ویژگیهایی از رده توزیعهای دارای نرخ خطر تعمیم یافته صعودی

علی چرخی - غلامرضا محتشمی برزادران

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: بسیاری از رده توزیع‌های موجود در قابلیت را می‌توان براساس ترتیب‌های تصادفی مختلف مشخصه‌سازی نمود که از آن جمله می‌توان به ترتیب تصادفی متفرق کننده، ترتیب تصادفی ستاره و ترتیب مقعر(محدب) صعودی اشاره کرد. در این مقاله قصد داریم ضمن یادآوری رده توزیع‌های مختلف در قابلیت اعتماد و بیان برخی از ترتیب‌های تصادفی، بر اساس لارویر[۱] (۲۰۰۶)، پال[۲] (۲۰۰۵) و فرانکو و شیکد[۳] (۲۰۰۷) به تعمیم برخی از مشخصه‌سازی‌ها برای نرخ خطر تعمیم یافتـــه صعودی می‌پردازیم و در پایان براساس مشخصه‌سازی‌های انجام شده، رابطه بین رده توزیع‌های دارای خاصیت نرخ خطر تعمیم یافته صعودی و دیگر رده توزیع‌های قابلیت اعتماد را بیان و اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ترتیب تصادفی، نرخ خطر، نرخ خطر تعمیم یافته

۱ مقدمه

در هر جامعه مدرن مدیران و مهندسان فنی، مسئول برنامه‌ریزی، طراحی، ساخت و بهره‌برداری از ساده‌ترین سیستم‌ها تا پیچیده‌ترین آنها هستند. از کار افتادن سیستم‌ها موجب وقوع اختلال در سطوح مختلف می‌شود و می‌تواند تهدید جدیدی برای جامعه و محیط زیست تلقی گردد. بنابراین یک پرسش اساسی مطرح می‌گردد و آن اینکه قابلیت اعتماد سیستم در طول عمر کاری آینده‌اش به چه میزان است.

برای پاسخ به سوال مطرح شده تا کنون مطالعات و پژوهش‌های بسیاری صورت گرفته و معیارهای بسیاری برای قابلیت اطمینان یک سیستم معرفی گردیده است. یکی از مهم‌ترین معیارها، نرخ‌خطر سیستم است که معمولاً به مدت زمان سرویس دهی سیستم بستگی دارد و قالبا در دوره زمانی فعالیت سیستم تغییر می‌کند. اکثر دیگر معیارهای ارزیابی سیستم را می‌توان بر اساس نرخ خطر سیستم تبیین نمود.

[۱] Lariviere
[۲] Paul
[۳] Franco and Shaked

کاربرد نرخ خطر تنها به صنعت محدود نمی‌گردد. در اقتصاد برای تعیین قیمت یک کالا بر اساس درخواست‌های مشتری، از نرخ خطر تعمیم یافته استفاده می‌گردد که شباهت زیادی به نرخ خطر دارد.
تاکنون مشخصه‌سازی‌های بسیاری برای رده‌توزیع‌های موجود در قابلیت‌اعتماد صورت گرفته است. اما از آنجا که نرخ خطر تعمیم یافته به تازه‌گی معرفی گردیده است، چندان مورد توجه قرار نگرفته است. در این مقاله قصد داریم ویژگی‌های جدیدی از نرخ خطر تعمیم یافته را براساس ترتیب‌های تصادفی معرفی نموده و نتایج حاصل از آنها را بیان کنیم.

۲ معرفی برخی از رده توزیع‌های مهم در قابلیت اعتماد

تا کنون رده توزیع‌های متفاوتی در قابلیت اعتماد معرفی شده‌اند. در این بخش ابتدا رده توزیع‌های دارای نرخ خطر صعودی را که در صنعت کاربردهای فراوانی دارند، معرفی می‌کنیم. پس از آن برخی دیگر از رده توزیع‌های پرکاربرد در قابلیت اعتماد و رابطه بین آنها رابیان می‌کنیم. تعاریف زیر را می‌توان در کتابها و مقالات بسیاری از جمله بارلو و پروشان[۴] (۱۹۷۵) و مارشال و الکین[۵] (۲۰۰۷) یافت.

تعریف **۳** : اگر متغیر تصادفی و نامنفی X دارای تابع توزیع مطلقا پیوسته F و تابع چگالی f باشد، آنگاه تابع نرخ خطر[۶] X برای تمام مقادیر X که $(R(x) = 1 - F(x) > 0)$ به صورت $r(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$ تعریف می‌شود.

