

حل معادلات غیرخطی حاکم بر ارتعاشات Rattling در دو چرخ دنده درگیر، با در نظر گرفتن ترم میرایی معادلات، به کمک روشهای بسط چند مقیاسی و معدل گیری

مصطفی رضایی^۱، انوشیروان فرشیدیان^۲

^۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، گروه مهندسی مکانیک - mos.rezaee80@yahoo.com

^۲ دانشگاه فردوسی مشهد، دانشیار گروه مهندسی مکانیک - Farshid@um.ac.ir

چکیده

یکی دیگر از روشهایی است که برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت چرخ دنده‌ها، به کار گرفته شده است [۴] و [۵]. در سالهای اخیر محققین با روشهای تحلیلی- تقریبی از قبیل روش بسط مستقیم پیشرو^۱ که از تکنیکهای پرتوربیشن است، به بررسی این پدیده پرداخته و نتایج خوبی بدست آورده‌اند [۶]. ولی در این روشها، بدلیل بوجود آمدن ترمهای سکولار در معادلات حرکت، از ترم مربوط به میرایی در معادلات حاکم صرفنظر شده است.

میرایی در درگیری سطوح دندانه‌ها ناشی از دو عامل می‌باشد، یکی در نتیجه اصطکاک ویسکوزیته روغن در بین دندانه‌ها می‌باشد، که یک میرایی ویسکوزیته خطی است و دیگری ناشی از اتلاف انرژی در برخورد الاستیک سطوح دندانه‌ها می‌باشد، که یک میرایی غیرخطی برخورد از نوع هرترز می‌باشد.

$$F_d = [D_{MV} + D_{MI}] \dot{u} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، ضرایب D_{MI} و D_{MV} به ترتیب ضرایب میرایی ویسکوزیته و برخورد می‌باشند. در سرعتهای پایین با بار سبک و ممان‌های اینرسی پایین، مقدار ضریب میرایی برخورد کوچک است و می‌تواند همراه با ضریب ویسکوزیته به صورت یک عدد ثابت در نظر گرفته شود [۷]. از این نکته در این تحقیق استفاده شده و میرایی با ضریب ثابت C در نظر گرفته شده است.

در این پژوهش، معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت، با در نظر گرفتن میرایی و لقی بین دندانه‌های درگیر، استخراج شده، سپس با روشهای بسط چند مقیاسی^۲ و معدل گیری^۳ که از تکنیک‌های پرتوربیشن می‌باشند، مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. مقایسه نتایج با حل دقیق، نشان می‌دهد روشهای بسط چند مقیاسی و معدل گیری، مقدار و محل قله پاسخ فرکانسی را با دقت بسیار خوبی بدست آورده‌اند.

معادلات حاکم

برای بررسی پدیده Gear Rattle ابتدا باید یک مدل قابل تحلیل ارتعاشی برای آن ارائه شود. در اغلب پژوهشها از سیستم جرم متمرکز برای تحلیل ارتعاشی دو چرخ دنده درگیر استفاده شده است. برای شبیه سازی دو چرخ دنده درگیر با استفاده از سیستم جرم

ارتعاشات Rattle در چرخ دنده‌های درگیر باعث تولید صداهای مزاحم و نیروهای دینامیکی در سیستمهای چرخ دنده‌ای می‌شود. در پژوهشهایی که با روشهای تحلیلی به بررسی این پدیده پرداخته شده است، بدلیل بوجود آمدن ترمهای سکولار در معادلات حرکت از ترم مربوط به میرایی در معادلات حاکم صرفنظر شده است. در مقاله حاضر، ابتدا معادلات حاکم بر حرکت، با در نظر گرفتن میرایی استخراج شده، سپس برخی از روشهای حل معادلات حاکم مورد بررسی قرار گرفته و مزایا و معایب هر روش در تحلیل معادلات حاکم ذکر شده است. در نهایت معادلات غیرخطی حاکم بر ارتعاشات دو چرخ دنده درگیر با روشهای بسط چند مقیاسی و معدل گیری که از تکنیک‌های پرتوربیشن می‌باشند، حل شده‌اند. مقایسه نتایج این روشها با نتایج حل دقیق تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

واژه های کلیدی

ارتعاشات غیرخطی، چرخ دنده‌های درگیر، پاسخ فرکانسی، روش معدل گیری، روش بسط چند مقیاسی.

