تعمیم‌هایی از C_{pm} و حجم نمونه تقریبی آن در کنترل کیفیت

صدیقه یوسفی[۱] - غلامرضا محتشمی برزادران[۲]- باقر مقدس‌زاده[۱]

[۱] دانشگاه پیام نور مشهد
[۲] دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: فرآیند شاخص‌های قابلیت[۱] ، (PCI)، به‌طورگسترده برای ارزیابی فرآیندها در صنایع تولیدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف از تحلیل قابلیت فرآیند، برآورد، کنترل و کاهش تغییرپذیری محصولات صنعتی می‌باشد. در روش کلاسیک داده‌ها باید از فرآیند تحت کنترل جمع‌آوری‌شده، مستقل و هم‌توزیع(نرمال) باشند. شاخص C_{pm} به‌دلیل در نظر گرفتن مقدار هدف[۲] (T) معیار مفیدی برای بررسی قابلیت فرآیند است. (PCI)ها، مخصوصاً C_{pm}، به‌طور گسترده در صنایع ساخت برای ارزیابی و برآورد تصمیم خرید کاربرد دارد، در این راستا وو و کو[۳] (۲۰۰۴) حجم نمونه‌ی مورد نیاز را برای دستیابی به کران اطمینان مطلوب‌برآورد نمودند.

واژه‌های کلیدی: فرآیند شاخص‌های قابلیت، توزیع نرمال، حـــدود فنی نامتقارن، مشخصات فرآیند، مقدار هدف، حجم نمونه

۱ مقدمه

لازمه‌ی شکل‌گیری و بقای مؤسسات و سازمان‌ها، وجود مشتری و مصرف‌کننده است. همواره سعی بر بهبود فرآیند، در راستای افزایش رضایت‌مندی مشتریان می‌باشـــد. قابلیت فرآینـــد، استاندارد متداولی برای کیفیت محصولات از دیـــدگاه مشتری و تولیدکننـــده می‌باشد. روش متعارف برای تحلیل قابلیت فرآیند، استفاده از PCI است که رابطه‌ی بین تقاضای مصرف کننده و قابلیت واقعی فرآیند را بیان می‌کنند.

به‌کمک قابلیت فرآیند می‌توان به چگونگی تولید محصولاتی با کیفیت قابل قبول دست یافت. PCIها برای تشخیص قابلیت فرآیند ساخت استفاده می‌گردد که نقش مهمی در بررسی کنترل کیفیت مؤسسات مهندسی بزرگ دارند. این شاخص ها ابزار مؤثری برای تحلیل قابلیت فرآیند و تضمین کیفیت می‌باشند. جوران[۴] (۱۹۷۴) نخستین بار

[۱] Process Capability Indices
[۲] Target value
[۳] Wu and Kuo
[۴] Juran

شـــاخص‌های قابلیت را نسبتی از پهنای حدود فنی[۵] فرآینـــد به معیار تغییرپذیری چندگانـــه تعریف نمـــود. پس از آن کین[۶] (۱۹۸۶) بحث‌هایی پیرامون برآورد این شاخص‌ها مطرح کرد. C_p و C_{pk} دارای طراحی مستقل از مقدار هدف (T) می‌باشند، به‌این دلیل چان[۷] و همکاران(۱۹۸۸)، شاخص C_{pm} را معرفی نمودند. با توجه به نقش غیرقابل انکار PCI در صنعت به تعیین حجم نمونه برای برآورد این شاخص خواهیم پرداخت.

۲ اساس PCI

در این بخش به معرفی شاخص‌های قابلیت جهت کنترل کارایی فرآیند می‌پردازیم. مشخصه‌ها در قالب عباراتی مانند مقدار هدف (T) و حدود بالا و پایین مشخصات فنی (USL[۸], LSL[۹]) داده می‌شوند که مشخصات[۱۰] یا حدود فنی فرآیند می‌نامند. مشخصات، توسط تعریف نیاز مشتری از محصول مناسب تعیین می‌گردد به‌طوری‌که ملاحظات مهندسی و اهداف استفاده‌ی آن نقش مهمی ایفا می‌کنند. اگر محصولات در مشخصات صدق کند، آنگاه با فرآیندی کارا مواجه هستیم. شاخص‌های قابلیت با گرفتن نمونه‌ای از فرآیند تحت مطالعه و جایگذاری برآورد مشخصه‌های، برآورد می‌گردند. شاخص‌های C_p، C_{pk} و C_{pm} تحت فرض‌های زیر تعریف می‌گردند

۱) فرآیند در کنترل آماری می‌باشد.

