند. بطور کلی روش های چند شبکه ای در حل دستگاه معادلات خطی در صورتی که ماتریس ضرایب، معین و مثبت و اکثر درایه های غیرصفر آن در مجاورت قطر اصلی پراکنده باشند، بسیار موثر هستند. نخستین بار وبستر [۱۱] از یک روش چندشبکه‌ای برای تحلیل جریان در لوله‌ها استفاده کرد، اما در این تحلیل فرض بر این بود که جریان لایه‌ای است و بنابراین معادلات افت هد خطی بودند. مهدی زاده و جعفرزاده [۱۲] از الگوریتم چند شبکه ای برای تسریع نرخ همگرایی روش نیوتن-رافسون در معادلات H استفاده کردند. ایراد این روش وابستگی به حدس اولیه و روند همگرایی کندتر نسبت به روش تودینی بود.

در تحقیق حاضر از الگوریتم های چند شبکه ای برای تسریع تحلیل شبکه های بزرگ آبرسانی استفاده می شود. این روش با هموار سازی ترم های خطا در شبکه درشت، به عنوان یک الگوریتم شتاب دهنده در حل دستگاه معادلات خطی روش های گرادیان عمل می کند. نتایج نشان می دهد این روش سبب افزایش سرعت همگرایی روش های فوق در شبکه های بزرگ آبرسانی می گردد.

۲. معادلات شبکه های توزیع آب

شبکه های توزیع آب شامل لوله ها، مخازن، پمپ ها و شیرها می‌باشند. در یک شبکه توزیع آب مجهولات عبارت از دبی و افت هد در لوله ها و مقادیر فشار در گره ها می باشد. در صورتیکه فرض شود شبکه مورد نظر دارای M لوله و N گره باشد، تعداد M+N-1 مجهول وجود دارد، بنابراین به همین تعداد معادله احتیاج داریم. معادلات موجود در شبکه های توزیع آب شامل معادلات پیوستگی و انرژی می‌باشند. بر اساس معادله پیوستگی جمع جبری جریان های ورودی و خروجی به یک گره j صفر می شود.

$$\sum_k Q_k = q_j \qquad (۱)$$

q_j میزان برداشت ازگره و Q_k دبی لوله های متصل به گره است. افت فشار آب در لوله k ام h_k بوسیله رابطه زیر تعیین می گردد:

$$h_k = H_i - H_j = R_k . Q_k^m \qquad (۲)$$

که در آن H_i, H_j هد گرهی در ابتدا و انتهای لوله می باشند در این معادله R_k ضریب مقاومت لوله k ام، Q_k دبی لوله و m بسته به معادله مقاومت جریان یک عدد ثابت است. برای مثال در صورت استفاده از معادله هیزن ویلیامز مقادیر R_k و m در سیستم آحاد SI مطابق رابطه زیر تعریف می شوند:

$$R_k = \frac{10.67 Q_k^m L_k}{C_k^{1.852} D_k^{4.87}}, \qquad m = 1.852 \qquad (۳)$$

C ضریب هیزن ویلیامز (وابسته به جنس لوله)، D قطر لوله و L طول لوله می باشد.

۳. فرمول بندی ریاضی معادلات

تودینی و پیلاتی [7] بر اساس رابطه حداقل سازی کولینز [۱۳] یک رابطه کلی برای تشریح معادلات حاکم بر شبکه لوله ها ارائه کردند که مطابق زیر است:

$\begin{cases} \mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}=-\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}=-\mathbf{q} \end{cases}$	(۴)

در معادله فوق

$\mathbf{Q}^T=[Q_1,Q_2,\ldots,Q_{np}]$	بردار [1,np] شامل دبی های مجهول در لوله ها
$\mathbf{H}^T=[H_1,H_2,\ldots,H_{nn}]$	بردار [1,nn] شامل فشارهای مجهول در گره ها
$\mathbf{H}_0^T=[H_{01},H_{02},\ldots,H_{0nt}]$	بردار [1,nt] شامل فشارهای معلوم در گره ها
$\mathbf{q}^T=[q_1,q_2,\ldots,q_{nn}]$	بردار [1,nn] شامل تقاضاهای گرهی

که np برابر تعداد لوله ها، nn برابر تعداد گره ها با فشار مجهول و nt برابر تعداد گره ها با فشار معلوم می باشد. ماتریس A11 مطابق زیر تعریف می گردد:

$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix} R_1\lvert Q_1\rvert^{m_1-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2\lvert Q_2\rvert^{m_2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{np}\lvert Q_{np}\rvert^{m_{np}-1} \end{bmatrix}$	(۵)

دو نکته مهم را می توان از ماتریس فوق استنباط نمود : ۱- با توجه به اینکه دبی لوله ها در رابطه فوق داخل قدر مطلق قرار دارند، کلیه درایه های ماتریس فوق مثبت خواهند بود. ۲- ماتریس A11 متقارن و قطری است.