مقدمه

یکی از راههای انتقال انرژی در سیستمهای دینامیکی استفاده از چرخ دنده است. در سیستمهای چرخ دنده‌ای، بین دندانه‌های درگیر چرخ دنده‌ها، مقداری لقی وجود دارد. لقی بین دندانه‌ها، هم به علت خطا در ساخت و هم به صورت از پیش تعیین شده برای جلوگیری از قفل شدن چرخ دنده‌ها، لحاظ می‌گردد [۱]. در یک جفت چرخ دنده درگیر وقتی گشتاور اینرسی که تابعی از شتاب زاویه‌ای می‌باشد از گشتاور بار بیشتر می‌شود به دلیل وجود لقی، دندانه‌ها از هم جدا می‌شوند. این جدایش و برخورد ناشی از اتصال مجدد دندانه‌ها، پدیده Gear Rattle را بوجود می‌آورد. تکرار این ضربه‌ها همراه با ارتعاش، پدیده‌ای به نام Vibro-Impact را بوجود می‌آورد که باعث تولید صداهای مزاحم و نیروهای دینامیکی بالا می‌شود [۲].

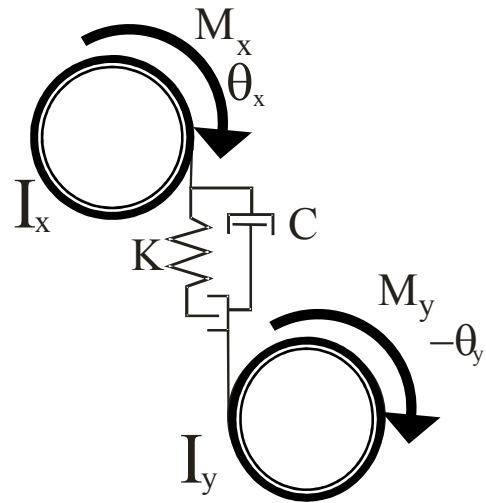
در برخی از پژوهشهایی که به بررسی این پدیده پرداخته‌اند، از روشهای عددی استفاده شده است [۳]. این روشها بدلیل عدم ارائه تاثیر پارامترهای مختلف سیستم روی پاسخ فرکانسی روشهای مناسبی برای تحلیل محسوب نمی‌شوند. روش بالانس هارمونیک،

¹ Straight Forward Method

² Multiple Scale Method

³ Averaging Method

متمركز فرض می‌شود دو چرخ دنده مطابق شکل ۱، با یک فنر و یک دمپر به هم وصل شده‌اند.



شکل ۱: مدل فیزیکی تماس دو چرخ دنده درگیر

برای حل معادله ارتعاش با روش معدل گیری، ترم مربوط به نیروی فنر را با یک چند جمله‌ای تقریب می‌زنیم. برای این کار، چند جمله‌ای مربوطه را از درجه سه در نظر گرفته‌ایم:

$$\frac{k}{I} f_s(u) = \lambda_1 u + \lambda_2 u^3 \quad (9)$$

که λ_1 و λ_2 با توجه به تقریب مجموع کمترین مربعات بدست می‌آید. با قرار دادن معادله (۹) به جای ترم مربوط به نیروی فنر در معادله (۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{c}{I} \frac{du}{dt} + \lambda_1 u + \lambda_2 u^3 = B_0 + B_1 \cos(\omega t) \quad (10)$$

معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۰)، معادله حاکم بر ارتعاشات دو چرخ دنده درگیر می‌باشد. که در آن اثر میرایی نیز در نظر گرفته شده است. در ادامه برخی از روشهای موجود برای حل معادلات حاکم بررسی شده است.

روشهای حل معادلات حاکم

در این قسمت از پژوهش، برخی از روشهای موجود برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت یک جفت چرخ دنده درگیر و معادلات غیرخطی مشابه، از قبیل روش عددی، روش بالانس هارمونیک^۱، روش هموتوپیی پرتوربیشن^۲ و تکنیکهای پرتوربیشن بررسی شده و مزایا و معایب آن به اختصار آورده شده است. نهایتاً دلایل انتخاب روشهای بسط چند مقیاسی و معدل گیری برای حل معادلات حاکم بر ارتعاشات دو چرخ دنده درگیر ذکر شده است.

- روش عددی

روشهای عددی گرچه کاربردی سهل و سریع را برای دستیابی به پاسخ زمانی و فرکانسی برای پارامترهای انتخابی سیستم به کاربر ارائه می‌دهد ولی با این وجود معمولاً جوابهای تحلیلی تقریبی ترجیح داده می‌شوند. از این رو که می‌توان آنها را برای پیش بینی مسیرهای حرکت، تحلیل تأثیر پارامترهای مختلف و اخذ نتایج کیفی به کار برد. بنابراین معمولاً روشهای تحلیلی تقریبی را برای تقریب جواب مسائل مربوط به سیستمهای غیرخطی به کار می‌برند.