۲) حدود بالا و پایین مشخصات فنی معلوم و نقطه‌ی میانی حدود T است.

۳) فرآیند نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد.

معیارهای قابلیت سنتی متداول فرآینـــد، C_p و C_{pk}، توسط کین(۱۹۸۶) بـــه‌ترتیب به صورت زیر معرفی شد(C_p نسبتی از پراکندگی مجاز به پراکندگی واقعی فرآیند است)

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}. \qquad (1)$$

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} \quad , \qquad (2)$$

معیارهای یک‌طرفه‌ی فرآیند(شامل یک حد مشخصات فنی)، C_{pu} و C_{pl}، عبارت‌انداز

---
۵ Tolerance

۶ Kane

۷ Chan

۸ Upper Specification Limit

۹ Lower Specification Limit

۱۰ Specification

$$C_{pu} = \frac{USL-\mu}{۳\sigma} \qquad \text{و} \qquad C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{۳\sigma}, \qquad (۳)$$

برآورد μ، میانگین فرآیند، به‌صورت زیر است(K تعداد زیر گروه‌های تحت کنترل)

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} \overline{X}_i}{k}. \qquad (۴)$$

با توجه به نظریه‌های بهبود کیفیت، استفاده از T، برای نگاه داشتن فرآیند روی هدف، بسیار مهم است. از این‌رو معیار تمرکز فرآیند، C_{pm}، به صورت زیر معرفی گردید

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{٦\sqrt{\sigma^۲ + (\mu - T)^۲}}. \qquad (۵)$$

افزایش مقدار PCIها منجربه بهبود کیفیت محصول می‌گردد که با داشتن مشخصه‌های واقعی و تلاش برای بهبود قابلیت فرآیند، می‌توان به این مهم دست‌یافت.

۳ حجم نمونه تقریبی برای شاخص قابلیت C_{pm}

از لحاظ عملی، کران‌های اطمینان پایین دقیق و تقریبی برای شاخص‌های فرآیند باید فراهم گردد. به‌علاوه تعیین حجم نمونه‌ی مورد نیاز برای دستیابی به سطح مشخصی از کارایی در حدود کران اطمینان پایین، مورد نیاز می‌باشد. بنابراین هدف ما به‌دست آوردن حجم نمونه‌ی تقریبی برای یافتن کران اطمینان پایین خواهد بود. در این بخش فرض می‌کنیم که فرآیند تحت کنترل و دارای توزیع نرمال است.

برآوردگر شاخص C_{pm} به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\hat{C}_{pm} = \frac{(USL - LSL)}{٦\sqrt{S^۲ + n(\overline{X} - T)^۲/(n-۱)}}. \qquad (۶)$$

از چان و همکاران (۱۹۸۸) داریم

$$(n-۱)(n+\lambda)C_{pm}^۲/(n\hat{C}_{pm}^۲) \sim \chi_n'^{۲}(\lambda). \qquad (۷)$$

$\chi_n'^{۲}(\lambda)$ توزیع $\chi^۲$ غیر مرکزی با n درجه‌ی آزادی و پارامتر $\lambda = n\delta = \frac{n(\mu-T)^۲}{\sigma^۲}$ است. پس کران اطمینان دقیق پایین $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$ به صورت زیر می‌باشد

$$\left(n\chi_n'^{۲}(\lambda)/((n-۱)(n+\lambda))\right)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۸)$$

بویلز[۱۱] (۱۹۹۱) تقریب بهتری برای $\chi_n'^{۲}(\lambda)$ پیشنهاد نمود

$$\chi_n'^{۲}(\lambda) \approx e\chi_f^۲, \qquad (۹)$$

[۱۱] Boyles

که $e=\frac{(n+2\lambda)}{(n+\lambda)}$، χ_f^2 توزیع χ^2 با f درجه‌ی آزادی و $f=\frac{(n+\lambda)^2}{(n+2\lambda)}=\frac{n(1+\delta)^2}{(1+2\delta)}$ است. بنابراین (۷) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$(n-1)fC_{pm}^2/(n\hat{C}_{pm}^2)\sim\chi_f^2. \qquad (10)$$

