استفاده از روشهای تقریبی در بهینه سازی شکل و ابعاد خرپاها

بهروز حسنی[1]، مصطفی عصاری[2]

1- دانشیار دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود

2- عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد کاشمر

b_hassani@shahroodut.ac.ir
assari@iaukashmar.ac.ir

خلاصه

استفاده از روشهای تحلیلی معمولی در بهینه سازی سازه ها، علاوه بر هزینه های محاسباتی گران، گاه غیر عملی می‌گردد، به خصوص هنگامیکه سازه بزرگ و پیچیده باشد. به همین دلیل روشهای تقریبی در بهینه سازی سازه ها توسعه می یابند. با جایگزین کردن مسئله تقریبی به جای مسئله اصلی و یافتن نقطه بهینه، سرعت همگرایی مسئلهٔ بهینه سازی افزایش یافته و هزینه انجام محاسبات کاهش می یابد. در این مقاله یکی از روشهای کارآمد تقریب سازی، که در زمره تقریب های بهبود یافته قرار می گیرد، با نام تقریب دو نقطه ای نمایی مورد بررسی قرار گرفته است. نرم افزاری بر این اساس تهیه شده که می توان از آن جهت تحلیل و طراحی و همچنین بهینه سازی خرپاها، به عنوان سازه هایی با ساختار ساده و آنالیز سریع، بهره جست. برنامه تهیه شده قادر است با استفاده از اطلاعات حساسیت نقاط پیشین به منظور افزایش دقت و کاهش بازخوانی کدهای تحلیل، فرآیند بهینه سازی را بهبود و تسریع بخشد. در ادامه با حل مثالهایی در زمینه بهینه سازی خرپاهای دو بعدی، تأثیر این روش تشریح گردیده است.

کلمات کلیدی: **بهینه سازی خرپا، بهینه سازی تقریبی، تقریب های بهبود یافته، تقریب دو نقطه ای نمایی**

1. مقدمه

مفهوم بهینه سازی در بسیاری از کارهای روزمرهٔ ما نقش مهمّی ایفا می کند، بویژه هنگامیکه به دنبال بهبود انجام یک فرآیندی می باشیم. در علوم مهندسی، از جمله مهندسی سازه نیز با دامنهٔ وسیعی از روشهای بهینه سازی مواجه هستیم. دخالت چشمگیر کامپیوتر در این عرصه سبب پیشرفت های گسترده ای در ماهیت این روشها گردیده است. در این میان خرپا ها به عنوان سازه هایی پرکاربرد و راحت به لحاظ اجرایی و ساده به لحاظ انتقال مفاهیم آموزشی همواره مورد توجه قرار گرفته است. از این رو طراحی بهینه سازه های خرپایی، یک زمینهٔ فعال تحقیقاتی در حیطهٔ بهینه سازی سازه ها می باشد. سه طبقه بندی عمده در بهینه سازی خرپاها شامل بهینه سازی ابعاد، بهینه سازی شکل و بهینه سازی توپولوژی می‌باشد. بهینه سازی ابعاد شامل بهبود سطح مقطع یا ضخامت المان های مشخصی از سازه خواهد بود. در مقایسه با بهینه سازی ابعاد، بهینه سازی شکل پیچیده تر رفتار می کند. عموماً در مسئله های بهینه سازی شکل، مختصات گره های مدل های اجزاء محدود به عنوان متغیر طراحی انتخاب می گردد که می تواند در طول طراحی به شکل متوالی اصلاح شود. بهینه سازی شکل و بهینه سازی ابعاد، تغییرات جزئی در هندسهٔ سازه را به نمایش می‌گذارند. در حالیکه بهینه سازی توپولوژی طرح کلی یک سازه را مشخص می کند[1].

روش های بهینه سازی سازه ها به طور مشخص به دو دستهٔ روش های تحلیلی[1] و روشهای عددی[2] تقسیم بندی می شوند. اساساً روشهای تحلیلی بر جنبهٔ مفهومی تأکید دارند، در حالیکه روشهای عددی وجه الگوریتمی پیدا می کنند[2].

روشهای تحلیلی معمولاً از تئوری ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، روشهای تغییرات وغیره در مطالعهٔ المان های سازه ای ساده مثل تیر، ستون یا صفحه استفاده می کنند. این روشها اغلب برای مطالعات اساسی بر روی مؤلفه های سازه ای به شکل منفرد مناسب هستند و زمینه ای برای کاربرد در سیستم های سازه ای بزرگ ندارند.