- روش بالانس هارمونیک

روش بالانس هارمونیک، ساده‌ترین روش تحلیل تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی اجباری است. این روش هم برای سیستمهای غیرخطی ضعیف و هم برای سیستمهای غیرخطی قوی قابل کاربرد است. عیب این روش این است که نیاز به دسترسی اطلاعات بسیاری از جزئیات جواب داریم تا اینکه به جواب سازگار برسیم و باید جواب را با تعداد کافی از جملات در نظر بگیریم و مرتبه ضرایب مربوط به تمام هارمونیکهای صرف نظر شده را بررسی کنیم. در غیر اینصورت به جواب بی‌دقت یا کم دقتی خواهیم رسید.

با توجه به شکل ۱، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت دورانی دو درجه آزادی (θ_x و θ_y) این سیستم را با صرف نظر از لقی، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I_x \ddot{\theta}_x + [K(r_x \theta_x - r_y \theta_y) + C(r_x \dot{\theta}_x - r_y \dot{\theta}_y)] r_x = M_x \quad (2)$$

$$I_y \ddot{\theta}_y + [K(r_x \theta_x - r_y \theta_y) + C(r_x \dot{\theta}_x - r_y \dot{\theta}_y)] r_y = -M_y \quad (3)$$

معادلات (۲) و (۳)، با انتخاب مختصات نسبی $u = r_x \theta_x - r_y \theta_y$ ، به معادله یک درجه آزادی تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن اثر لقی و با ساده‌سازی می‌توان معادله حرکت دو چرخ دنده را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2}{dt^2} u + \frac{c}{I} \frac{du}{dt} + \frac{k}{I} f_s(u) = \bar{B}(t) \quad (4)$$

که در آن:

$$I = I_x I_y / (I_x r_x^2 + I_y r_y^2) \quad (5)$$

$$\bar{B}(t) = M_x r_x / I_x + M_y r_y / I_y \quad (6)$$

در رابطه (۴)، $\bar{B}(t)$ ، تابع تحریک و $f_s(u)$ تابع مربوط به نیروی فنر است. با نوشتن دو ترم اول سری فوریه تابع تحریک خواهیم داشت:

$$\bar{B}(t) = B_0 + B_1 \cos(\omega t) \quad (7)$$

تابع نیروی فنر یک تابع پله‌ای-خطی است. این تابع، با توجه به در نظر گرفتن لقی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_s(u) = \begin{cases} u - (1 - \alpha)b & u > b \\ \alpha u & -b \leq u \leq b \\ u + (1 - \alpha)b & u < -b \end{cases} \quad (8)$$

¹ Harmonic Balance Method (HBM)

² Homotopy Perturbation Method

همچنین این روش عموماً محدود به سیستمهای تحریک شده هارمونیک است و در هنگامی که هارمونیکهای بالاتر در بسط تابع نیروی تحریک مؤثرتر می گردند، دقت خود را از دست می دهد.

روش هموتویی پرتوربیشن

مهمترین مزیت این روش نسبت به سایر روشها، این است که برای سیستمهای غیرخطی قوی، جوابهای قابل قبولی ارائه می دهد [۱۸]. ولی با این وجود برای سیستمهای میرا، به سهولت قابل کاربرد نیست. لذا در این پژوهش، با توجه به در نظر گرفتن ترم میرایی در معادلات حرکت، روش هموتویی پرتوربیشن ابزار مناسبی برای بررسی معادلات حرکت نمی باشد.

روشهای پرتوربیشن (اختلالات)

اگر اندازه جمله غیرخطی یا دامنه حرکت کوچک باشد، برای جواب تقریبی می توان روش پرتوربیشن را بکار برد. روشهای پرتوربیشن این امکان را فراهم می سازند که خواص و تأثیر پارامترهای سیستم، بر پاسخ فرکانسی و زمانی آن، قابل مطالعه باشد. برخی از تکنیکهای پرتوربیشن از قبیل روش بسط مستقیم پیشرو و روش پارامترهای تصحیح شده، برای سیستمهای میرا ابزار مناسبی به شمار نمی روند [۹]. در روشهای بسط چند مقیاسی و معدل گیری نقایص مربوط به بسط مستقیم پیشرو و پارامترهای تصحیح شده، برطرف شده و در سیستمهای میرا از دقت بالاتری برخوردار هستند. برای این روشها موارد زیر قابل ذکر است [۹] و [۱۰]:

- ۱- این روش برای بدست آوردن جواب ارتعاشات غیرخطی اجباری ضعیف با دقت بالا، دارای کاربرد وسیع و گسترده ایست.
- ۲- ابزار مناسبی برای بررسی سیستمهای میرا و اجباری به شمار می رود که می توان عوامل میرایی و تحریک را در یک مرحله از تقریب به طور همزمان وارد ساخت و لذا تأثیر مسائلی نظیر تشدید زیر همساز و تشدید فوق همساز و پرش را می توان بررسی نمود.
- ۳- مفهوم فیزیکی مطلوب تری را از مقیاس های زمانی در بر گرفته، به دست می دهد.