تعریف **۴** : متغیر تصادفی X دارای نرخ خطر صعودی[۷] (IFR) است هرگاه $r(x)$ به ازای تمامی مقادیر x روی دامنه، تابعی صعودی نسبت به x باشد.

بارلووپروشان(۱۹۷۵) ثابت کردند که عبارات زیر با یکدیگر معادلند:

۱) توزیع $F(x)$ دارای خاصیت IFR است.
۲) $\ln R(x)$ برای مقادیر x که $R(x) > 0$ است، تابعی مقعر می‌باشد.
۳) اگر $x_1 \le x_2$ و $y_1 \le y_2$

$$\begin{vmatrix} R(x_1 - y_1) & R(x_1 - y_2) \\ R(x_2 - y_1) & R(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

---
۴ Barlow and Proschan
۵ Marshall and Olkin
۶ Failure Rate
۷ Increasing Failure Rate

اگر X یک متغیر تصادفی طول عمر باشد و برای هر t که $t \in \{t : R(t) > 0\}$ متغیر تصادفی X_t را به صورت $X_t = [X - t | X > t]$ تعریف کنیم، آنگاه X_t دارای تابع بقاء $R_t(x) = \frac{R(x+t)}{R(t)}$ می‌باشد که احتمال اینکه یک قطعه با طول عمر t، تا x واحد زمانی دیگرفعال باشد را نشان می‌دهد. به سادگی دیده می‌شود که اگر توزیع $F(x)$ دارای خاصیت IFR باشد، آنگاه توزیع $F_t(x)$ نیز دارای خاصیت IFR می‌باشد.

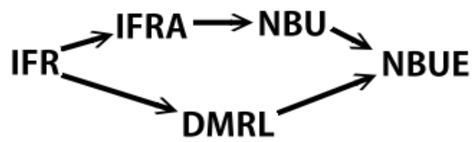
تعریف **۵** : متغیر تصادفی طول عمر X دارای خاصیت میانگین نرخ خطر صعودی[8] $(IFRA)$ است هر گاه $x^{-1} \log R(x)$ بر روی دامنه X نانزولی باشد.

تعریف **۶** : متغیر تصادفی نامنفی X دارای خاصیت میانگین طول عمر باقیمانـــده کاهشی[9] $(DMRL)$ است اگر $\int_x^\infty R(u)du / R(x)$ نسبت به x نزولی باشد.

تعریف **۷** : توزیع طول عمر F دارای خاصیت نو بهتر از کهنه[10] (NBU) است هر گاه برای هر $x, t > 0$ رابطه $R(x+t) \leq R(x)R(t)$ برقرار باشد.

تعریف **۸** : توزیع طول عمر F دارای خاصیت امید نو بهتر از کهنه[11] $(NBUE)$ است اگر رابطه $\int_x^\infty R(u)du \leq \mu R(x)$ برقرار باشد که μ میانگین توزیع F است.

اکنون که با برخی از رده توزیع‌های متعارف در قابلیت اعتماد آشناگشتیم، می‌توانیم روابط بین این خانواده از توزیع‌ها را مشخص‌کنیم. نمودار زیر تبیین‌کننده روابط‌موجود بین تعاریف ارائه شده‌است.(لی و زی[12] ۲۰۰۶) بنابراین اگر نرخ خطر یک توزیع



شکل ۱.: رابطه بین رده توزیع‌های مختلف

[8] Increasing Failure Rate in Average
[9] Decreasing Mean Residual life
[10] New Bettter than Used
[11] New Better than Used in Expectation
[12] Lai and Xie

صعودی باشد، تمامی تعاریف بیان شده را می‌توان نتیجه گرفت.
تذکر: عکس روابط فوق همواره برقرار نیست. برای اطلاعات بیشتر به رضایی و همکاران (۱۳۸۷) مراجعه کنید.