ماتریس A12 نیز مطابق زیر تعریف می گردد:

$\mathbf{A}_{12}(i,j)=\begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$	اگر جریان لوله j از گره i خارج شود اگر لوله j به گره i متصل نباشد اگر جریان لوله j وارد گره i شود	(۶)

و ماتریس A21=A12T است.

۴. الگوریتم گرادیان سراسری:

یکی از روش های مشهور حل معادلات شبکه لوله ها، روش گرادیان سراسری GGA است که بر اساس روش نیوتن فرمول بندی می گردد. در تحلیل هیدرولیکی با روش GGA روند حل به دو فرایند تکراری تقسیم می گردد.گام اول (گام داخلی) شامل محاسبه متغیرهای بروز شده می باشد که با حل دستگاه معادلات خطی که از ماتریس ژاکوبین تشکیل شده است، بدست می آید. گام دوم (گام خارجی) شامل بروزرسانی مقادیر متغیرهای مسئله می باشد. گام داخلی معمولا بیشترین هزینه محاسباتی را در روش GGA دارد. برای تعیین الگوریتم گرادیان سراسری، معادلات اساسی حاکم بر جریان در شبکه لوله ها (معادله (۴)) را در نظر بگیرید. با مشتق گیری از عبارت فوق رابطه به شکل زیر در خواهد آمد.

$\begin{cases} \mathbf{D}_{11}\mathbf{dQ}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{dH}=\mathrm{d}E \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{dQ}=\mathrm{d}\mathbf{q} \end{cases}$	(۷)

در معادله فوق D_{11} یک ماتریس قطری است و که درایه های آن مطابق رابطه زیر بدست می آیند:

$$D_{11}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_{np}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} R_1\left|Q_1\right|^{m_1-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & R_2\left|Q_2\right|^{m_2-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & 0 & R_{np}\left|Q_{np}\right|^{m_{np}-1}\end{bmatrix}$$ (۸)

در صورتی که بین جواب در تکرار t و تکرار t+1 یک رابطه خطی برقرار باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{dQ}&=\mathbf{Q}^{t}-\mathbf{Q}^{t+1}\\ \mathbf{dH}&=\mathbf{H}^{t}-\mathbf{H}^{t+1}\\ \mathbf{dE}&=\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{t}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\\ \mathbf{dq}&=\mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{t}+\mathbf{q}\end{aligned}$$ (۹)

باجایگذاری روابط فوق، الگوریتم گرادیان سراسری مطابق زیر بدست می آید[13].

$$\mathbf{H}^{t+1}=\left[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\right]^{-1}\left[\mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{q}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}^{t}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\right]$$ (۱۰-الف)

$$\mathbf{Q}^{t+1}=\mathbf{Q}^{t}-\mathbf{D}_{11}^{-1}\left(\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}^{t}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{t+1}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\right)$$ (۱۰-ب)

برای محاسبه Ht+1 باید دستگاه معادله خطی در معادله (۱۰-الف) حل گردد که در آن $\mathbf{V}=[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]$ یک ماتریس متقارن با ابعاد $[n_n,n_n]$ است که خواص آن در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

۵. الگوریتم گرادیان بر حسب فشارهای گرهی:

برای تعیین الگوریتم گرادیان بر حسب فشارهای گرهی، معادلات اساسی حاکم بر جریان در شبکه لوله ها را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases}\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}=-\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{Q}=-\mathbf{q}\end{cases}$$ (۱۱)

با استفاده از هر یک از دو معادله فوق می توان یک عبارت برای Q بدست آورد. اگر از معادله اول استفاده شود، بردار دبی لوله برابر است با:

$$\mathbf{Q}=-\mathbf{A}_{11}^{-1}[\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}]$$ (۱۲)

اگر عبارت فوق در معادله دوم قرار گیرد، یک معادله به شکل زیر بدست می آید:

$$-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}[\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}+\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}]=-\mathbf{q}$$ (۱۳)

و می توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$[\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]\mathbf{H}=\mathbf{q}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}$$ (۱۴)

با مشتق گیری از دو طرف معادله فوق عبارت زیر حاصل می گردد:

$$[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}][\mathbf{dH}_{\mathbf{H}}]=[\mathbf{dq}_{\mathbf{H}}]$$ (۱۵)

در صورتی که بین جواب در تکرار t و تکرار t+1 یک رابطه خطی برقرار باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{dH}_{\mathbf{H}}&=\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t+1}\\ \mathbf{dq}_{\mathbf{H}}&=\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\mathbf{q}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}\end{aligned}$$ (۱۶)