۴- پاسخ حالت دائم و حالت گذرا، هر دو قابل دستیابی است.

- ۵- اطلاعات متنوعی را در مورد پایداری سیستم به دست می دهد در عین حالیکه حجم محاسبات و عملیات را افزایش می دهد.
- ۶- فقط برای سیستم های غیر خطی ضعیف (با جملات میرایی و یا بدون جملات میرایی) قابل کاربرد و معتبر است.

در این پژوهش، با توجه به در نظر گرفتن میرایی در معادلات حرکت، روشهای بسط چند مقیاسی و معدل گیری، بهترین روش برای تحلیل معادلات حرکت یک جفت چرخ دنده درگیر می باشند. همچنین در این پژوهش، معادلات حاکم بر حرکت به شکل مناسب استخراج شده اند و باعث شده پارامتر پرتوربیشن بسیار کوچک شود و ترم غیرخطی ضعیف گردد.

روش بسط چند مقیاسی

برای حل معادله حاکم (رابطه (۱۰)) به روش بسط چند مقیاسی، ابتدا با تغییر پارامترهای سیستم، معادله حاکم بر حرکت به شکلی

ساده تر و قابل حل با این روش استخراج شده است. با این کار علاوه بر ساده تر شدن معادلات، این امکان را به ما می دهد که پارامتر پرتوربیشن (ε) کوچک انتخاب شود و دقت روش افزایش یابد. لذا پارامترهای جدید به شکل زیر تعریف شده اند:

$$t^* = \frac{t}{T} \quad (11) \quad u^* = \frac{u}{U} \quad (12)$$

$$\lambda_1^2 T^2 = 1 \quad (13) \quad \lambda_2 T^2 U^2 = \varepsilon \quad (14)$$

$$\mu = \frac{cT}{2\ell} \quad (15) \quad \omega^* = \omega T = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (16)$$

$$\varepsilon B_0^* = \frac{B_0 T^2}{U} \quad (17) \quad \varepsilon B_1^* = \frac{B_1 T^2}{U} \quad (18)$$

با جایگزینی روابط (۱۱) تا (۱۸) در رابطه (۱۰)، معادله حاکم، به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{u}^* + u^* + 2\varepsilon\mu\dot{u}^* + \varepsilon u^{*3} = \varepsilon B_0^* + \varepsilon B_1^* \cos(\omega^* t^*) \quad (19)$$

در روش بسط چند مقیاسی، به جای استفاده از تابع پاسخ یک متغیره ($u = u(t^*)$)، تابع پاسخ را به صورت چند متغیره، به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$u^* = u^*(t^*; \varepsilon) = u^*(t^*, \varepsilon^2 t^*, \varepsilon^3 t^*, \dots; \varepsilon) \quad (20)$$

یا به عبارتی دیگر:

$$u^* = u^*(t^*; \varepsilon) = u^*(T_0, T_1, T_2, T_3, \dots; \varepsilon) \quad (21)$$

که در آن:

$$T_0 = t^*, T_1 = \varepsilon t^*, T_2 = \varepsilon^2 t^*, T_3 = \varepsilon^3 t^*, \dots \quad (22)$$

اگر ε کوچک انتخاب شود، تغییرات مقیاس T_1 کم است و تغییرات مقیاس های T_2 و T_3 ... به ترتیب بسیار کمتر از قبلی می شود.

اکنون به جای محاسبه u^* بر حسب تابعی از t^* ، مقدار u^* را بر حسب تابعی از $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$ محاسبه می کنیم. با توجه به قانون زنجیره ای داریم:

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (23)$$

$$\frac{d^2}{dt^{*2}} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \quad (24)$$

با توجه به روابط (۲۳) و (۲۴)، معادله (۱۹) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u^*}{\partial T_0 \partial T_1} + 2\varepsilon\mu \frac{\partial u^*}{\partial T_0} + \dots \quad (25)$$

$$\varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial T_1^2} \right) + u^* + \varepsilon u^{*3} + \dots = \varepsilon B_0^* + \varepsilon B_1^* \cos(\omega^* T_0)$$

حل تقریبی رابطه (۲۵) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u^* = u_0^*(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1^*(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (26)$$

رابطه (۲۶) را در رابطه (۲۵) جایگزین می کنیم و در آن از جملاتی که توان پارامتر ε بیشتر از یک است، به علت کوچک بودن، صرف نظر می کنیم:

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} B_1^* \sin \beta \quad (42)$$

$$a\beta' = \sigma a - \frac{3}{8} a^3 + \frac{1}{2} B_1^* \cos \beta \quad (43)$$

با جایگزینی شکل قطبی $A = \frac{1}{2} a e^{i\psi}$ در معادله (۳۲) داریم:

$$u_0^* = a \cos(T_0 + \psi) \quad (44)$$

لذا با توجه به رابطه (۲۶) خواهیم داشت:

$$u^* = a \cos(T_0 + \psi) + o(\varepsilon) \quad (45)$$

و از آنجا که $\psi = \sigma T_1 - \beta$ و طبق رابطه (۲۲)، $T_0 = t^*$ و $T_1 = t^*$ می‌باشد. لذا پاسخ نهایی معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات به شکل زیر در می‌آید:

$$u^* = a \cos(\omega^* t^* - \beta) + O(\varepsilon) \quad (46)$$

که a و β ، از روابط (۴۲) و (۴۳) بدست می‌آیند.