باتوجه به(۱۰)، کران اطمینان دقیق پایین $100(1-\alpha)\%$ برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$ عبارت‌است‌از

$$\left(n\chi_\alpha^2(f)\right)/\left((n-1)f\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (11)$$

فیشر[۱۲] (۱۹۹۲) و ویلسون-هیلفرتی[۱۳] (۱۹۳۱) تقریب‌های زیر را معرفی نمودند

$$-z_\alpha=\sqrt{2\chi_\alpha^2(v)}-\sqrt{2v-1}. \qquad (12)$$

$$-z_\alpha=\sqrt{9v/2}\{(\chi_v^2/v)^{\frac{1}{3}}-(1-2/(9v))\}. \qquad (13)$$

که $-z_\alpha$، چارک αام پایین در توزیع نرمال استاندارد است. کران اطمینان دقیق پایین $100(1-\alpha)\%$ برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$ به‌کمک تقریب فیشر و رابطه‌ی (۱۰) عبارت‌است‌از

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{-z_\alpha}{\sqrt{2f}}+\sqrt{1-\frac{1}{2f}}\right). \qquad (14)$$

برای $n\geq 30$، از عبارت $\frac{1}{2f}$ چشم‌پوشی می‌گردد، بنابراین n به فرم زیر حاصل می‌شود

$$n=(z_\alpha^2/2)\times(1-C_{pm}/\hat{C}_{pm})^{-2}\times(1+2\delta)/(1+\delta)^2\ . \qquad (15)$$

از (۱۳) و (۱۰)، کران اطمینان دقیق پایین $100(1-\alpha)\%$ در $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$ به‌صورت،

$$\left(-z_\alpha\sqrt{2/(9f)}+1-2/(9f)\right)^{3/2}. \qquad (16)$$

است. در این تقریب برای $n\geq 30$، عبارت $2/(9f)$ را نادیده گرفته، داریم

$$n=(2z_\alpha^2/9)\times(1-(C_{pm}/\hat{C}_{pm})^{2/3})^{-2}\times(1+2\delta)/(1+\delta)^2\ . \qquad (17)$$

جداول ۱ تا ۴ مبین کران اطمینان پایین ۰/۹۵٪ و ۰/۹۹٪ برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$ هستند که به ترتیب از فرمول‌های (۸)، (۱۱)، (۱۴) و (۱۶) به‌دست می‌آید. این جداول نشان می‌دهند که تقریب ویلسون-هیلفرتی شبیه‌تر به نتایج توزیع χ^2 می‌باشد. بنابراین تقریب ویلسون-هیلفرتی دقیق‌تر از فیشر می‌باشد.

[۱۲] Fisher
[۱۳] Wilson-Hilferty

جدول ۱: کران اطمینان پایین دقیق برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$، با استفاده از χ^{2} غیرمرکزی.

$\hat{\delta}$	مقادیر از پیش تنظیم شده $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$	n	۹۹٪	n	۹۵٪
۰	۰/۸	۶۱	۰/۷۹۸۷	۳۰	۰/۷۹۸۵
		۶۲	۰/۸۰۰۲	۳۱	۰/۸۰۱۷
	۰/۹	۲۵۸	۰/۸۹۹۹	۱۲۷	۰/۸۹۹۶
		۲۵۹	۰/۹۰۰۱	۱۲۸	۰/۹۰۰۰
۱	۰/۸	۴۶	۰/۷۹۸۳	۲۲	۰/۷۹۷۹
		۴۷	۰/۸۰۰۴	۲۳	۰/۸۰۲۲
	۰/۹	۱۹۴	۰/۸۹۹۹	۹۴	۰/۸۹۹۶
		۱۹۵	۰/۹۰۰۲	۹۵	۰/۹۰۰۱

جدول ۲: کران اطمینان پایین برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$، با استفاده از تقریب.