که باجایگذاری روابط فوق، الگوریتم گرادیان بر حسب فشارهای گرهی بدست می آید:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t+1}=\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\left[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\right]^{-1}[\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}_{\mathbf{H}}^{t}-\mathbf{q}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0}]$$ (۱۷)

برای محاسبه Ht+1 باید دستگاه معادله خطی در معادله (۱۷) حل گرددکه در آن $\mathbf{V} = [\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]$ یک ماتریس متقارن با ابعاد $[n_n, n_n]$ است که خواص آن در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

۶. روش های چند شبکه ای جبری

در بسیاری از مسائل، امروزه از روش چند شبکه ای جبری AMG برای حل سیستم معادلات خطی بزرگ استفاده می شود. در عمل کاربرد روش های تکراری یک سطحی (مانند گوس-سایدل و ژاکوبی) برای حل سیستم های خطی دارای محدودیت هایی هستند. برای رفع این مشکلات در حل سیستم های بزرگ، استفاده از روش های سلسله مراتبی مانند AMG بسیار موثر و کارامد خواهد بود. الگوریتم های سلسله مراتبی برای شتاب دادن به همگرایی روش های تکراری در سیستم های بزرگ خطی شکل گرفته است.

انگیزه بوجود آمدن روش های سلسله مراتبی، ناتوانی روش های کلاسیک و یک سطحی جهت کاهش محاسبه خطا از یک تکرار تا تکرار بعدی است. روش های تکراری کلاسیک و یک سطحی اغلب روند همگرایی کندی دارند و نمی توانند همه نوسانات خطا را بطور موثر از بین ببرند [۱۴]. به عبارت دیگر مولفه های خطا با فرکانس بالا بسیار سریعتر از مولفه های خطا با فرکانس پایین تخفیف می یابند. ولی با استفاده از روش های سلسله مراتبی مانند روش چند شبکه ای کلیه فرکانس های خطا در سطح مناسب تخفیف می یابند.

برای استفاده از AMG ماتریس ضرایب سیستم باید خواص معینی را برآورده سازد. از لحاظ تئوری AMG را می توان فقط در ماتریس های M بکار برد ولی در عمل AMG را می توان برای بیشتر ماتریس های معین مثبت بکار برد [۱۵] . اگر چه روش چند شبکه ای در دهه هشتاد توسعه یافت ولی امروزه هنوز به عنوان موثرترین و مناسب ترین روش جبری برای حل معادلات بیضوی به شمار می رود.

۶-۱. کلیات روش های چندشبکه ای هندسی و جبری

دستگاه معادلات خطی در محیطی با شبکه‌بندی ریز Ω^h و اندازه شبکه h را در نظر بگیرید:

$\mathbf{A}^h\mathbf{u}^h = \mathbf{b}^h$	(۱۸)

$\mathbf{A}^h$ یک ماتریس معین مثبت قطری، $\mathbf{u}^h$ بردار مجهولات و $\mathbf{b}^h$ بردار معلومات است. از هر روش تکراری ساده‌ای نظیر ژاکوبی یا گوس-سایدل می‌توان برای حل این دستگاه معادلات بهره برد. اما بخاطر خصوصیت هموارسازی روش‌های تکراری رایج، فرکانس‌های پایین طیف خطا در روند تکرار به‌کندی کاهش می‌یابند. به‌علاوه، نشان داده می شودکه تعداد تکرارهای لازم برای کاهش خطا به میزان 10^{-1} برابر، به توان دوم تعداد مجهولات بستگی دارد [18]. در دستگاه معادلات (۱۸)، اگر $\mathbf{v}^h$ تقریبی از جواب دقیق یعنی $\mathbf{u}^h$ باشد، بردار خطا بصورت $\mathbf{e}^h = \mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h$ نوشته می‌شود و مقدار باقیمانده از رابطه $\mathbf{r}^h = \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h\mathbf{v}^h$ بدست می‌آید. بنابراین معادله باقیمانده‌ها را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$\mathbf{A}^h\mathbf{e}^h = \mathbf{r}^h$	(۱۹)

عملیات درشت‌کردن شبکه معمولاً با دو برابر کردن اندازه شبکه‌بندی یعنی $h \to 2h$ در هر جهت انجام می‌پذیرد. با تبدیل یک شبکه ریز به درشت و محدود کردن بردار باقیمانده‌ها از طریق عملگر شبکه درشت $\mathbf{I}_h^{2h}$، منحنی هموار خطا، نوسانی می شود و روش تکراری موثرتر عمل می-کند. در واقع در شبکه درشت ماتریس تکرار شعاع طیفی کمتری دارد و روند تکراری به خوبی، حالت نوسانی خطا را از بین می‌برد بعلاوه در شبکه درشت به دلیل کاهش تعداد نقاط به نصف حجم محاسبات کاهش پیدا می کند.