برای محاسبه پاسخ فرکانسی حالت پایدار سیستم از این واقعیت که a و β ثابت هستند، استفاده می‌کنیم، لذا $a' = 0$ و $\beta' = 0$ در نظر میگیریم و با توجه به روابط (۴۲) و (۴۳) خواهیم داشت:

$$\mu a = \frac{1}{2} B_1^* \sin \beta \quad (47)$$

$$-a\sigma + \frac{3}{8} a^3 = \frac{1}{2} B_1^* \cos \beta \quad (48)$$

با جمع کردن مربع روابط (۴۷) و (۴۸) داریم:

$$\mu^2 a^2 + (\sigma - \frac{3}{8} a^2)^2 a^2 - \frac{1}{4} B_1^{*2} = 0 \quad (49)$$

رابطه (۴۹)، پاسخ فرکانسی برای معادله حاکم با متغیرهای دارای علامت * می‌باشد. با جایگزینی مقدار معادل پارامترهای دارای علامت *، پاسخ فرکانسی بر حسب متغیرهای اصلی سیستم (پاسخ فرکانسی برای رابطه (۱۰)) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\frac{c^2 T^2}{4\varepsilon^2 I^2 U^2} a^2 + \left[\frac{\omega T - 1}{\varepsilon} - \frac{3}{8} \frac{a^2}{U^2} \right]^2 \frac{a^2}{U^2} - \frac{B_1^2 T^2}{4\omega^2 \varepsilon^2} = 0 \quad (50)$$

رابطه (۵۰) پاسخ فرکانسی سیستم ارتعاش دو چرخ‌دنده درگیر است. در این رابطه U^2 و T^2 با توجه به روابط (۱۳) و (۱۴) برابرند با:

$$U^2 = \frac{\varepsilon \lambda_1^2}{\lambda_2} \quad (51) \quad T^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \quad (52)$$

همانطور که در رابطه (۵۰) مشاهده می‌شود، تأثیر ضریب میرایی (c) بر پاسخ فرکانسی سیستم مشهود است.

روش معدل گیری

برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی معادله حاکم بر ارتعاشات با روش معدل گیری، مانند روش بسط چند مقیاسی از معادله حرکت با متغیرهای دارای علامت * استفاده می‌کنیم. در معادله (۱۹) وقتی $\varepsilon = 0$ باشد جواب عمومی آن به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u^* = a \cos(t^* + \varphi) \quad (53)$$

که در آن a و φ ثابت هستند. با مشتق گیری از رابطه (۵۳) خواهیم داشت:

$$\dot{u}^* = -a \sin(t^* + \varphi) \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0^* + a u_1^* + a u_0^{*3} = \quad (27)$$

$$\varepsilon B_0^* + \varepsilon B_1^* \cos(\omega^* T_0)$$

با تفکیک جملات با ضرایب ε^0 و ε^1 ، داریم:

$$D_0^2 u_0^* + u_0^* = 0 \quad (28)$$

$$D_0^2 u_1^* + u_1^* = \quad (29)$$

$$-2D_0 D_1 u_0^* - 2\mu D_0 u_0^* - u_0^{*3} + B_0^* + B_1^* \cos(\omega^* T_0)$$

در روابط (۲۸) و (۲۹)، D_0 و D_1 عبارتند از:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0} \quad (30)$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1} \quad (31)$$

حل عمومی معادله دیفرانسیل معمولی (۲۸) عبارت است از:

$$u_0^* = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0} \quad (32)$$

با جایگزینی رابطه (۳۲) در رابطه (۲۹) و ساده‌سازی، خواهیم داشت:

$$D_0^2 u_1^* + u_1^* = \quad (33)$$

$$-(2iA' + 2i\mu A + 3A^2 \bar{A}) e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0} + B_0^* + \frac{1}{2} B_1^* e^{i\omega^* T_0} + cc$$

با در نظر گرفتن حالت رزونانس اولیه ($\omega^* \approx 1$) و با توجه به کوچک بودن ε می‌توان ω^* را به صورت زیر تعریف کرد [۱۰]:

$$\omega^* = 1 + \varepsilon \sigma \quad (34)$$

در نتیجه:

$$\omega^* T_0 = (1 + \varepsilon \sigma) T_0 = T_0 + \sigma \varepsilon T_0 = T_0 + \sigma T_1 \quad (35)$$