$\hat{\delta}$	مقادیر از پیش تنظیم شده $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$	n	۹۹٪	n	۹۵٪
۰	۰/۸	۶۱	۰/۷۹۸۷	۳۰	۰/۷۹۸۵
		۶۲	۰/۸۰۰۲	۳۱	۰/۸۰۱۷
	۰/۹	۲۵۸	۰/۸۹۹۹	۱۲۷	۰/۸۹۹۶
		۲۵۹	۰/۹۰۰۱	۱۲۸	۰/۹۰۰۰
۱	۰/۸	۴۵	۰/۷۹۹۳	۲۱	۰/۷۹۶۷
		۴۶	۰/۸۰۱۴	۲۲	۰/۸۰۱۱
	۰/۹	۱۹۱	۰/۸۹۹۸	۹۳	۰/۸۹۹۶
		۱۹۲	۰/۹۰۰۱	۹۴	۰/۹۰۰۲

جدول ۳: کران اطمینان پایین برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$، با استفاده از تقریب فیشر.

$\hat{\delta}$	مقادیر از پیش تنظیم شده $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$	n	۹۹٪	n	۹۵٪
۰	۰/۸	۷۰	۰/۷۹۹۸	۳۶	۰/۷۹۹۲
		۷۱	۰/۸۰۱۳	۳۷	۰/۸۰۲۰
	۰/۹	۲۷۵	۰/۸۹۹۹	۱۴۰	۰/۸۹۹۹
		۲۷۶	۰/۹۰۰۱	۱۴۱	۰/۹۰۰۳
۱	۰/۸	۵۲	۰/۷۹۸۸	۲۷	۰/۷۹۹۲
		۵۳	۰/۸۰۰۸	۲۸	۰/۸۰۲۹
	۰/۹	۲۰۶	۰/۸۹۹۸	۱۰۵	۰/۸۹۹۹
		۲۰۷	۰/۹۰۰۱	۱۰۶	۰/۹۰۰۴

جدول ۴: کران اطمینان پایین برای $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$، با استفاده از تقریب ویلسون-هیلفرتی.

$\hat{\delta}$	مقادیر از پیش تنظیم شده $C_{pm}/\hat{C}_{pm}$	n	۹۹٪	n	۹۵٪
۰	۰/۸	۶۶	۰/۷۹۹۸	۳۴	۰/۷۹۸۲
		۶۷	۰/۸۰۱۳	۳۵	۰/۸۰۱۱
	۰/۹	۲۶۷	۰/۸۹۹۸	۱۳۷	۰/۸۹۹۹
		۲۶۸	۰/۹۰۰۰	۱۳۸	۰/۹۰۰۳
۱	۰/۸	۴۹	۰/۷۹۸۸	۲۵	۰/۷۹۶۲
		۵۰	۰/۸۰۰۸	۲۶	۰/۸۰۰۲
	۰/۹	۲۰۰	۰/۸۹۹۸	۱۰۲	۰/۸۹۹۶
		۲۰۱	۰/۹۰۰۰	۱۰۳	۰/۹۰۰۱

در جداول ۵ و ۶، حجم نمونه‌ی تقریبی n ، برای کران‌های اطمینان پایین ۰/۹۹٪ و ۰/۹۵٪ هنگامی که به ترتیب $C_{Pk} =$ ۰/۸$\hat{C}_{Pm}$ و ۰/۹$\hat{C}_{Pm}$ می‌باشد، ارائه‌شده‌است.

از لحاظ کاربـــردی، حجم نمونه‌ی تقریبی n، فرضیه‌ی لزوم وجود نمونه‌های بزرگ جهت دستیابی به کران اطمینان مفیدی برای C_{pm} را تقویت می‌کند. اریبی جدول ۴ را می توان با نادیده گرفتن $\frac{۲}{۹f}$، بهتر تصحیح نمود. بنابراین، جدول ۶ به ۴ برتری دارد.

جدول ۵: حجم نمونه‌ی تقریبی n، با استفاده از تقریب فیشر.

$\hat{\delta}$	$C_{pm}/\hat{C}_{pm}$	n	n
		۹۹٪	۹۵٪
۰	۰/۸	۶۷/۶۴۸۳ $\cong$ ۶۸	۳۳/۸۱۹۳ $\cong$ ۳۴
	۰/۹	۲۷۰/۵۹۳۳ $\cong$ ۲۷۱	۱۳۵/۲۷۷۱ $\cong$ ۱۳۶
۱	۰/۸	۵۰/۷۳۶۳ $\cong$ ۵۱	۲۵/۳۶۴۵ $\cong$ ۲۶
	۰/۹	۲۰۲/۹۴۵۰ $\cong$ ۲۰۳	۱۰۱/۴۵۷۸ $\cong$ ۱۰۲

جدول ۶: حجم نمونه‌ی تقریبی n، با استفاده از تقریب ویلسون-هیلفرتی.