۳ نرخ خطر تعمیم یافته و برخی ویژگی‌های آن

کاربرد نرخ خطر تعمیم یافته[۱۳] در زنجیره‌های اقتصادی می‌باشد. اگر یک کالا دارای قیمت x باشد و مقدار تقاضا برای این کالا از توزیع $R(x)$ پیروی کند، در این صورت هدف بیشینه کردن مقدار درآمد حاصل از فروش این کالا یعنی $\pi(x) = xR(x)$ است. بنابراین قیمت کالا را باید به گونه‌ای تعیین کنیم که:

$$\pi'(x^*) = R(x^*)(1 - x\frac{f(x)}{R(x)}) = 0 \qquad (1)$$

بنابراین حل این معادله به رفتار تابع $g(x) = x\frac{f(x)}{R(x)}$ بستگی دارد. لارویر و پورتوس[۱۴] (۲۰۰۱) این تابع را تابع نرخ خطر تعمیم یافته نام‌گذاری کردند. بدیهی است که $g(x) = xr(x)$.

تعریف **۹** : تابع توزیع بقاء F دارای خاصیت نرخ خطر تعمیم یافته صعودی[۱۵] $(IGFR)$ است هر گاه تابع $g(x)$ برای $x > 0$ نسبت به x صعودی باشد.

اگر تابع $g(x)$ تابعی صعودی باشد، معادله (۱) تنها در $g(x) = 1$ مقدار صفر را اختیار می‌کند و بنابراین دارای جواب یکتا می‌باشد. با توجه به تعریف تابع $g(x)$، به وضوح دیده می‌شود که هرگاه متغیرتصادفی X دارای خاصیت IFR باشد، آنگاه $g(x)$ نیز صعودی است به عبارت دیگرمتغیر تصادفی X دارای خاصیت $IGFR$ می‌باشد. عکس این موضوع همواره برقرار نیست. به عبارت دیگر اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت $IGFR$ باشد، لزومی ندارد که دارای خاصیت IFR نیز باشد. برای مثال فرض کنید X دارای توزیع $Gamma(k,\theta)$ باشد. این توزیع برای تمام مقادیر k دارای خاصیت $IGFR$ می‌باشد اما برای $k < 1$ دارای خاصیت IFR نیست. نرخ خطر تعمیم یافته نزولی[۱۶] $(DGFR)$ نیز به همین صورت و با جایگزین کردن عبارت نزولی به جای صعودی در تعریف حاصل می‌شود. مطالعه خانواده توزیع های دارای خاصیت $DGFR$

[۱۳] Generalized Failure Rate
[۱۴] Lariviere and Porteus
[۱۵] Increasing Generalized Failure Rate
[۱۶] Decreasing Generalized Failure Rate

چندان حائز اهمیت نمی‌باشد. زیرا این خانواده حالت خاصی از خانواده توزیع‌های دارای خاصیت نرخ خطر نزولی[۱۷] (DFR) می‌باشند.(پال ۲۰۰۵)
در سالهای اخیر مطالعاتی برروی تابع نرخ خطر تعمیم یافته صعودی صورت گرفته است و برخی ویژگی‌ها برای این خانواده از توزیع‌ها بیان شده‌است که درادامه برخی ازاین خواص را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸ : (لارویر ۲۰۰۶) اگر دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 دارای خاصیت $IGFR$ باشند، آنگاه X_1X_2 نیز دارای خاصیت $IGFR$ است.

قضیه ۹ : (پال ۲۰۰۵) اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت $IGFR$ باشد و δ و λ اعداد ثابت و مثبتی باشند، آنگاه متغیر تصادفی δX^{λ} نیز دارای خاصیت $IGFR$ می‌باشد.

قضیه ۱۰ : (الزهرانی و استویانف[۱۸] ۲۰۰۸) اگر توابع توزیع F_1 و F_2 دارای خاصیت $IGFR$ باشند، آنگاه توزیع آمیخته بدست آمده توسط این دو توزیع، الزامادارای خاصیت $IGFR$ نمی‌باشد.

۴ ترتیب‌های تصادفی و رابطه آنها با رده توزیعهای مختلف

مفاهیم قابلیت اعتماد را می‌توان بر اساس برخی ترتیب‌های تصادفی[۱۹] بیان نمود. مطالعات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به فرانکو و شیکد(۱۹۹۷) و شیکد و شانتیکومار[۲۰] (۲۰۰۷) اشاره کرد. در این قسمت به معرفی برخی از ترتیب‌های تصادفی پرداخته و رابطه آنها را با برخی از رده توزیع‌های قابلیت اعتماد بیان می‌کنیم.
فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y به‌ترتیب دارای توابع توزیع $F(x)$ و $G(y)$ باشند و $F^{-1}(x)$ و $G^{-1}(y)$ توابع معکوس از راست پیوسته $F(x)$ و $G(y)$ باشند.