با جایگزینی رابطه (۳۵) در (۳۳) داریم:

$$D_0^2 u_1^* + u_1^* = \quad (36)$$

$$-(2iA' + 2i\mu A + 3A^2 \bar{A}) e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0} + B_0^* + \frac{1}{2} B_1^* e^{i\sigma T_1} e^{iT_0} + cc$$

با جداسازی جملات سکولار خواهیم داشت:

$$2iA' + 2i\mu A + 3A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} B_1^* e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (37)$$

با قرار دادن فرم قطبی A به صورت $A = \frac{1}{2} a e^{i\psi}$ در رابطه

(۳۷)، می‌توان رابطه (۳۷) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$ia' e^{i\psi} - a\theta' e^{i\psi} + i\mu a e^{i\psi} + \frac{3}{8} a^3 e^{i\psi} - \frac{1}{2} B_1^* e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (38)$$

یا می‌توان نوشت:

$$ia' - a\psi' + i\mu a + \frac{3}{8} a^3 - \frac{1}{2} B_1^* \cos(\sigma T_1 - \psi) - \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} i B_1^* \sin(\sigma T_1 - \psi) = 0$$

با جداسازی قسمتهای حقیقی و موهومی رابطه (۳۹) خواهیم داشت:

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} B_1^* \sin(\sigma T_1 - \psi) \quad (40)$$

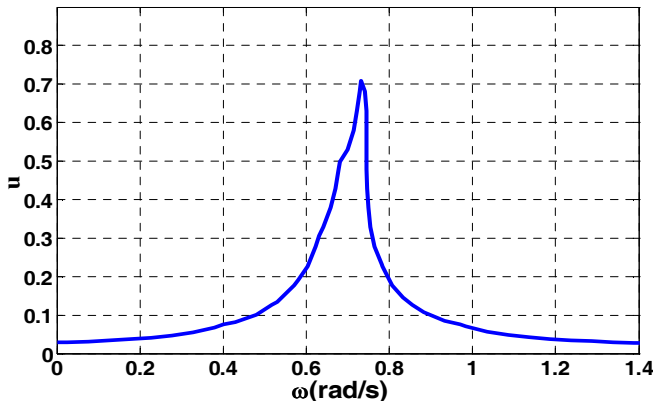
$$a\psi' = \frac{3}{8} a^3 - \frac{1}{2} B_1^* \cos(\sigma T_1 - \psi) \quad (41)$$

با فرض $\beta = \sigma T_1 - \psi$ خواهیم داشت: $\beta' = \sigma - \psi'$ و با جایگزینی

این روابط در روابط (۴۰) و (۴۱) خواهیم داشت:

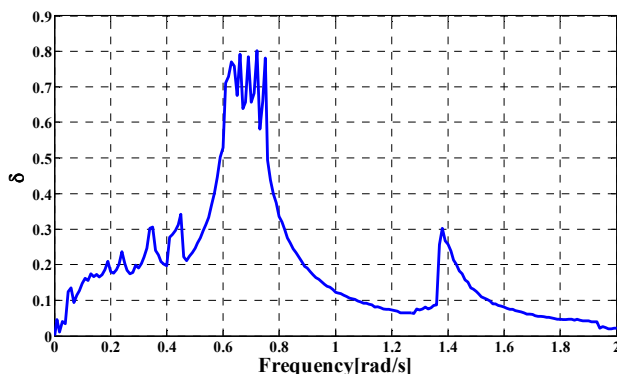
پارامتر	I	k	α	C	b	B_1	B_0
مقدار عددی	1	1	0.25	0.05	10°	0.03	0.05

لازم به ذکر است برای ایجاد امکان مقایسه نتایج بدست آمده از این پژوهش با نتایج حل دقیق، پارامترهای عددی جدول ۱ کاملاً مشابه با پارامترهای عددی به کار رفته برای رسم نمودار پاسخ فرکانسی با حل دقیق [۶]، انتخاب شده است.



شکل ۲: نمودار پاسخ فرکانسی ارتعاشات دو چرخ دنده درگیر با استفاده از روش‌های معدل گیری و بسط چند مقیاسی برای $\varepsilon = 0.01$

شکل ۳، نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با استفاده از حل دقیق، را نشان می‌دهد. با مقایسه شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود که با وجود تفاوت‌هایی در پاسخ فرکانسی بدست آمده از روش‌های معدل گیری و بسط چند مقیاسی در قیاس با حل دقیق، این روش‌ها توانسته‌اند مقدار و موقعیت قله اصلی پاسخ فرکانسی را به دقت خوبی بدست آورند که برای جلوگیری از تشدید، حائز اهمیت است. ولی با این حال این روش‌ها از پیدا کردن قله‌های جزئی‌تر عاجزند.