$\hat{\delta}$	$C_{pm}/\hat{C}_{pm}$	n	n
		۹۹٪	۹۵٪
۰	۰/۸	۶۲/۹۴۴۰ $\cong$ ۶۳	۳۱/۴۶۷۴ $\cong$ ۳۲
	۰/۹	۲۶۱/۳۸۹۳ $\cong$ ۲۶۲	۱۳۰/۶۷۷۱ $\cong$ ۱۳۱
۱	۰/۸	۴۷/۲۰۸۰ $\cong$ ۴۸	۲۳/۶۰۰۶ $\cong$ ۲۴
	۰/۹	۱۹۶/۰۴۲۰ $\cong$ ۱۹۷	۹۸/۰۰۶۸ $\cong$ ۹۹

۴ تعمیم‌هایی از C_{pm} برای فرآیندهایی با حدود فنی متقارن و نامتقارن

اساساً شاخص C_{pm} به‌دلیل عدم وجود معیار دقیقی برای سنجش اقلام نامطابق فرآیند که مقدار هدف را درنظرگیرد، حاصل‌شد. این شاخص، رابطه‌ی (۵)، در مخرج کسر شامل انحراف فرآیند $(\mu - T)^{۲}$ می‌باشد که منعکس کننده‌ی درجه‌ی هدف فرآیند است. C_{pm} در نرم‌افزارهای آماری و تحقیقات وابسته به کنترل کیفیت، با مشخصات حدود فنی نامتقارن استفاده می‌شود(کاشلر و هارلی[۱۴] ۱۹۹۲ و فرانکلین و وا زرمن[۱۵] ۱۹۹۲). بویلز (۱۹۹۱) در مقاله‌ای به حالات مختلف تأثیرگذار بر قابلیت فرآیند، با بررسی وضعیت μ نسبت به T، اشاره نمود.

تعمیم ساده‌ی C_{pm}، رابطه‌ی (۱۸)، برای فرآیندهایی با حدود فنی متقارن است که

$$C^{*}_{pm} = \frac{d^{*}}{۳\sqrt{\sigma^{۲} + (\mu - T)^{۲}}}. \qquad (۱۸)$$

به‌طوری‌که

$$d^{*} = \min\{D_l, D_u\} \quad ; \quad D_l = T - LSL \quad \text{و} \quad D_u = USL - T.$$

اگر $D_u = D_l$ آنگاه (حدود مشخصات فنی، متقارن خواهد شد).

[۱۴] Kushler and Hurley

[۱۵] Franklin and Wasserman

$$T = M = \frac{USL + LSL}{۲} \quad \text{و} \quad d^* = d = \frac{USL - LSL}{۲}.$$

اگر فرآیندهای E و F (که $\sigma_E = \sigma_F$، T و $\mu_E < T$ و $\mu_F > T$) در $|\mu_F - T| = |T - \mu_E|$ صدق کنند، مقدار شاخص برای دو فرآیند یکسان خواهدشد(چن[۱۶] و همکاران ۱۹۹۹).

وانمن[۱۷] (۱۹۹۴)کلاس کلی از شاخص‌های قابلیت، با حدود فنی نامتقارن معرفی کرد

$$C_{pa}(u,v) = \frac{d - |\mu - M| - u|\mu - T|}{۳\sqrt{\sigma^۲ + v(\mu - T)^۲}} \quad ; \quad u, v \geq ۰. \tag{۱۹}$$

او نشان داد که در بین مقادیر (u,v)های مختلف، $(u,v) = (۱,۳)$ و $(u,v) = (۰,۴)$ تولیدکننده‌ی دو شاخص است که نسبت به انحراف فرآیند از مقدار هدف، حساس‌تر می‌باشند. شاخص $C_{pa}(u,v)$ برای $u \geq ۱$ هنگام انتقال μ از T در هر جهت، کاهش می‌یابد. در حقیقت $C_{pa}(u,v)$ کاهش شدیـــدتری هنگام دورشدن μ از T می‌یابد. شاخص فوق به‌دلیل اینکه با دور شدن از T، نسبت به میان فاصله‌ی مشخصات‌سریع‌تر واکنش نشان می‌دهد، مفید می‌باشد(وانمن ۱۹۹۵).