در روش چندشبکه ای جبری (AMG) بر خلاف روش چند شبکه ای هندسی به هندسه مسئله نظیر دو برابر کردن اندازه شبکه توجهی نمی-شود. بلکه دستگاه معادلات خطی فقط با استفاده از اطلاعات ماتریس ضرایب حل می گردد[14]. در این روش سلسله مراتب درشت سازی شبکه ها بطور خودکار انجام می شود. شبکه درشت زیر مجموعه ای از شبکه ریز است. عملگر محدودسازی $\mathbf{I}_h^{2h}$ با توجه به شکل شبکه تعریف می شود بطوریکه اگر درایه ماتریس، a_{ij}،به اندازه کافی بزرگ باشد اتصال قوی بین نقاط i و j برقرار بوده و نقاط در شبکه درشت مطابق دستورالعمل زیر تعیین می شوند.

- هر نقطه در شبکه درشت با حداقل یک نقطه از شبکه ریز اتصال قوی دارد
- هیچ دو نقطه ای در شبکه درشت نباید با یکدیگر اتصال قوی داشته باشند

با تبدیل شبکه ریز به درشت و شبکه درشت به درشت تر و محدود کردن بردار باقیمانده‌ها در هر مرحله میزان خطا کاهش یافته و جواب اصلاح شده مسئله، به شبکه اصلی منتقل می گردد. این فرایند گسسته سازی C/F نامیده می شود.

۶-۲. هموارسازی

به بیان هندسی خطای $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ را می توان به عنوان یک ترکیب خطی از فرکانس های مختلف خطا نشان داد. طبیعت روش های تکراری کلاسیک یک سطحی مانند گوس سایدل و ژاکوبی فرکانس های بالای خطا را در تعداد تکرار کمی حذف می کنند ولی این روش ها در تعداد تکرارهای بیشمار توان از بین بردن فرکانس های پایین خطا را دارند. روش AMG این فرایند کاهش فرکانس های پایین خطا را با سیستم های در سطح درشت تسریع می کند. این عملیات با فرایند محدودسازی، فرکانس های پایین خطا در سطح L را به فرکانس های بالای خطا در سطح درشت L+1 تبدیل می کند و بوسیله روش های تکراری این فرکانس ها را در سطح درشت حذف می کند. بنابراین با بکار بردن چند تکرار در یک سطح درشت فرکانس های خطا در سطح ریز حذف می شوند. به این فرایند استفاده از تعداد کمی از تکرارهای روش های کلاسیک در یک سطح قبل در روش چند شبکه ای را هموار سازی می گویند. در صورتی که سیستم $\tilde{x}$, b , A را در نظر بگیریم، هموار سازی جواب انتخابی x_L به شکل ریاضی مطابق زیر خواهد بود:

$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_1\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_2\mathbf{b}$	(۲۰)

که $\bar{\mathbf{x}}$ جواب انتخابی هموار شده است، S1 و S2 ماتریس هایی وابسته به نوع الگوریتم درشت سازی بکاربرده شده هستند [۱۶].

۶-۳. شتاب دهنده های روش چند شبکه ای:

یکی از روش های شناخته شده برای سرعت بخشیدن به AMG (و همچنین به عنوان یک حل کننده تکراری یک سطحی) استفاده از پیش شرط سازهایی مانند روش گرادیان مزدوج در روش های کرایلف۱ می باشد [16]. روش های کرایلف برای سرعت بخشیدن به روش های تکراری در مواقعی که مانعی برای همگرایی این روش ها وجود دارد، بکار می رود. مشکلات همگرایی، ناشی از پراکندگی مقادیر ویژه در سیستم اصلی مقادیر ویژه می باشد. همگرایی روش های پیش شرط ساز کرایلف از روش های چند شبکه ای به تنهایی یا روش های تکراری در یک سطح بهتر است. در زیر روش پیش شرط ساز کرایلف AMG-CG تشریح می شود.

۶-۴. ترکیب روش چندشبکه ای جبری و گرادیان مزدوج (AMG-CG)

برای حل دستگاه معادلات خطی $\mathbf{A}^k\mathbf{u}^k = \mathbf{b}^k$ می توان از روش های تکراری به شکل کلی زیر استفاده نمود [۱۷].

$\mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_n^k + (\mathbf{M}^k)^{-1}(\mathbf{b}_n^k - \mathbf{A}^k\mathbf{u}_n^k)$	(۲۱)

در روش تکراری ژاکوبی ماتریس پیش شرط ساز $\mathbf{M}^k$ از درایه های قطر اصلی ماتریس $\mathbf{A}^k$ تشکیل می‌شود. در روش گوس سایدل ماتریس $\mathbf{M}^k$ از ماتریس پایین مثلثی ماتریس $\mathbf{A}^k$ ساخته می‌شود. اگر روش گرادیان مزدوج به همراه پیش شرط ساز بکار برده شود، الگوریتم آن بصورت زیر خواهد بود [۱۸]:

۱- $\mathbf{r}_0^k$ را از رابطه $\mathbf{r}_0^k = \mathbf{b}^k - \mathbf{A}^k\mathbf{u}^k$ محاسبه کنید.

