اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱، شماره پیاپی ۳۳
سال هفدهم شماره اول، ص ۵۵-۶۹

مقایسه‌ی سه روش برآوردیابی برای توزیع وایبل بر مبنای سانسور راست فزاینده‌ی نوع II

مریم رفیعی [۱] ، سیمیندخت براتپور باجگیران [۲]

چکیده:

در این مقاله، ابتدا برآورد پارامترهای مقیاس و شکل توزیع وایبل به روش‌های درستنمایی ماکزیمم (MLE) و درستنمایی ماکزیمم تقریبی (AMLE)، بر اساس سانسور راست فزاینده‌ی نوع II به‌دست می آیند. سپس روش جدیدی به نام "برآورد وارون" یا IE جهت برآورد پارامترهای توزیع وایبل معرفی می‌گردد که در آن از خواص آماره‌های ترتیبی استفاده شده است. همچنین اریبی و MSE سه روش فوق به کمک شبیه سازی برای دو پارامتر محاسبه شده و مو رد مقایسه قرار می‌گیرند که نتایج در جداولی درج شده اند. در پایان دو مثال عددی نیز برای تشریح روش‌های پیشنهاد شده بیان می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: توزیع وایبل، سانسور راست فزاینده‌ی نوع II، برآوردگر وارون [۳]، روش MLE، روش AMLE، شبیه سازی.

[۱] نویسنده مسئول، کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

[۲] دکترای آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

[۳] Inverse Estimation

۱ مقدمه

بررسی‌های صورت گرفته بر روی سانسور فزاینده‌ی به حدود ۵۴ سال پیش بر می‌گردد. هرد [۴] [۹] نخستین کسی بود که سانسور فزاینده‌ی را مطرح کرد و سپس دکتر کهن [۵] [۷] مقاله‌ای را در ارتباط با این نوع سانسور ارائه داد. فرض کنید n واحد در یک آزمون بقا قرار گیرند. پیش از آزمایش، عدد m ($m < n$) و همچنین طرح سانسور R=(R_1,R_2,...,R_m) با شرط‌های $R_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{m} R_j + m = n$، معلوم فرض شده‌اند. در زمان نخستین شکست $X_{1:m:n}$، به طور تصادفی R_1 واحد از $n-1$ واحد موجود حذف می‌شوند. در زمان دومین شکست $X_{2:m:n}$، به طور تصادفی R_2 واحد از $n-2-R_1$ واحد موجود حذف می‌شوند. این آزمون تا زمان m امین شکست $X_{m:m:n}$ ادامه پیدا می‌کند و در این زمان، تمام واحدهای باقیمانده که تعداد آن‌ها برابر $R_m = n-m-\sum_{j=1}^{m-1} R_j$ است، حذف می‌شوند. مجموعه طول عمرهای مشاهده شده‌ی $X = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \ldots, X_{m:m:n})$ یک نمونه‌ی سانسور راست فزاینده‌ی نوع II است. برای جزئیات بیشتر می‌توان به بالاکریشنان و آگاروالا [۶] [۵] و بالاکریشنان [۴] مراجعه کرد. اگر $R_1 = R_2 = \ldots = R_{m-1} = 0$، آن‌گاه $R_m = n-m$، که با طرح سانسور نوع II متناظر است. اگر $R_1 = R_2 = \ldots = R_{m-1} = R_m = 0$ به طوری که $m = n$، طرح سانسور راست فزاینده‌ی نوع II به حالتی که هیچ سانسوری رخ نداده (حالت نمونه‌ی کامل) تبدیل می شود. اشکالی که طرح سانسورراست فزاینده‌ی نوع II دارد این است که ممکن است زمان آزمایش به طول بیانجامد.

برای برآورد پارامترهای توزیع وایبل بر اساس سانسور فزاینده‌ی نوع II نیاز به تابع چگالی احتمال توأم زمان‌های شکست سانسور فزاینده‌ی نوع II،

$$X_{m:m:n}, \ldots, X_{2:m:n}, X_{1:m:n}$$

داریم که عبارت است از (بالاکریشنان و آگاروالا [۵] مطالعه شود)

$$\begin{aligned} &f_{X_{1:m:n},\ldots,X_{i:m:n}}(x_1,\ldots,x_m) \\ &= c\prod_{i=1}^{m} f(x_i)(1-F(x_i))^{R_i}, \qquad (۱) \end{aligned}$$

که در آن

$$c = n(n-R_1-1)\times\cdots$$
$$\times(n-R_1-\cdots-R_{m-1}-m+1).$$

در این صورت، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی وایبل عبارت اند از

$$f(x;\lambda,\alpha) = \lambda\alpha(\alpha x)^{\lambda-1}e^{-(\alpha x)^{\lambda}},$$
$$x>0,\ \alpha>0,\ \lambda>0, \quad (۲)$$

---
[۴] Herd

[۵] Cohen

[۶] Balakrishnan and Aggarwala

$$F(x;\lambda,\alpha)=1-e^{-(\alpha x)^{\lambda}},$$
$$x>0,\ \alpha>0,\ \lambda>0, \qquad (۳)$$

که در آن λ پارامتر شکل و α پارامتر مقیاس است. در این مقاله، در بخش دوم برآورد ML، در بخش سوم برآورد AML و در بخش چهارم برآورد وارون پارامترهای λ و α توزیع وایبل محاسبه شده اند. در بخش پنجم، به کمک روش‌های شبیه سازی‌های سه روش معرفی شده فوق مورد مقایسه قرار می‌گیرند و در پایان نیز مثال‌های عددی بیان می‌گردند.