گرینویچ و اسکفراس[۱۸] (۱۹۹۵) شاخص ناکارایی $C_{pp} = (۱/C^*_{pm})^۲$ را که تبدیلی ساده از C^*_{pm} می باشد، مطرح کرد. چن (۱۹۹۸) شاخص ناکارایی C''_{pp} را، تعمیمی از C_{pp} برای فرآیندی باحدود فنی نامتقارن، به صورت زیر معرفی نمود

$$\begin{aligned} &C''_{pp} = (A/D)^۲ + (\sigma/D)^۲ \; ; \\ &D = d^*/۳ \; , A = \max\{d(\mu - T)/D_u, \; d(T - \mu)/D_l\}. \end{aligned}$$

C''_{pp}، نامتقارنی حدود فنی مشخصات D_u و D_l را یکی می‌کند، پس کارایی فرآیند را صحیح‌تر از C_{pp}، نشان می‌دهد. C''_{pp} و C_{pp}، معیارهایی برای اندازه‌گیری ناکارایی فرآیند می‌باشند به‌طوری‌که مقادیر کوچکتر را به فرآیندهای کاراتر اختصاص می‌دهند. به‌طور مشابه، شاخص جدید C''_{pm} برای حدود فنی نامتقارن است که مقادیر بزرگتری را به فرآیند کارا اختصاص می دهد(مانند شاخص‌های سنتی C_p، C_{pk}، C_{pm} و C^*_{pm})

$$C''_{pm} = \frac{d^*}{۳\sqrt{\sigma^۲ + A^۲}}. \tag{۲۰}$$

اگر $T = M = \frac{USL+LSL}{۲}$(حدود فنی متقارن)، آنگاه $d^* = d$ و $A = |\mu - T|$، بنابراین C''_{pm} تبدیل به C_{pm} می‌شود. قابل ذکر است برای فرآیندی که میانگین بین حدود فنی

[۱۶] Chen
[۱۷] Vannman
[۱۸] Greenwich and Schaffracth

قرار می‌گیرد، $C''_{pm} \geq 0$ خواهد بود(مشابه حالت $C_{pa}(0,4)$ و C_{pk}).
بر اساس نظریه‌های اصلاح شده‌ی کیفیت مدرن، نزدیک شدن به مقدار هدف همانند در حدود مشخصات بودن فرآیند تأثیر گذار است. عامل A نشان می‌دهدکه ماکسیمم مقدار C''_{pm} در $\mu = T$ رخ می‌دهد، بدون توجه به اینکه حدود فنی متقارن($T = M$) یا نامتقارن ($T \neq M$) است. علاوه براین برای فرآیندهای E و F که $\sigma_E = \sigma_F$، $\mu_E < T$ و $\mu_F > T$ می‌باشد، به‌طوری‌که در $(\mu_F - T)/D_u = (T - \mu_E)/D_l$صدق می‌کنند، مقدار شاخص یکسانی برای فرآیندهای E و F خواهند داشت.هر چه میانگین فرآیند به مقدار هدف نزدیک‌تر گردد، مقدار شاخص C''_{pm} افزایش خواهدیافت.