۲-قراردهید: $\mathbf{n} = 0, \mathbf{p}_0^k = \mathbf{z}_0^k, \mathbf{z}_0^k = (\mathbf{M}^k)^{-1}\mathbf{r}_0^k$

۳-محاسبه کنید: $\mathbf{r}_{n+1}^k = \mathbf{r}_n^k - \alpha_n^k\mathbf{A}^k\mathbf{p}_n^k, \mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_n^k + \alpha_n^k\mathbf{p}_n^k, \alpha_n^k = \dfrac{(\mathbf{r}_n^k)^T\mathbf{z}_n^k}{(\mathbf{p}_n^k)^T\mathbf{A}^k\mathbf{p}_n^k}$

۴-اگر $\mathbf{r}_{n+1}^k$ به اندازه کافی کوچک است به گام ۵ بروید، در غیر اینصورت:

۴-۱-محاسبه کنید: $\mathbf{p}_{n+1}^k = \mathbf{z}_{n+1}^k - \beta_n^k\mathbf{p}_n^k, \beta_n^k = \dfrac{(\mathbf{z}_{n+1}^k)^T\mathbf{r}_{n+1}^k}{(\mathbf{z}_n^k)^T\mathbf{r}_n^k}, \mathbf{z}_{n+1}^k = (\mathbf{M}^k)^{-1}\mathbf{r}_{n+1}^k$

۴-۲-قرار دهید n=n+1 و به گام ۳ بروید.

1- Krylov

۵- $\mathbf{u}_{n+1}^{k}$ جواب مسئله است.

در الگوریتم فوق اصطلاحا α_n پارامتر طول تکرار و $\mathbf{p}_n$ بردار جهت جستجو نامیده می شود. پیش شرط ساز $\mathbf{M}^k$ مطابق زیر تعریف می شود.

(۲۲)	$\mathbf{M}^k = \mathbf{A}^k(\mathbf{I}^k - \mathbf{N}^k)^{-1}$

$\mathbf{I}^k$ ماتریس قطری واحد است. انتقال اطلاعات از شبکه ریز به درشت بوسیله رابطه گالرکین مطابق زیر انجام می شود:

(۲۳)	$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I}_k^{k+1}\mathbf{A}^k\mathbf{I}_{k+1}^{k}$

$\mathbf{N}^k$ برابر یک تکرار چرخه V است و مطابق زیر تعریف می شود:

(۲۴)	$\mathbf{N}^k = \mathbf{S}_{(post)}^k\mathbf{T}_{k,k+1}\mathbf{S}_{(pre)}^k$

که $S_{(pre)}$ و $S_{(post)}$ عملگرهای پیش هموارکننده و پس هموارکننده هستند و $\mathbf{T}_{k,k+1}$ عملگر اصلاح شبکه درشت می باشد. در روش AMG-CG از یک تکرار گوس–سایدل پیشرو به عنوان پیش هموارکننده و یک تکرار گوس–سایدل پسرو به عنوان پس هموارکننده استفاده می شود. این عملگرها مطابق زیر تعریف می شوند:

(۲۵)	$\mathbf{S}_{(pre)}^k = \mathbf{I}^k - (\mathbf{L}^k)^{-1}\mathbf{A}^k$
(۲۶)	$\mathbf{S}_{(post)}^k = \mathbf{I}^k - (\mathbf{L}^k)^{-T}\mathbf{A}^k$

$\mathbf{L}^k$ ماتریس پایین مثلثی ماتریس $\mathbf{A}^k$ است که شامل درایه های روی قطر اصلی نیز می شود. عملگر اصلاح شبکه درشت $\mathbf{T}_{k,k+1}$ نیز مطابق زیر تعریف می شود:

(۲۷)	$\mathbf{T}_{k,k+1} = \begin{cases} \mathbf{I}^k - \mathbf{I}_{k+1}^{k}(\mathbf{A}^{k+1})^{-1}\mathbf{I}_k^{k+1}\mathbf{A}^k, & \text{if} \quad k = k_{max} - 1 \\ \mathbf{I}^k - \mathbf{I}_{k+1}^{k}(\mathbf{I}^{k+1} - \mathbf{N}^{k+1})(\mathbf{A}^{k+1})^{-1}\mathbf{I}_k^{k+1}\mathbf{A}^k, & \text{if} \quad 1 \le k \prec k_{max} - 1 \end{cases}$

k_{max} نماینگر درشت ترین شبکه می باشد.