۲ برآورد ML پارامترهای توزیع وایبل بر مبنای سانسور راست فزاینده‌ی نوع II

در این بخش، MLE پارامترهای شکل و مکان توزیع وایبل را بر مبنای سانسور راست پیشرونده‌ی نوع II، محاسبه خواهیم کرد. تابع چگالی احتمال توأم زمان‌های شکست در توزیع وایبل بر اساس روابط (۱)، (۲) و (۳) عبارت است از:

$$\begin{aligned} & f_{X_{1:m:n},\ldots,X_{m:m:n}}(x_1,\ldots,x_m) \\ = \;& c\,\alpha^{m\lambda}\,\lambda^m\,(\prod_{i=1}^{m} x_i)^{\lambda-1} \\ & \times e^{-\sum_{i=1}^{m}(\alpha x_i)^{\lambda}}\,e^{-\sum_{i=1}^{m}R_i(\alpha x_i)^{\lambda}}. \end{aligned}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به α و λ، معادلات درستنمایی به صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln L(\lambda,\alpha)}{\partial \alpha} \\ = \;& \frac{m\lambda}{\alpha}-\lambda\alpha^{\lambda-1}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_i^{\lambda} \\ = \;& 0, \end{aligned} \qquad (۴)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln L(\lambda,\alpha)}{\partial \lambda} \\ = \;& m\ln\alpha+\frac{m}{\lambda}+\sum_{i=1}^{m}\ln x_i \\ & -\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)(\alpha x_i)^{\lambda}\ln(\alpha x_i) \\ = \;& 0. \end{aligned} \qquad (۵)$$

با حل معادله‌ی درستنمایی (۴) بر حسب α، داریم:

$$\alpha=\left(\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_i^{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \qquad (۶)$$

با استفاده از جایگذاری (۶) در معادله‌ی درستنمایی (۵)، برآورد λ از معادله‌ی زیر به‌دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & -\frac{m\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_i^{\lambda}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_i^{\lambda}} \\ & +\frac{m}{\lambda}+\sum_{i=1}^{m}\ln x_i=0. \end{aligned} \qquad (۷)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، حل معادله‌ی (۷) به منظور محاسبه‌ی برآورد λ کار دشواری است، بنابراین محاسبه‌ی $\hat{\lambda}$ توسط نرم‌افزار و به وسیله‌ی روش‌های حل عددی، به ویژه روش نیوتون رافسون صورت می‌گیرد. با جایگذاری $\hat{\lambda}$ در (۶) برآورد α به‌دست می‌آید.

۳ برآورد AML پارامترهای توزیع وایبل بر مبنای سانسور راست فزاینده‌ی نوع II

در این بخش با استفاده از روش AMLE پارامترهای توزیع وایبل را برآورد می‌کنیم. این روش اولین بار توسط بالاکریشنان [۱، ۲ و ۳] معرفی گردید. برای محاسبه‌ی برآورد پارامترهای توزیع وایبل به روش AMLE، از تغییر متغیرهای زیر استفاده کرده و توزیع وایبل را به توزیع کرانگین [۷] تبدیل می‌کنیم، سپس برآورد AML پارامترهای توزیع کرانگین را به‌دست آورده و با استفاده از تغییر متغیر اولیه، برآورد AML پارامترهای توزیع وایبل را برآورد می‌کنیم. در این زمینه به سلطان و همکاران[۸] [۱۲] مراجعه شود. قرار می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
Y &= \ln X \longrightarrow X = e^{Y},\\
\mu &= \ln \frac{1}{\alpha} \longrightarrow \alpha = e^{-\mu},\\
\sigma &= \frac{1}{\lambda} \longrightarrow \lambda = \frac{1}{\sigma}.
\end{aligned}
$$

در این صورت توزیع وایبل به توزیع کرانگین با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی زیر تبدیل می‌شود.

$$
f(y;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\ e^{\frac{y-\mu}{\sigma}} exp\left(-e^{\frac{y-\mu}{\sigma}}\right),
$$
$$
-\infty < y < +\infty,\ \mu \in R,\ \sigma > 0,
$$

$$
F(y;\mu,\sigma) = 1 - exp\left(-e^{\frac{y-\mu}{\sigma}}\right),
$$
$$
-\infty < y < +\infty,\ \mu \in R,\ \sigma > 0.
$$

تابع درستنمایی بر مبنای نمونه‌ی

$$
y_{m:m:n}, \dots, y_{2:m:n}, y_{1:m:n}
$$

عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
L(\mu.\sigma) &\\
&= f_{z_{1:m:n}, z_{2:m:n}, \dots, z_{m:m:n}}(z_1, z_2, \dots, z_m)\\
&= c(\frac{1}{\sigma})^m\\
&\quad \times \prod_{i=1}^{m} f(z_{i:m:n})(1 - F(z_{i:m:n}))^{R_i}.
\end{aligned}
$$