شکل ۳: نمودار پاسخ فرکانسی ارتعاشات دو چرخ دنده درگیر بدست آمده از حل دقیق [۶]

نتیجه‌گیری

هنگامی که $\varepsilon \neq 0$ باشد، باز هم جواب را به صورت معادله (۱۹) در نظر می‌گیریم با این تفاوت که a و φ ثابت نیستند بلکه وابسته به زمان هستند. حال با این فرض، از معادله (۵۳) دو بار نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\dot{u}^* = -a \sin(t^* + \varphi) + \dot{a} \cos(t^* + \varphi) - a\dot{\varphi} \sin(t^* + \varphi) \quad (55)$$

$$\ddot{u}^* = -a \cos(t^* + \varphi) - \dot{a} \sin(t^* + \varphi) - a\dot{\varphi} \cos(t^* + \varphi) \quad (56)$$

با جایگذاری معادلات (۵۳)، (۵۵) و (۵۶) در معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{a} \sin(t^* + \varphi) + a\dot{\varphi} \cos(t^* + \varphi) = & \quad (57) \\ -2\varepsilon\mu a \sin(t^* + \varphi) + \varepsilon a^3 \cos^3(t^* + \varphi) - \varepsilon B_0^* - \varepsilon B_1^* \cos(\omega^* t^*) & \end{aligned}$$

همچنین از مقایسه معادلات (۵۴) و (۵۵) داریم:

$$\dot{a} \cos(t + \varphi) - a\dot{\varphi} \sin(t + \varphi) = 0 \quad (58)$$

اکنون طرفین معادله (۵۸) را در $\cos(t + \varphi)$ و طرفین معادله (۵۷) را در $\sin(t + \varphi)$ ضرب کرده و سپس آن دو را با هم جمع می‌کنیم. پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$\dot{a} = -\varepsilon\mu a + \varepsilon\mu a \cos(2t + 2\varphi) + \frac{1}{4} \varepsilon a^3 \sin(2t + 2\varphi) + \frac{1}{8} \varepsilon a^3 \sin(4t + 4\varphi) \quad (59)$$

$$- \varepsilon B_0^* \sin(t + \varphi) - \frac{1}{2} \varepsilon B_1^* \sin[(1 + \omega)t + \varphi] - \frac{1}{2} \varepsilon B_1^* \sin[(1 - \omega)t + \varphi]$$

$$a\dot{\varphi} = -\varepsilon\mu a \sin(2t + 2\varphi) + \frac{3}{8} \varepsilon a^3 + \frac{1}{2} \varepsilon a^3 \cos(2t + 2\varphi) + \frac{1}{8} \varepsilon a^3 \cos(4t + 4\varphi) \quad (60)$$

$$- \varepsilon B_0^* \cos(t + \varphi) - \frac{1}{2} \varepsilon B_1^* \cos[(1 + \omega)t + \varphi] - \frac{1}{2} \varepsilon B_1^* \cos[(1 - \omega)t + \varphi]$$

با در نظر گرفتن حالت رزونانس اولیه خواهیم داشت [۱۰]:

$$\dot{a} = -\varepsilon\mu a - \frac{1}{2} \varepsilon B_1^* \sin[(1 - \omega)t + \varphi] \quad (61)$$

$$a\dot{\varphi} = \frac{3}{8} \varepsilon a^3 - \frac{1}{2} \varepsilon B_1^* \cos[(1 - \omega)t + \varphi] \quad (62)$$

روابط (۶۱) و (۶۲) معادل با روابط (۴۰) و (۴۱) هستند. لذا با ادامه عملیات مشابه با روش بسط مقیاسی، پاسخ فرکانسی حالت پایدار سیستم کاملاً مشابه با روش بسط چند مقیاسی، به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{c^2 T^2}{4\varepsilon^2 I^2 U^2} a^2 + \left[\frac{\omega\Gamma - 1}{\varepsilon} - \frac{3a^2}{8U^2} \right]^2 \frac{a^2}{U^2} - \frac{B_1^2 T^2}{4\omega^2 \varepsilon^2} = 0 \quad (63)$$

یکسان بدست آمدن نتایج حاصله از روش‌های معدل گیری و بسط چند مقیاسی، دلیل بر صحت نتایج است. برای صحت گذاری بیشتر بر نتایج بدست آمده، در ادامه نمودار پاسخ فرکانسی بدست آمده از این روش‌ها رسم شده و با نتایج حل دقیق مقایسه شده است.

صحت سنجی نتایج

به منظور صحت سنجی نتایج، با استفاده از مقادیر عددی جدول ۱ و معادله پاسخ فرکانسی بدست آمده از روش معدل گیری و بسط چند مقیاسی، نمودار پاسخ فرکانسی سیستم رسم شده که در شکل ۲ قابل مشاهده است.