تعریف ۱۰ : اگر برای تمامی مقادیر α و β که $0 < \alpha \leq \beta < 1$ رابطه

$$F^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha) \qquad (2)$$

[۱۷] Decreasing Failure Rate
[۱۸] AL-Zahrani and Stoyanov
[۱۹] Stochastic orders
[۲۰] Shaked and Shanthikumar

برقرار باشد، آنگاه X در ترتیب تصادفی متفرق کننده[۲۱] از Y کوچکتر است ($X \leq_{disp} Y$).
با توجه به(۲) به وضوح دیده می‌شود که ($X \leq_{disp} Y$) اگر و فقط اگر $G^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\alpha)$ برای $\alpha \in (0,1)$ تابعی صعودی باشد.

تابع $h: [0,\infty] \to [0,\infty]$ که $h(0) = 0$ را ستاره شکل گوییم اگر $\frac{h(x)}{x}$ در $(0,\infty)$ نسبت به x صعودی باشد. ($\frac{a}{\infty} = 0$)

تعریف **۱۱** : اگر $G^{-1}F(x)$ در x یک تابع ستاره شکل باشد، آنگاه متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی ستاره[۲۲] کوچکتر از متغیر تصادفی Y است ($X \leq_* Y$). به طور معادل $X \leq_* Y$ اگر و فقط اگر $\frac{G^{-1}(u)}{F^{-1}(u)}$ برای $u \in (0.1)$ صعودی باشد.

تعریف **۱۲** : متغیر تصادفی x در ترتیب مقعر[۲۳] (محدب[۲۴]) صعودی کوچکتر از متغیر تصادفی Y است $(X \leq_{icv} (\leq_{icx})Y)$ اگر برای هر تابع صعودی مقعر(محدب): ϕ $R \to R$ داشته باشیم، $E(\phi(X)) \leq E(\phi(Y))$. به عبارت دیگر:

$$X \leq_{icv} Y \Longleftrightarrow \int_x^\infty (1 - F(u))du \leq \int_x^\infty (1 - G(u))du, du$$

$$X \leq_{icx} Y \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^x F(u)du \geq \int_{-\infty}^x G(u)du$$

نتایج زیر ما را در رسیدن به هدف‌اصلی این مقاله‌یاری می‌کنند. این نتایج را می‌توان در کتاب شیکد و شانتیکومار(۲۰۰۷) یافت.
اگر $X \leq_* Y$ و $EX \leq EY$، آنگاه $X \leq_{icx} Y$.
متغیر تصادفی نامنفی X دارای خاصیت $DMRL$ است اگر و فقط اگربرای هر $t' \geq t$، $X_t \geq_{icx} X_{t'}$.
اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند و $X \leq_* Y$، آنگاه $X \leq_{nbue} Y$.
همچنین ثابت می‌شود که گزاره‌های زیر معادلند:

۱) متغیر تصادفی X دارای خاصیت IFR است.
۲) برای هر $t \leq t'$، $X_t \geq_{disp} X_{t'}$.
۳) برای هر $t \leq t'$، $X_t \geq_{icv} X_{t'}$.

---
۲۱ Dispersive order
۲۲ Star order
۲۳ Increasing Concave order
۲۴ Increasing Convex order

۵ ترتیب‌های تصادفی در خانواده توزیع‌های دارای خاصیت $IGFR$

در بخش قبل پس از آشنایی با چند نمونه از ترتیب‌های تصادفی، رابطه آنها را با برخی ازرده توزیع‌های قابلیت بیان کردیم. اکنون به دنبال پاسخ به این سوال هستیم که آیا می‌توان برای رده توزیع‌های دارای خاصیت $IGFR$ همانند دیگر رده توزیع‌های معرفی شده ویژگی‌هایی بر اساس ترتیب‌های تصادفی بیان کنیم. برای پاسخ به این سوال، قضیه زیر را که تبیین کننده رابطه بین رده توزیع‌های دارای خاصیت $IGFR$ و ترتیب های تصادفی است را بیان و اثبات می‌کنیم و بر اساس آن نتایجی را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۱ : متغیر تصادفی X دارای خاصیت $IGFR$ است اگر و فقط اگر $\ln X$ در ترتیب تصادفی متفرق کننده بزرگتر از $\ln X_t$ باشد. به عبارت دیگر:

$$X \in IGFR \iff \ln X_t \leq_{disp} \ln X$$

اثبات : می‌دانیم $X \in IGFR$ است اگر و فقط اگر $\ln X \in IFR$. حال تابع $\psi(x) = \ln R(e^x)$ که $x \leq 0$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $\psi^{-1}(x) = \ln R^{-1}(e^x)$. از طرفی چون $\ln(.)$ و $R(.)$ به ترتیب توابعی صعودی و نزولی هستند، بنابراین با توجه به خواص رده توزیع‌های دارای خاصیت IFR، $\psi(x)$ تابعی نزولی و مقعر می‌باشد؛ پس نتیجه می‌گیریم که $\psi^{-1}(x)$ نزولی و مقعر است اگر و فقط اگر X دارای خاصیت $IGFR$ باشد. به عبارت دیگر $X \in IGFR$ اگر و فقط اگر

$$\ln R^{-1}(e^x) + \ln R^{-1}(e^{x+y+z}) \leq \ln R^{-1}(e^{x+y}) + lnR^{-1}(e^{x+z}) \qquad x, y, z \leq 0$$

که رابطه فوق براساس خواص بیان شده برای تابع $\psi^{-1}(x)$ بدست آمده است. بنابراین

$$\ln R^{-1}(u_1u_2) - \ln R^{-1}(u_1) \geq \ln R^{-1}(u_1u_2u_3) - \ln R^{-1}(u_1u_3)$$

که $u_1, u_2, u_3 \in [0, 1]$. حال اگر $\beta = u_1$ و $\alpha = u_1u_2$ و $u_3 = \frac{R(t)}{R(s)}$ که $s < t$ است را در نظر بگیریم، به تعریف ۸ می‌رسیم و اثبات کامل می‌شود.
اکنون که رابطه بین رده توزیع‌های دارای خاصیت $IGFR$ و ترتیب تصادفی پراکندگی‌را بیان کردیم، می‌توانیم برخی دیگر از خواص این رده توزیع‌ها را که کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند را بیان کنیم.

نتیجه ۱: اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت $IGFR$ باشد، آنگاه $X_t \leq_{nbue} X$.
اثبات : در بخش گذشته گفتیم که $\ln X_t \leq \ln X$ اگر و فقط اگر $X_t \leq_* X$. بنابراین با

توجه به خواص ترتیب ستاره شکل نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه۲: اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت $IGFR$ باشد و $EX_t \leq EX$، آنگاه X دارای خاصیت $DMRL$ است.

اثبات : با توجه به اینکه $X_t \leq_* X$ و $EX_t \leq EX$ ، نتیجه می‌گیریم که $X_t \leq_{icx} X$ و اثبات کامل می‌شود.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به قضیه ۱۱ و نتایج حاصل از آن، می‌توانیم بدون داشتن فرض IFR برخی از رده توزیع‌های قابلیت اعتماد را بر اساس رده توزیع‌های $IGFR$ نتیجه بگیریم. بنا براین با فرضیه‌ای ضعیفتر، به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. به عنوان آخرین نتیجه می‌توانیم شکل ۲ را به صورت زیر رسم نماییم.

مراجع

رضایی رکن‌آبادی، ع.، محتشمی برزادران، غ.، خراشادیزاده، م. (۱۳۸۷) بررسی و مقایسه مفاهیم قابلیت اعتماد در توزیع‌های طول عمر گسسته و پیوسته، نهمین کنفرانس آمار.

AL-Zahrani, B. and Stoyanov, J. (2008), On some properties of life distributions with increasing elasticity and log-concavity, *Applied Mathematical Sciences*, **2**, 2349-2361.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Probability Models*, To Begin with, Silver Spring, MD. online at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/18299/.

Franco, P. and Shaked, M. (1997), Characterization of the IFR and DFR aging notions by means of the dispersive order, *Statistical and Probability Letters*, **33**, 389-393.

Lai, C. D. and Xie, M. (2006), *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, Academic Press, New York.

Lariviere, M. A. and Porteus, E. L. (2001), Selling to a newsvendor: An analysis of price-only contracts, *Manufacturing Service Operation Management* **3**, 293-305.

Larviere, M. (2006), A Note On Probability Distributions with Increasing Generalized Failure Rate, *Operations Research*, **54**, 602-604.

Marshall AW and Olkin I. (2007), *Life Distributions*, Springer.

Paul, A. (2005), A note on closure properties of failure rate distributions, *Operation Research*, **53**, 733-734.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G.(2007) *Stochastic Orders and Their Applications*, Springer.