که در آن $z_{i:m:n} = \frac{y_{i:m:n}-\mu}{\sigma}$. بر مبنای مشتقات جزئی لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به μ و σ، معادلات درستنمایی برای μ و σ به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma}[\sum_{i=1}^{m} \frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})}\\
&- \sum_{i=1}^{m} R_i \frac{f(z_{i:m:n})}{1 - F(z_{i:m:n})}]\\
&= 0, \qquad (۸)
\end{aligned}
$$

---

[۷] Extreme Value

[۸] Sultan et al

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} &= -\frac{m}{\sigma}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})}(y_{i:m:n}-\mu)\\ &+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{f(z_{i:m:n})}{1-F(z_{i:m:n})}(y_{i:m:n}-\mu)\\ &= 0, \qquad (۹)\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}f(z) &= e^z exp\left(-e^z\right),\\ F(z) &= 1-exp\left(-e^z\right).\end{aligned}$$

چون معادلات درستنمایی بالا پاسخ‌های صریحی ندارند، پس از تقریب سری تیلور توابع $\frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})}$ و $\frac{f(z_{i:m:n})}{1-F(z_{i:m:n})}$ حول نقطه‌ی ξ_i استفاده می‌کنیم به طوری که

$$\xi_i = F^{-1}(p_i)=\ln(-\ln(1-p_i)), \quad (۱۰)$$

و $p_i=1-q_i=1-\prod_{j=m-i+1}^{m}\alpha_j$. علت انتخاب p_iها به صورت فوق در کتاب بالاکریشنان و آگاروالا [۵] این گونه بیان گردیده است که: اگر $U_{i:m:n},\ i=1,\ldots,m$ یک نمونه سانسور راست فزاینده‌ی نوع II از توزیع $U(0,1)$ و با حجم نمونه‌ی n و طرح سانسور R_1، R_2، ...، R_m باشد، در این صورت $V_i,\ i=1,\ldots,m$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم هستند و

$$\begin{aligned}V_i &\sim Beta(i+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_j,1),\\ &\quad i=1,\ldots,m\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}E(U_{i:m:n}) &= 1-\prod_{j=m-i+1}^{m}\alpha_j,\\ &\quad i=1,\ldots,m\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \frac{j+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_i}{1+j+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_i},\\ &\quad j=1,\ldots,m.\end{aligned}$$

بنابراین تقریب‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})}\approx a_i+b_iz_{i:m:n}, \quad (۱۱)$$

$$\frac{f(z_{i:m:n})}{1-F(z_{i:m:n})}\approx a_i+d_iz_{i:m:n}, \quad (۱۲)$$

که در آن‌ها

$$\begin{aligned}a_i &= 1-e^{\xi_i}+\xi_ie^{\xi_i},\\ b_i &= -e^{\xi_i},\\ c_i &= e^{\xi_i}-\xi_ie^{\xi_i},\\ d_i &= e^{\xi_i}.\end{aligned}$$

با استفاده از (۸) و (۹) و همچنین روابط بالا، معادلات درستنمایی تقریبی برای μ و σ به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial\mu} &\simeq -\frac{1}{\sigma}[\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_iz_{i:m:n})]\\ &+\frac{1}{\sigma}[\sum_{i=1}^{m}R_i(c_i+d_iz_{i:m:n})]\\ &= 0, \qquad (۱۳)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} &\simeq \frac{-1}{\sigma}[m+\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i z_{i:m:n})z_{i:m:n}] \\ &+\frac{1}{\sigma}[\sum_{i=1}^{m}R_i(c_i+d_i z_{i:m:n})z_{i:m:n})] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

به وسیله‌ی حل (۱۳)، برآورد AML پارامتر μ عبارت است از:

$$\tilde{\mu}=\tilde{\sigma}U+W, \quad (۱۵)$$

که در آن

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sum_{i=1}^{m}(a_i-R_ic_i)}{\sum_{i=1}^{m}(b_i-R_id_i)}, \\ W &= \frac{\sum_{i=1}^{m}(b_i-R_id_i)y_{i:m:n}}{\sum_{i=1}^{m}(b_i-R_id_i)}, \end{aligned}$$

حال با جایگذاری (۱۵) در (۱۴) معادله‌ی زیر حاصل می‌گردد

$$A\sigma^2+B\sigma+C=0, \quad (۱۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= m+\sum_{i=1}^{m}(a_i-R_ic_i)U \\ &+\sum_{i=1}^{m}(b_i-R_id_i)U^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{m}(a_i-R_ic_i)(y_{i:m:n}-W) \\ &- 2\sum_{i=1}^{m}(b_i-R_id_i)(y_{i:m:n}-W)U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{m}(b_i-R_id_i)(y_{i:m:n}-W)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

از حل معادله‌ی درجه‌ی دوم (۱۶) دو ریشه به‌دست خواهد آمد که با توجه به شرط $C<0$ تنها یکی از آن‌ها پذیرفتنی است، یعنی

$$\tilde{\sigma}=\frac{\left(-B+(B^2-4AC)^{\frac{1}{2}}\right)}{2A}. \quad (۱۷)$$

۴ برآورد وارون پارامترهای λ و α

در این بخش، برآوردگرهای وارون برای هر دو پارامتر شکل و مقیاس معرفی می‌شوند. برای برآورد پارامترهای λ و α، خواص شناخته شده‌ی زیر از آماره‌های ترتیبی مورد نیاز است :