۶-۵. کاربرد روش چند شبکه ای در تحلیل شبکه لوله ها:

همانطور که در بخش های پیشین ذکر شد، تمرکز این مقاله به کابرد روش AMG برای تسریع گام داخلی روش GGA اختصاص دارد. اهمیت حل سریع این گام محاسباتی به این دلیل است که بیشترین هزینه محاسباتی در روش GGA به این قسمت تعلق دارد. از نقطه نظر تئوری روش AMG فقط در ماتریس های استیلجس [۲] قابلیت همگرایی دارد. ماتریس استیلجس یک ماتریس معین مثبت متقارن است که درایه های غیر قطری آن منفی هستند. بنابراین باید ابتدا نشان داده شود که ماتریس V یک ماتریس استیلجس است.

در صورتی که ماتریس $\mathbf{V} = [\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]$ بطور دقیق تر بررسی گردد، باتوجه به ماتریس های A_{12} و A_{21} مطابق زیر تعریف می شود:

(۲۸)	اگر k=i اگر لوله j به گره i و گره k متصل باشد در غیر این صورت	$[\mathbf{V}]_{i,k} = \begin{cases} \sum_j [\mathbf{D}_{11}]_{jj}^{-1} \\ -[\mathbf{D}_{11}]_{jj}^{-1} \\ 0 \end{cases}$

با توجه به اینکه درایه های ماتریس D_{11} مثبت هستند، نتیجه می شود که درایه های روی قطر اصلی ماتریس V همیشه مثبت و درایه های غیرقطری ماتریس V همیشه منفی هستند. به عبارت دیگر ماتریس V یک ماتریس استیلجس است.

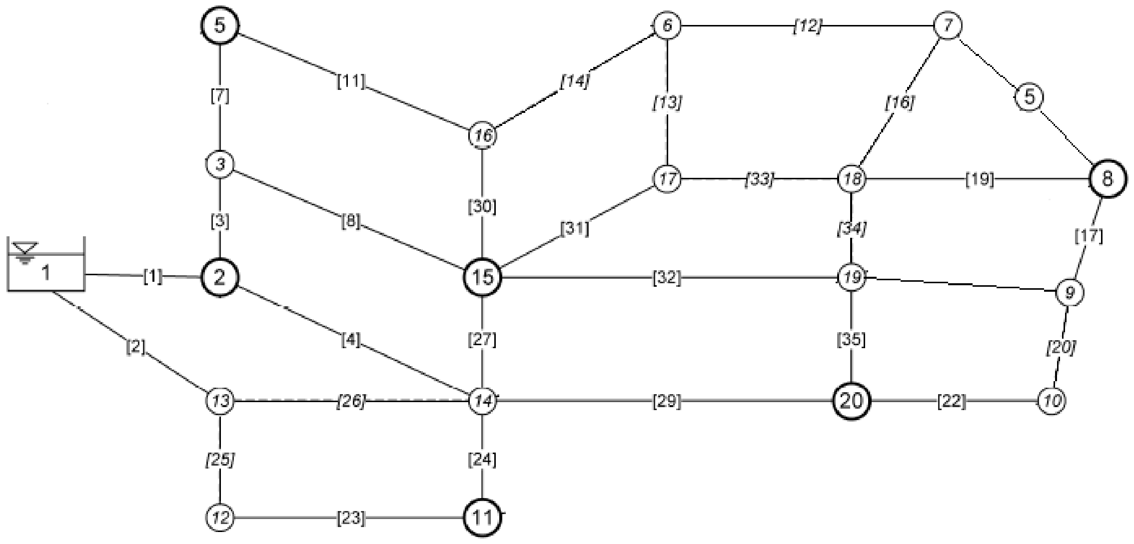
۷. مثال عددی

مجموعه ای از شبکه های حلقوی نامنظم با N×N گره را در نظر بگیرید که در آن N (تعداد گره ها در هر ردیف یا ستون) برابر ۲۰ ، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ می باشد، حجم محاسبات با زیاد شدن N به شدت افزایش می یابد. به عنوان نمونه در شکل۱، قسمتی از شبکه مورد بررسی نشان داده شده است. در هر کدام از گره ها مقدار تقاضای گرهی با استفاده از اعداد تصادفی انتخاب شده است. شبکه های فوق بوسیله روش های GGA و گرادیان بر حسب فشارگرهی تحلیل می شوند و دستگاه معادلات خطی حاصله در هر تکرار بوسیله ۴ روش گرادیان مزدوج، LU، چولسکی و AMG-CG حل