جدول ۱: مقادیر عددی بدون بعد پارامترهای سیستم

جابجایی زاویه‌ای چرخ‌دنده‌ها، rad	θ_y, θ_x
سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده‌ها، rad/s	$\dot{\theta}_y, \dot{\theta}_x$
شتاب زاویه‌ای چرخ‌دنده‌ها، rad/s ²	$\ddot{\theta}_y, \ddot{\theta}_x$
فرکانس تحریک، rad/s	ω
فرکانس طبیعی سیستم، rad/s	ω_0
فاز اولیه سیستم ارتعاشی، rad	ψ

مراجع

- [1] Comparin, R. J., 1988. "A study of the frequency response of impact pairs with application to automotive gear rattle dissertation". *The Ohio State University*.
- [2] Q.Feng and F. Pfeiffer., 1998. "STOCHASTIC MODEL ON RATTLING SYSTEM". *Journal of Sound and Vibration*, 215(3), pp. 439-453.
- [3] S. L. T. de Souza, I. L. Caldas, J. M. Balthazar, R. M. L. R. F. Brasil., 2002., "Analysis of Regular and Irregular Dynamic of Non Ideal Gear Rattling Problem"., *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Print ISSN 0100-7386, J. Braz. Soc. Mech. Sci. vol.24, no.2, Rio de Janeiro,.
- [4] T. C. Kim and R. Singh., 2002, "Frequency Domain Analysis of Rattle in Gear Pairs and Clutches", *The 2002 International Congress and Exposition on Noise Control Engineering Dearborn*, MI, USA. August 19-21.
- [5] T.C. Kim, T.E. Rook, R. Singh., 2005, "Super -and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method", *Journal of Sound and Vibration* 28 1, pp 965-993
- [6] A. Farshidianfar, H. Moeenfar., 2007, "Frequency Response Calculation of Nonlinear Vibration in Gear Systems", *Journal of Multi-body Dynamics*, August 22.
- [7] Hunt, K. H. and Crossley, F. R. E., 1975, "Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact", *Journal of Applied Mechanics*, *Trans. ASME* 97, pp 440-445.
- [8] G.M. Abd El-Latif., 2005, "A homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems", *Mathematics and Computation* 169 (2005) 576-588, 82524 Sohag, Egypt.
- [9] A. H. Nayfe and F. D. T. Mook., 1979, *Non Linear Oscillations*, JOHN WILEY & SONS, NY(1979).
- [10] A. H. Nayfe., 1989, *Problems in Perturbation*, JOHN WILEY & SONS, NY(1989).

در این پژوهش، پاسخ فرکانسی ارتعاشات یک جفت چرخ دنده درگیر، با در نظر گرفتن لقی بین دندانه‌ها و میرایی سطوح درگیر، با استفاده از روشهای بسط چند مقیاسی و معدل‌گیری بدست آمد و صحت نتایج با مقایسه آنها با نتایج حل دقیق تایید شد. مهمترین دستاوردهای این پژوهش عبارتند از:

- ۱- نمایش توانمندی روش‌های بسط چند مقیاسی و معدل‌گیری در تحلیل سیستم‌های ارتعاشی غیرخطی اجباری و میرا.
- ۲- محاسبه پاسخ فرکانسی ارتعاشات دو چرخ‌دنده درگیر و تعیین محل و قله اصلی پاسخ فرکانسی.
- ۳- فراهم شدن امکان بهینه‌سازی پارامترهای سیستم برای جلوگیری از تشدید، با توجه به مشهود بودن اثر پارامترهایی نظیر لقی و میرایی بر پاسخ فرکانسی.

فهرست علائم

دامنه ارتعاش سیستم، m	a
تابع تحریک، N	\bar{B}
ضرایب سری فوریه تابع تحریک، N	B_1, B_0
لقى، rad	b
ضریب میرایی، Nms	C
ضریب میرایی برخورد، Nms	D_{MI}
ضریب میرایی ویسکوزیته، Nms	D_{MV}
نیروی دمپر، N	F_d
نیروی فنر، N	F_s
ممان اینرسی معادل، kgm ⁴	I
ممان اینرسی چرخ دنده‌ها، kgm ⁴	I_y, I_x
سفتی تماسی، N/m	K
گشتاور اعمال شده به چرخ‌دنده‌ها، Nm	M_y, M_x
شعاع چرخ‌دنده‌ها، m	r_y, r_x
زمان، s	t
جابجایی نسبی، m	u
سرعت نسبی، m/s	\dot{u}
شتاب نسبی، m/s ²	\ddot{u}
علائم یونانی	
نسبت سفتی در دو مرحله تماس	α
پارامتر پرتوربیشن	ε
فاز اولیه سیستم ارتعاشی، rad	φ