(I) اگر

$$V_{i:m:n} = -\log(1-F(X_{i:m:n};\alpha,\lambda)), \quad i=1,\ldots,m$$

آن‌گاه $V_{1:m:n},\ldots,V_{m:m:n}$ یک نمونه‌ی سانسور راست فزاینده‌ی نوع II از توزیع

نمایی استاندارد با اندازه‌ی نمونه‌ی n و طرح سانسور $R=(R_1,\ldots,R_m)$ است. توجه داشته باشید که در توزیع وایبل داریم:

$$V_{i:m:n}=(\alpha X_{i:m:n})^{\lambda}.$$

(II) اگر

$$\begin{aligned} W_1 &= nV_{1:m:m}, \\ W_i &= [n-\sum_{j=1}^{i-1}(R_j+1)](V_{i:m:n}-V_{i-1:m:n}), \\ & \quad i=2,\ldots,m \end{aligned}$$

آن‌گاه $W_m,\ldots,W_1$ متغیرهای تصادفی نمایی استاندارد مستقل از هم هستند.

(III) اگر

$$S_i=\sum_{j=1}^{i}W_j\ ,\ i=1,\ldots,m\ ,$$

$$U_{(i)}=\frac{S_i}{S_m}\ ,\ i=1,\ldots,m-1$$

آن‌گاه $U_{(1)}<\ldots<U_{(m-1)}$ آماره‌های ترتیبی از توزیع یکنواخت $(0,1)$ با حجم نمونه‌ی $m-1$ هستند. توجه کنید که

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=1}^{i}(R_j+1)V_{j:m:n} \\ & \quad +[n-\sum_{j=1}^{i}(R_j+1)]V_{i:m:n}, \\ & \quad i=1,\ldots,m\ . \end{aligned}$$

مورد اول واضح است. مورد دوم را می توان در وایوروس[۹] و بالاکریشنان [۱۳] و مورد سوم را در استفنز[۱۰] [۱۱] یافت کرد.

اکنون برای برآورد پارامتر λ، به کمیت محوری زیر توجه کنید

$$\begin{aligned} W(\lambda) &\qquad (18) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1}(-2\log U_{(i)}) \\ &= 2\sum_{i=1}^{m-1}\log(\frac{S_m}{S_i}) \\ &= 2\sum_{i=1}^{m-1}\log(\{\sum_{j=1}^{m}(R_j+1)V_{j:m:n}\}/ \\ & \quad \{\sum_{j=1}^{i}(R_j+1)V_{j:m:n}+ \\ & \quad [n-\sum_{j=1}^{i}(R_j+1)]V_{i:m:n}\}) \\ &= 2\sum_{i=1}^{m-1}\log(\{\sum_{j=1}^{m}(R_j+1)X^{\lambda}_{j:m:n}\}/ \\ & \quad \{\sum_{j=1}^{i}(R_j+1)X^{\lambda}_{j:m:n}+ \\ & \quad [n-\sum_{j=1}^{i}(R_j+1)]X^{\lambda}_{i:m:n}\}). \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۱۸) نشان می‌دهد که در توزیع وایبل، W تابعی از λ است و به α بستگی ندارد. واضح است که $W(\lambda)$ می‌تواند هر مقدار مثبتی را اختیار کند. علاوه بر این، $W(\lambda)$ دارای توزیع کیدو با

[۹] Viveros

[۱۰] Stephens

$2(m-1)$ درجه‌ی آزادی است. زیرا

$$W(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1}(-2\log U_{(i)}) = \sum_{i=1}^{m-1}(-2\log U_i)$$

و $U_1,\dots,U_{m-1}$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع یکنواخت $(0,1)$ است.

چون $W(\lambda)$ دارای توزیع χ^2 با $2(m-1)$ درجه‌ی آزادی است، $\frac{W(\lambda)}{2(m-2)}$ با احتمال یک به 1 همگرا می‌شود. بنابراین، می‌توانیم برای λ برآوردگر نقطه ای متناظر آن یعنی $\hat{\lambda}$ را با استفاده از معادله‌ی زیر به‌دست آوریم.

$$W(\hat{\lambda}) = 2(m-2). \qquad (۱۹)$$

با استفاده از نتایج به‌دست آمده از معادله‌ی (18)، معادله‌ی (19) پاسخ یکتایی دارد.

همچنین، بار دیگر با استفاده از این حقیقت که $2S_m$ دارای توزیع χ^2 با $2(m)$ درجه‌ی آزادی است، برآوردگر $\hat{\alpha}$ را برای α از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{m-1}{\sum_{j=1}^{m}(R_j+1)X_{j:m:n}^{\hat{\lambda}}}\right)^{1/\hat{\lambda}} . \qquad (۲۰)$$

برآوردگرهای به‌دست آمده توسط (۱۹) و (۲۰)، برآوردگرهای وارون (IE) پارامترهای λ و α (ونگ[11] [۱۴]) نامیده می‌شوند.