2- Stieltjes

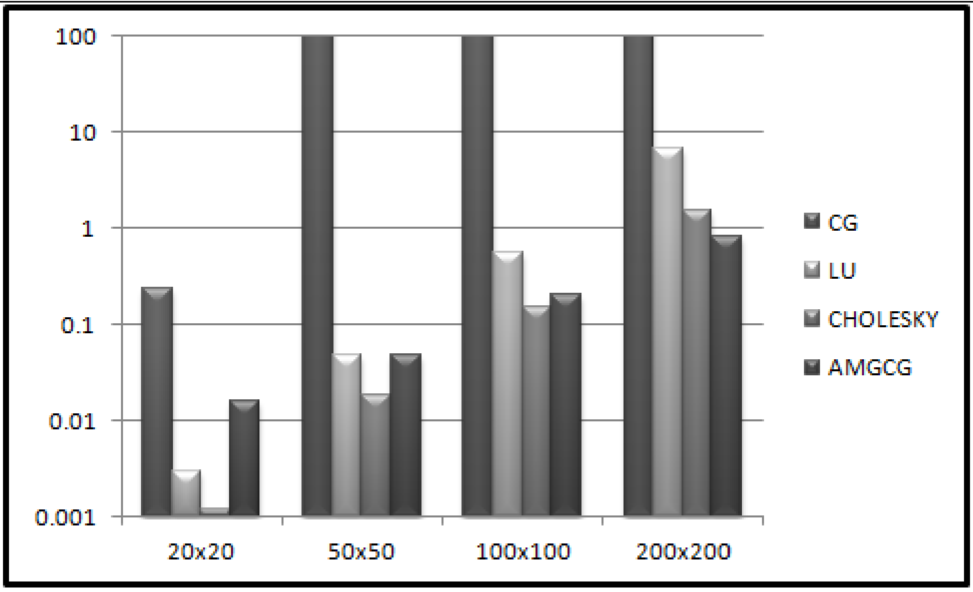
می گردد.نوع روش بکار برده شده در حل دستگاه معادله خطی، تاثیری بر نرخ همگرایی روش های تحلیل هیدرولیکی ندارد به همین دلیل در این بخش به بررسی یک گام محاسباتی هر یک از روش های گرادیان سراسری و گرادیان بر حسب فشارهای گرهی پرداخته می شود. دستگاه معادله خطی در دو روش فوق دقیقا یکسان است. زمان محاسبات در روش های حل دستگاه معادلات خطی با شرط $\|\varepsilon\| \le 1.\mathbf{e}-9$ بدست می آید که در آنجا $\|\varepsilon\|$ نرم باقیمانده بر اساس مقدار حداکثر اختلاف بین مجهولات در دو گام متوالی محاسباتی تعریف می شود.

$\|\varepsilon\| = \max\|\varepsilon_i\|$	(۲۹)



شکل۱- قسمتی از شبکه لوله مورد بررسی

در شکل ۲ زمان همگرایی حل دستگاه معادلات خطی توسط روش های مختلف برای شبکه های ۲۰×۲۰ ، ۵۰×۵۰ ، ۱۰۰×۱۰۰ و ۲۰۰×۲۰۰ بصورت لگاریتمی مقایسه شده است. جدول ۱ مقادیر دقیق زمان محاسباتی حل دستگاه معادلات خطی را نشان می دهد. روش گرادیان مزدوج در شبکه ۲۰×۲۰ در ۲۳ ثانیه همگرا می شود ولی در شبکه های بزرگتر نمی تواند با دقت مورد نظر به همگرایی دست یابد. روش LU در کلیه شبکه ها نسبت به روش چولسکی زمان بیشتری صرف می کند. ولی در شبکه ۲۰×۲۰ نسبت به روش گرادیان مزدوج و AMG-CG عملکرد بهتری دارد. در شبکه ۵۰×۵۰ زمان محاسباتی LU تقریبا با روش AMG-CG برابر است ولی با بزرگ ترشدن شبکه این زمان به شدت افزایش می یابد. روش چولسکی در کلیه حالات از دو روش گرادیان مزدوج و LU سریعتر است. ولی در شبکه های بزرگ این روش نیز کارایی خود را از دست می دهد. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است با بزرگ شدن شبکه زمان همگرایی روش AMG-CG نسبت به سایر روش ها سریعتر می گردد. بطوریکه در شبکه ۲۰۰×۲۰۰ این روش سریعتر از دیگر روش ها همگرا شده و در کمتر از یک ثانیه دستگاه معادلات خطی دارای ۴۰۰۰۰ معادله و ۴۰۰۰۰ مجهول را حل می کند. بنابراین با بزرگتر شدن شبکه عملکرد روش AMG-CG نیز بهتر از دیگر روش ها می گردد و پیشنهاد می شود برای شبکه های با بیش از ۷۰۰۰۰ لوله به جای روش چولسکی از روش AMG-CG برای حل دستگاه معادلات خطی حاصله استفاده گردد.