۵ مقایسه‌ی شاخص‌های معرفی شده

شاخص C^*_{pm} برای دو فرآیند با واریانس و قدرمطلق انحراف‌های برابر یکسان می‌باشد، بنابراین C^*_{pm} بـــه‌درستی نمی‌تواند قابلیت فرآیندها را متمایز کنـــد. معیاری منطقی مخصوصاً برای فرآیندهایی با حدود فنی نامتقارن نمی‌باشد. از طرف دیگر شاخص C''_{pm} در فرآیندهایی که دارای واریانس یکسان و نسبت انحراف متناظر می‌باشند، همانند است. قابل توجه است که‌در این حالت فرض می‌کنیم دو فرآیند دارای میانگین زیان برابر می‌باشند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بر اساس ضوابط و معیارهای هدف فرآیند که وابسته به زیان فرآیند می‌باشند C''_{pm} بهتر از C^*_{pm} خواهد بود. C''_{pm} نه تنها نزدیکی به مقدار هدف را در نظر می‌گیرد، مانند C_{pm} و C^*_{pm}، بلکه حدود مشخصات نامتقارن نیز درآن تأثیر گذار است.
شاخص‌های C''_{pm}، $C_{pa}(1,3)$ و $C_{pa}(0,4)$ هنگام دورشدن میانگین فرآیند از مقدار هدف و نزدیک شدن به حدود مشخصات نسبت به حالتی‌که از حدود مشخصات دور می‌شود، سریع‌تر کاهش می‌یابند.
ماکسیمم مقدار شاخص‌های C_{pm}، C^*_{pm}، $C_{pa}(1,3)$ و C''_{pm} در $\mu = T$ رخ می‌دهد.
از طرف دیگر حداکثر مقدار $C_{pa}(0,4)$، هنگامی که μ بین T و M یا $\mu = T = M$ حاصل می‌گردد (به مقاله‌ی چن و همکاران ۱۹۹۹ رجوع شود). دو شاخص C''_{pm} و $C_{pa}(0,4)$ برای فرآیندی با میانگین μ که بین حدود فنی فرآیند قرار دارد، کمتر از صفر نمی‌باشد.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به‌معرفی شاخص قابلیت C_{pm} و تعمیم‌های جدیدی از آن پرداختیم. در شاخص‌های C''_{pm}، $C_{pa}(1,3)$ و $C_{pa}(0,4)$ هر چـــه میانگین فرآیند به مقدار هدف

نزدیک‌تر گردد، مقدار شاخص افزایش خواهد یافت. حداکثر مقدار شاخص‌های C_{pm}، C^*_{pm}، $C_{pa}(۱,۳)$ و C''_{pm} در $\mu = T$ و ماکسیمم مقدار $C_{pa}(۰,۴)$، زمانی‌که μ بین T و M یا $\mu = T = M$ به‌دست می‌آید. همچنین در برآورد حجم نمونه، می‌توان برآورد کران اطمینان دقیق پایین $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ را برای شاخص قابلیت‌یافت. این برآوردها نسبتاً برای $n \geq ۳۰$ دقیق می‌باشند. در واقع، این فرمول‌های تقریبی برای نمونه‌هایی بزرگ به حجم n منجر به کران دقیق‌تری می‌گردد.

۷ مراجع

Boyles, R. A. (1991). Process Taguchi capability indices. *Journal of Quality Technology*, **23**, 17-26.

Chan, K. L. , Cheng, W. S. and Spiring, A. F. (1988). A graphical technique for process capability. *ASQC Quality Congr. Trans.* , Dallas, 268–275.

Chen, K. S. (1998). Incapability index with asymmetric tolerances. *Statistica sinica*, **8**, 253-262.

Chen, K.S. , Pearn, W. L. and Lin, P. c. (1999). A new generalization of C_{pm} for processes with asymmetric tolerances. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering.* **6**. 383-398.

Chou, Y. M. , Owen, D. S. and Borrego, A. (1990). Lower confidence limits on process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **22**, 223-229.

Fisher, R. A. (1992). On the interpretation of $\chi^۲$ from contingence tables and calculation of p. *Journal of the Royal Statistical Society*, **85**, 87-94.

Franklin, L. A. and Wasserman, G. S. (1992). A note on the conservative nature of the tables of lower confidence limits for Cpk with a suggested correction. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **21**, 1165-1169.

Greenwich, M. and Jahr-Schaffracth, B. L. (1995). A process incapability index. *Quality and Reliability Engineering International*, **12**, 58-71.

Juran, J. M. (1974). *Quality Control Handbook.* 3rd ed. New York: McGraw Hill.

Kane, V.E. (1986). Process capability indices. *J.Qual.Thecnol*, **18**, 41-52.

Kushler R. H. and Hurley, P. (1992). Confidence bounds for capability indices. *Journal of Quality Technology*, **24**, 188-195.

Vannman, K. (1994). A class of capability indices in the case of asymmetric tolerances. *Commu. in Stat. : Theory and Methods*, **26**, 2049-2072.

Vannman, K. (1995). A unified approach to capability indices. *Statist, Sinica*, **5**, 805-820.

Wilson, E. B. and Hilferty, M. M. (1931). The distributions of Chi-square. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **17**, 184-688.

Wu, C. C. and Kuo, H. L. (2004). Sample size determination for the estimate of process capability indices. *Information and Management Sciences*, **1**, 1-12.