[11] Wang

۵ بررسی شبیه سازی

برای ارزیابی خواص نمونه‌ی متناهی نمونه‌ی روش‌های پیشنهاد شده، مطالعه‌ای با استفاده از شبیه سازی برای مقایسه‌ی نحوه‌ی عمل‌کرد برآوردهای نقطه‌ای (IE) پارامترها با برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم و برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم تقریبی در مورد توزیع وایبل انجام خواهد گرفت که این مقایسه با استفاده از طرح‌ها و حجم نمونه‌های متفاوت انجام شده است. چون برآوردگرها نسبت به پارامتر مقیاس α پایا [12] هستند، در شبیه سازی‌ها $\alpha = 1$ قرار داده شده، اما مقادیر متفاوتی برای λ اختیار شده‌است. برای تولید نمونه‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع II از توزیع وایبل، از الگوریتم معرفی شده در بالاکریشنان و سندهو[13] [۶] استفاده می‌کنیم.

اریبی‌ها و میانگین مربع خطا (MSE) در برآورد نقطه ای λ و α برای بیش از 10000 بار تکرار محاسبه شده و نتایج آن در جداول ۱ تا۴ نشان داده شده است. از بررسی این جداول، می‌توان چنین نتیجه گیری کرد که: اریبی‌ها و MSEهای روش IE همواره کمتر از اریبی‌ها و MSEهای دو روش MLE و AMLE می باشد، همچنین در اغلب موارد اریبی‌ها و MSEهای روش MLE کمتر از روش AMLE است. بنابراین می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت

[12] Variant

[13] Sandhu

که روش IE همواره بهتر از روش‌های MLE و AMLE است.

۱.۵ دو مثال تشریحی

در این جا برای بررسی بهتر نتایج فوق دو مثال زیر مطرح می‌گردد.

مثال ۱.۵. *(لینهارت[۱۴] و زوچینی[۱۵][۱۰]) مجموعه داده‌های زیر، زمان‌های شکست سیستم تهویه‌ی هوای یک هواپیما می‌باشد که این داده‌ها توسط گوپتا[۱۶] و کوندو[۱۷] [۸] نیز مورد بررسی قرار گرفته اند.*

$$1, 3, 5, 7, 11, 11, 11, 12, 14, 14, 14, 16,$$
$$16, 20, 21, 23, 42, 47, 52, 62, 71, 71, 87,$$
$$90, 95, 120, 120, 225, 246, 261$$

نمونه‌ی سانسور راست فزاینده‌ی نوع II با $n = 30$ و $m = 10$ و طرح سانسور

$$R = (10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10)$$

که از داده‌های فوق تولید شده عبارت است از

$$1, 5, 11, 11, 14, 16, 20, 47, 52$$

و برآوردهای حاصل از سه روش عبارت اند از:

$$\hat{\lambda}_{IE} = 0.7683 \qquad \hat{\alpha}_{IE} = 0.0056,$$
$$\hat{\lambda}_{MLE} = 1.7496 \qquad \hat{\alpha}_{MLE} = 0.5716,$$
$$\hat{\lambda}_{AMLE} = 1.3962 \qquad \hat{\alpha}_{AMLE} = 0.2569.$$

کاملاً واضح است که برآوردگرهای واورن پارامترهای α و λ از برآوردهای ML و AML بیشان مناسب‌ترند و نسبت به آن‌ها برتری دارند زیرا برآوردگرهای واورن به IEهای مبتنی بر داده‌های کامل یعنی

$$\alpha_{IE} = 0.0178, \ \ \lambda_{IE} = 0.8308$$

نزدیک ترند. (MLE و AMLE مبتنی بر داده‌های کامل عبارت اند از :

$$\alpha_{MLE} = 0.0183 \qquad \lambda_{MLE} = 0.8536,$$
$$\alpha_{AMLE} = 1.2182 \qquad \lambda_{AMLE} = 0.6313$$

مثال ۲.۵. *در این مثال یک نمونه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع II با $n = 20$ و $m = 5$ با طرح سانسور $R = (5, 0, 5, 0, 5)$ را در نظر می‌گیریم با این شرط که $\lambda = 1.5$ و $\alpha = 1$ در این صورت نمونه‌ی سانسور زیر به‌دست خواهد آمد*

$$0.3197 \ \ 0.03211 \ \ 0.4019 \ \ 0.4290 \ \ 0.7721$$

و برآوردهای حاصل از سه روش عبارت اند از:

$$\hat{\lambda}_{IE} = 1.8968 \qquad \hat{\alpha}_{IE} = 0.8262,$$
$$\hat{\lambda}_{MLE} = 2.4763 \qquad \hat{\alpha}_{MLE} = 1.0599,$$
$$\hat{\lambda}_{AMLE} = 2.1511 \qquad \hat{\alpha}_{AMLE} = 0.2274.$$

[۱۴] Linhart

[۱۵] Zucchini

[۱۶] Gupta

[۱۷] Kundu

جدول ۱: اریبی‌های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\lambda = 1$