شکل۲- زمان همگرایی روش های مختلف در یک گام تحلیل شبکه های مختلف

جدول۱- زمان همگرایی روش های مختلف در یک گام تحلیل شبکه های مختلف (ثانیه)

50X50= اندازه شبکه	20X20= اندازه شبکه		
زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه)	زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه)	حل کننده دستگاه معادله خطی	روش تحلیل
همگرا نمی شود	0.23	CG	گرادیان سراسری و گرادیان بر حسب فشار گرهی
0.047	0.003	LU	
0.018	0.0012	CHOLESKY	
0.0468	0.0156	AMGCG	
200X200= اندازه شبکه	100X100= اندازه شبکه		
زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه)	زمان محاسبه در یک تکرار (ثانیه)	حل کننده دستگاه معادله خطی	روش تحلیل
همگرا نمی شود	همگرا نمی شود	CG	گرادیان سراسری و گرادیان بر حسب فشار گرهی
6.745	0.552	LU	
1.533	0.155	CHOLESKY	
0.811	0.203	AMGCG	

.

۸. نتیجه گیری

در این مقاله از روش چند شبکه ای AMG-CG برای حل دستگاه معادله خطی حاصله از تحلیل شبکه های آبرسانی بوسیله روش GGA و روش گرادیان بر حسب فشار گرهی استفاده شد. این روش در شبکه های بزرگ با هزاران لوله دارای بیشترین سرعت همگرایی می باشد ونسبت به روش چولسکی که در نرم افزار EPANET بکار برده شده است کارایی مناسب تری دارد. با توجه به اینکه زمان همگرایی در شبکه های آبرسانی بزرگ مقیاس از اهمیت بسیاری برخوردار است، پیشنهاد می شود برای شبکه های با بیش از ۷۰۰۰۰ لوله به جای روش چولسکی از روش AMG-CG برای حل دستگاه معادلات خطی حاصله در روش های تحلیل هیدرولیکی فوق استفاده گردد.

۹. منابع

1. Cross, H., *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*, in *No. 286, University of Illinois, Engineering Experimental Station, Urbana, Illinois*, Bulletin, Editor. 1936.
2. Bhave, P.R. and R. Gupta, eds. *Analysis of Water Distribution Networks*. Oxford, ed. A.S.I. Ltd. 2006, U.K. ISBN: 978-81-7319-778-9.
3. Martin, D.W. and G. Peters, *The application of Newton's method to network analysis by digital computer.* Journal of Institution of Water Engineers and Scientists, 1963: p. p. 115.
4. Shamir, U. and C.D. Howard, *Water distribution systems analysis.* Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 1968. **Vol. 94, No. HY1**: p. pp. 219-234.
5. Wood, D.J. and C.O.A. Charles, *Hydraulic network analysis using linear theory.* Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 1972. **Vol. 98, No. HY7**: p. pp. 1157-1170.
6. Collins, A.G. and R.L. Johnson, *Finite-Element Method for Water Distribution Networks.* Journal American Water Works. Association, 67(7), 1975, 1975: p. 385-389.
7. Todini, E. and S. Pilati, *A Gradient Algorithm for the Analysis of Pipe Networks*, in *International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution*. 1987: Leicester, UK.
8. Powell, M.J.D., *Algorithms for Nonlinear Constraints that Use Lagrangian Functions.* Math. Prog, 1978: p. 224–248.
9. Luenberger, D.G., *Linear and Nonlinear Programming*. 2008, International Series In Operations Research and Management Science, Stanford University.
10. Bertsekas, D.P., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. 1996, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.
11. Webster, R., *Efficient Algebraic Multigrid Solvers With Elementary Restriction And Prolongation.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1998. **28**: p. 317-36.
12. Mahdizadeh H and J. M.R, *Application of Multigrid method for pipe network analysis*, in " *8th International Congress on civil Engineering*. 2009: Shiraz University, Shiraz, Iran.
13. Todini, E., *On the convergence properties of the different pipe network algorithms*, in *8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium*. 2006: Cincinnati, Ohio, USA.
14. Zecchin, A.C., et al., *Steady-state Behavior of Large Water Distribution Systems: The Algebraic Multigrid Method For The Fast Solution of Linear Step.* Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, 2012.
15. St¨uben, K., *An introduction to algebraic multigrid (U. Trottenberg, C.Oosterlee, and A. Sch¨uller, eds.)* Academic Press, London, 2001b: p. 413–532.
16. Saad, Y., *Iterative Methods For Sparse Linear Systems*, S.S.f.I.a.A. Mathematics, Editor. 2003.
17. Mertens, R.D.G., H. Belmans, R. Hameyer, K. Lahaye, D. Vandewalle, S. Roose, D. , *An algebraic multigrid method for solving very large electromagnetic systems.* Magnetics, IEEE Transactions on 1998. **34, no.5**: p. 3327-3330.
18. Iwamura, C., et al., *An efficient algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. **192**(20-21): p. 2299-2318.