		α			λ		
(n,m)	$(R_1, \ldots, R_m)$	IE	MLE	$AMLE$	IE	MLE	$AMLE$
$(10, 5)$	$(0, \ldots, 0, 5)$	-0.1142	0.4181	-0.8136	-0.0139	0.5543	-0.5576
	$(5, 0, \ldots, 0)$	0.0318	0.2902	0.2116	-0.0325	0.2814	0.5765
	$(1, 1, \ldots, 1)$	-0.0624	0.3604	-0.3541	-0.0111	0.4325	0.0767
$(10, 8)$	$(0, \ldots, 0, 2)$	-0.0025	0.1550	-0.2690	-0.0060	0.2478	0.0158
	$(2, 0, \ldots, 0)$	0.0491	0.1433	0.1978	-0.0179	0.1930	0.1758
$(20, 10)$	$(0, \ldots, 0, 10)$	-0.0454	0.1836	-0.8938	-0.0042	0.2122	-0.1880
	$(10, 0, \ldots, 0)$	0.0400	0.1250	0.0883	-0.0140	0.1151	0.2337
	$(1, 1, \ldots, 1)$	-0.0123	0.1574	-0.4429	-0.1123	0.1640	-0.0482
$(20, 15)$	$(0, \ldots, 0, 5)$	-0.0030	0.0806	-0.4649	-0.0014	0.1213	-0.1650
	$(5, 0, \ldots, 0)$	0.0310	0.0698	0.1065	-0.0097	0.0915	0.0395
$(30, 10)$	$(0, \ldots, 0, 20)$	-0.0926	0.2680	-0.3017	-0.0863	0.2243	-0.2355
	$(20, 0, \ldots, 0)$	0.0513	0.1332	0.0569	-0.0131	0.0931	0.3147
	$(2, 2, \ldots, 2)$	-0.0571	0.2073	-0.4568	-0.0154	0.1650	0.1476
$(30, 15)$	$(0, \ldots, 0, 15)$	-0.0241	0.1196	-0.7803	-0.0029	0.1338	-0.2653
	$(15, 0, \ldots, 0)$	0.0275	0.0770	0.0571	-0.0128	0.0764	0.1601
	$(1, 1, \ldots, 1)$	-0.0046	0.1013	-04353	-0.0061	0.1047	0.0959
$(30, 20)$	$(0, \ldots, 0, 10)$	-0.0083	0.0644	-0.7810	-0.0035	0.0913	-0.2664
	$(10, 0, \ldots, 0)$	0.0244	0.0503	0.0598	-0.0078	0.0644	0.1589
	$(5, 0, \ldots, 0, 5)$	0.0035	0.0501	-0.4721	-0.0075	0.0792	-0.1303
$(50, 12)$	$(0, \ldots, 0, 38)$	-0.0376	0.2878	-0.5799	-0.0005	0.1831	-0.6489
	$(38, 0, \ldots, 0)$	0.0313	0.1095	0.3547	-0.0165	0.0672	-0.5439
$(50, 20)$	$(0, \ldots, 0, 30)$	-0.0176	0.1062	0.8528	-0.0026	0.0950	-0.6363
	$(30, 0, \ldots, 0)$	0.0194	0.0552	0.2559	-0.0081	0.0525	-04147
$(50, 25)$	$(0, \ldots, 0, 25)$	-0.0161	0.0668	0.8203	-0.0017	0.0758	0.3332
	$(25, 0, \ldots, 0)$	0.0185	0.0413	0.0321	-0.0052	0.0450	0.0995
	$(1, 1, \ldots, 1)$	-0.0011	0.0556	-0.4621	-0.0057	0.0580	0.0549

جدول ۲: MSE های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\lambda = 1$

		α			λ		
(n,m)	$(R_1, \ldots, R_m)$	IE	MLE	$AMLE$	IE	MLE	$AMLE$
$(10,5)$	$(0,\ldots,0,5)$	0.4746	0.9670	0.6986	0.3746	1.2764	0.3772
	$(5,0,\ldots,0)$	0.3580	0.6475	0.5354	0.1710	0.3780	1.1040
	$(1,1,\ldots,1)$	0.4030	0.7959	0.2695	0.2982	0.8030	0.3434
$(10,8)$	$(0,\ldots,0,2)$	0.1669	0.2496	0.1642	0.1541	0.2771	0.1288
	$(2,0,\ldots,0)$	0.1915	0.2551	0.3262	0.1035	0.1871	0.2138
$(20,10)$	$(0,\ldots,0,10)$	0.1626	0.2420	0.8053	0.1217	0.2311	0.4416
	$(10,0,\ldots,0)$	0.1458	0.1772	0.1713	0.0609	0.0935	0.1937
	$(1,1,\ldots,1)$	0.1435	0.1996	0.2397	0.0925	0.1503	0.0856
$(20,15)$	$(0,\ldots,0,5)$	0.0781	0.0976	0.2418	0.0633	0.0940	0.0660
	$(5,0,\ldots,0)$	0.0897	0.0995	0.1181	0.0465	0.0633	0.0610
$(30,10)$	$(0,\ldots,0,20)$	0.2626	0.4091	0.7651	0.1405	0.2524	0.1173
	$(20,0,\ldots,0)$	0.1589	0.1810	0.1592	0.2610	0.0742	0.2618
	$(2,2,\ldots,2)$	0.3487	0.2783	0.2460	0.0238	0.1514	0.1403
$(30,15)$	$(0,\ldots,0,15)$	0.1004	0.1351	0.6176	0.0697	0.1082	0.1021
	$(15,0,\ldots,0)$	0.0858	0.0996	0.1017	0.0386	0.0512	0.0982
	$(1,1,\ldots,1)$	0.0864	0.1106	0.2158	0.0549	0.0741	0.0706
$(30,20)$	$(0,\ldots,0,10)$	0.0569	0.0683	0.6119	0.0446	0.0641	0.1024
	$(10,0,\ldots,0)$	0.0628	0.0677	0.1029	0.0322	0.0401	0.0968
	$(5,0,\ldots,0,5)$	0.0552	0.0652	0.2484	0.0389	0.0534	0.0597
$(50,12)$	$(0,\ldots,0,38)$	0.2871	0.4530	0.8182	0.1051	0.1771	0.4303
	$(38,0,\ldots,0)$	0.1104	0.1395	0.8692	0.0390	0.0496	0.3217
$(50,20)$	$(0,\ldots,0,30)$	0.0902	0.1136	0.7312	0.0547	0.0733	0.4099
	$(30,0,\ldots,0)$	0.0604	0.0675	0.2605	0.0274	0.0333	0.1975
$(50,25)$	$(0,\ldots,0,25)$	0.0543	0.0647	0.6773	0.0393	0.0512	0.1266
	$(25,0,\ldots,0)$	0.0477	0.0510	0.0526	0.0233	0.0274	0.0459
	$(1,1,\ldots,1)$	0.0488	0.0521	0.2273	0.0286	0.0351	0.0333

جدول ۳: اریبی‌های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\lambda = 2$

		α			λ		
(n,m)	$(R_1,\ldots,R_m)$	IE	MLE	$AMLE$	IE	MLE	$AMLE$
$(10,5)$	$(0,\ldots,0,5)$	-0.1112	0.1471	-0.7958	-0.0550	0.5546	-0.9163
	$(5,0,\ldots,0)$	-0.0212	0.0954	-0.3813	-0.0769	0.2817	-0.4303
	$(1,1,\ldots,1)$	-0.0794	0.1277	-0.6356	-0.0493	0.4320	-0.5890
$(10,8)$	$(0,\ldots,0,2)$	-0.0162	0.0558	-0.6369	-0.0314	0.2443	-0.9789
	$(2,0,\ldots,0)$	0.0025	0.0417	-0.4036	-0.0205	0.1952	-0.7658
$(20,10)$	$(0,\ldots,0,10)$	-0.0412	0.0611	-0.8682	-0.0068	0.2158	-1.1891
	$(10,0,\ldots,0)$	0.0024	0.0437	-0.4549	-0.0334	0.1116	-0.7569
	$(1,1,\ldots,1)$	-0.0267	0.0614	-0.6996	-0.0196	0.1683	-0.8484
$(20,15)$	$(0,\ldots,0,5)$	-0.0066	0.0330	-0.7325	-0.0069	0.1229	-0.5674
	$(5,0,\ldots,0)$	0.0038	0.0254	0.4589	-0.0071	0.0913	-0.8839
$(30,10)$	$(0,\ldots,0,20)$	-0.0582	0.0961	-0.9251	-0.0124	0.2245	-1.2364
	$(20,0,\ldots,0)$	0.0020	0.0497	-0.4768	-0.0440	0.0940	-0.6798
	$(2,2,\ldots,2)$	-0.0391	0.0787	-0.7916	-0.0251	0.1634	-0.8523
$(30,15)$	$(0,\ldots,0,15)$	-0.0257	0.0441	-0.8906	-0.0043	0.1343	-1.2674
	$(15,0,\ldots,0)$	0.0055	0.0463	-0.4693	-0.0191	0.0744	-0.8332
	$(1,1,\ldots,1)$	-0.0151	0.0335	-0.7171	-0.0168	0.1191	-0.9084
$(30,20)$	$(0,\ldots,0,10)$	-0.0129	0.0216	-0.8111	-0.0014	0.0918	-1.0415
	$(10,0,\ldots,0)$	0.0056	0.0196	0.4682	-0.0034	0.0632	-0.9043
	$(5,0,\ldots,0,5)$	-0.0029	0.0218	-0.7062	-0.0058	0.0741	-1.0500
$(50,12)$	$(0,\ldots,0,38)$	-0.0504	0.1064	-0.9672	-0.0022	0.1831	-1.0981
	$(38,0,\ldots,0)$	0.0021	0.0422	-0.4943	-0.0389	0.0674	-0.6873
$(50,20)$	$(0,\ldots,0,30)$	-0.0230	0.0412	-0.9401	-0.0059	0.0636	-1.3382
	$(30,0,\ldots,0)$	0.0034	0.0216	-0.4889	-0.0069	0.0521	-0.8581
$(50,25)$	$(0,\ldots,0,25)$	-0.0141	0.0236	-0.9301	-0.0036	0.0753	-1.3326
	$(25,0,\ldots,0)$	0.0044	0.0148	-0.4864	-0.0064	0.0439	-0.9016
	$(1,1,\ldots,1)$	-0.0091	0.0207	-0.7306	-0.0078	0.0566	-0.9476

جدول ۴: MSE های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\lambda = 2$

		α			λ		
(n,m)	$(R_1, \ldots, R_m)$	IE	MLE	$AMLE$	IE	MLE	$AMLE$
$(10, 5)$	$(0, \ldots, 0, 5)$	0.1065	0.1301	0.6547	0.3880	1.2749	1.2391
	$(5, 0, \ldots, 0)$	0.0655	0.0501	0.2874	0.1751	0.3791	0.9842
	$(1, 1, \ldots, 1)$	0.0819	0.1040	0.4532	0.1354	0.8039	0.9199
$(10, 8)$	$(0, \ldots, 0, 2)$	0.0359	0.0417	0.4285	0.1579	0.2794	1.0938
	$(2, 0, \ldots, 0)$	0.379	0.0428	0.2309	0.1024	0.1812	0.7715
$(20, 10)$	$(0, \ldots, 0, 10)$	0.0387	0.0463	0.7582	0.1247	0.2318	1.4767
	$(10, 0, \ldots, 0)$	0.0289	0.0346	0.2488	0.0651	0.0944	0.7127
	$(1, 1, \ldots, 1)$	0.0319	0.0392	0.5013	0.0934	0.1507	0.8394
$(20, 15)$	$(0, \ldots, 0, 5)$	0.0184	0.0214	0.5431	0.0727	0.0956	0.3767
	$(5, 0, \ldots, 0)$	0.0187	0.0203	0.2365	0.0483	0.0637	0.8459
$(30, 10)$	$(0, \ldots, 0, 20)$	0.0625	0.0691	0.8764	0.1518	0.2541	1.5861
	$(20, 0, \ldots, 0)$	0.0291	0.0331	0.2656	0.0547	0.0710	0.6262
	$(2, 2, \ldots, 2)$	0.0409	0.0463	0.6337	0.0869	0.1511	0.8412
$(30, 15)$	$(0, \ldots, 0, 15)$	0.0238	0.0232	0.7956	0.0784	0.1078	1.3904
	$(15, 0, \ldots, 0)$	0.0193	0.0219	0.2451	0.0354	0.0532	0.7717
	$(1, 1, \ldots, 1)$	0.0187	0.0257	0.5208	0.0539	0.0692	0.8882
$(30, 20)$	$(0, \ldots, 0, 10)$	0.0138	0.0239	0.6609	0.0558	0.0751	1.2656
	$(10, 0, \ldots, 0)$	0.0142	0.0149	0.2362	0.0295	0.0421	0.08642
	$(5, 0, \ldots, 0, 5)$	0.0133	0.0154	0.5042	0.0634	0.0532	1.1963
$(50, 12)$	$(0, \ldots, 0, 38)$	0.0690	0.0749	0.9360	0.1409	0.1765	1.2397
	$(38, 0, \ldots, 0)$	0.0233	0.0272	0.2727	0.0356	0.0478	0.5982
$(50, 20)$	$(0, \ldots, 0, 30)$	0.0221	0.0231	0.8846	0.0570	0.0719	1.6099
	$(30, 0, \ldots, 0)$	0.0139	0.0135	0.2557	0.0267	0.0324	0.7854
$(50, 25)$	$(0, \ldots, 0, 25)$	0.0133	0.0146	0.8297	0.0297	0.0333	1.5912
	$(25, 0, \ldots, 0)$	0.0112	0.0116	0.2495	0.0262	0.0289	0.8486
	$(1, 1, \ldots, 1)$	0.0111	0.0125	0.5372	0.0582	0.03414	0.9294

مراجع

[1] Balakrishnan, N. (1989a), Approximate MLE of the Scale Parameter of the Rayleigh Distribution with Censoring, *IEEE Transactions on Rayliegh*, 38, 355-357.

[2] Balakrishnan, N. (1989b), Approximate Maximum Likelihood Estimation of the Mean and Standard Deviation of the Normal Distribution based on Type II Censored Samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 32, 137-148.

[3] Balakrishnan, N. (1990a), Maximum Likelihood Estimation based on Complete and Type II Censored Samples, *The Logistic Distribution*, (ed. Balakrishnan, N.), Marcel Dekker, New York.

[4] Balakrishnan, N. (2007), Progressive censoring methodology: an appraisal, *Test*, 16, 211-259.

[5] Balakrishnan, N., Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methodes, and Applications,* Boston: Birkhauser

[6] Balakrishnan, N., Sandhu R.A. (1995), A Simple Simulational Algorithm for Generating Progressive Type-II Censored Samples, *The American Statistician*, 49, 229-230.

[7] Cohen, A.C. (1963), Progressively Censored Samples in Life Testing, *Technometrics*, 5, 327-329.

[8] Gupta, R.D, Kundu, D. (2001), Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull Distribution, *Biometrical Journal*, 43, 117-130.

[9] Herd, R.G. (1956). *Estimation of the Parameters of a Population from a Multi-Censored Samples*, Ph.D. Thesis, Iowa State College, Ames, Iwoa.

[10] Linhart, H., Zucchini, W. (1986): *Model Selection*. Wiley, New York.

[11] Stephens, M. (1986),*Tests for the Exponential Distribution*. In: D'Agostino R.B. and Stephens M. (Eds), *Goodness-of-fit technigues*, 421-459, Marcel Dekker, New York.

[12] Sultan, K.S., Mahmoud, M.R., Saleh, H.M. (2007), Estimation of Parameters of the Weibull Distribution Based on Exponential Distribution from Censored Samples. *Technometrics*, 9, 279-292.

[13] Viverose, R., Balakrishnan, N. (1994), Interval estimation of parameters of life from progressively censored data, *Technometrics*, 36, 84-91.

[14] Wang, B.X. (1992), Statistical Inference for Weibull Distribution, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 8, 357-364.