---
[1] Analytical Methods
[2] Numerical Methods

روشهای عددی معمولاً از محاسبات عددی و یا برنامه نویسی ریاضی استفاده می کنند. پیشرفت های اخیر در این زمینه مدیون رشد سریع ظرفیت محاسبات بوسیلهٔ برنامه ها می باشد، که باعث تسهیل در حل مسائل واقعی در مقیاس های بزرگ می گردد. هنگامیکه مسائل عملی به شکل قابل توجهی بزرگ و پیچیده می‌شوند، احساس نیاز به روشهایی که به سرعت همگرایی کمک کنند، بیشتر آشکار می‌گردد[2]. روشهایی تقریبی از این قبیل روشها می‌باشند. انگیزهٔ اصلی در توسعهٔ روشهای تقریبی کاهش هزینه های محاسباتی گرانی است که در روشهای دیگر نمود پیدا می کند. از طرفی هنگامیکه ابعاد مسئله افزایش می یابد حل مسئلهٔ بهینه‌سازی گاه غیر عملی است که با به کار گیری روشهای تقریبی می توان به این مشکل غلبه کرد.

2. مفاهیم تقریب سازی

استفاده از روشهای برنامه ریزی غیر خطی برای مسایل بهینه سازی بزرگ پر هزینه می‌باشد از اینرو در اواسط دههٔ هفتاد، مفاهیم تقریب سازی پی ریزی شد. اگر بخواهیم بین تقریب سازی تابع و تقریب سازی مسئله وجه تمایز قائل بشویم. تقریب سازی تابع یک بیان ساده ومتفاوتی از تابع هدف و یا توابع قید است و تقریب سازی مسئله عبارتست از جایگزینی بیان اصلی مسئله با مسئله ای که تقریباً معادل آن است امّا راه حل آن به مراتب نسبت به گذشته آسان‌تر می باشد[3].

ساده ترین نوع این تقریب های خطی، تقریب بر اساس بسط سری تیلور می باشد. بسط این سری با مشتقات مرتبهٔ اول برای تابع داده شده $g(x)$ برابر است با :

$$g_L(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{X0} \tag{1}$$

برای بعضی از کاربردهای بهینه سازی تقریب خطی حتّی در نقاطی از فضای طراحی که نزدیک نقطهٔ شروع یا اولیه هستند دقت مناسبی ندارند. بنابراین گاهی نیاز می شود که برای رسیدن به یک دقّت مناسب جملات اضافهٔ بسط سری تیلور را نگه داریم. این عمل مستلزم انجام محاسبات پیچیده و پر هزینهٔ مشتقات مراتب بالاتر است[4]. به جای انجام این محاسبات، محقّقین تقریب های دیگری را پیشنهاد دادند که فقط از مشتقات مراتب اوّل استفاده می‌کنند، امّا نسبت به تقریب خطّی دقت بیشتری را می توانند فراهم کنند. یکی از این تقریب هایی که با الهام از تقریب خطی پیشنهاد شده است، تقریب معکوس است که یک تقریب خطی از y_i (تابع معکوس x_i) است[5]. ($y_i = 1/x_i$)

به عنوان مثال در مطالعات بهینه سازی مربوط به صفحات و یا خرپاها معمولاً متغیرهای طراحی، سطح مقطع اعضای خرپا یا ضخامت المان های تنش صفحه ای است و در سازه ها عموماً قیود تنش و یا تغییر مکان نسبت به معکوس این متغیرها خطی می‌باشند[6]. تقریب معکوس به شکل جملات زیر بر حسب متغیرهای طراحی اصلی بیان می شود :

$$g_R(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})\frac{x_{0i}}{x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{X0} \tag{2}$$

تقریب دیگری که در این راستا پیشنهاد شده، ترکیبی از تقریب خطی و تقریب معکوس است. برای بدست آوردن این تقریب ابتدا حاصل تفریق تقریب معکوس از تقریب خطی را به شکل زیر می نویسیم :

$$g_L(X) - g_R(X_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{0i})^2}{x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{X_0} \tag{3}$$

تقریب محافظه کار[1] با انتخاب جملات بزرگتر به شکل زیر بیان می شوند :

$$g_C(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^{n}G_i(x_i - x_{0i})\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{X_0} \tag{4}$$

$$G_i = \begin{cases} 1 & if \quad x_{0i}(\partial g/\partial x_i) \geq 0 \\ x_{0i}/x_i & \quad otherwise. \end{cases}$$

هنگامیکه مقدار $G_i = 1$ باشد، تقریب مورد نظر متناظر با تقریب خطی و در صورتیکه $G_i = x_{0i}/x_i$ باشد متناظر با تقریب معکوس خواهد بود[5].

[1] Conservative Approximation

3. تقریب های بهبود یافته

در تقریب هایی که تاکنون مورد بررسی قرار گرفت، تنها از اطلاعات یک نقطه برای تقریب‌زدن توابع استفاده می شد، که این نوع تقریب ها را با نام تقریب های یک نقطه‌ای[1] می‌شناسیم. نوع دیگر تقریب ها که از بهبود تقریب های یک نقطه ای بدست می آید، از اطّلاعات سایر نقاط به منظور افزایش دقّت در روشهای تقریبی و نیز کاهش تعداد بازخوانی کدهای تحلیل، استفاده می کند.

یکی از این روشهای بهبود یافته ، تقریب نمایی دو نقطه ای[2] است[7]. در این تقریب متغیر واسطهٔ y_i به شکل زیر تعریف می شود :

$$y_i = x_i^{\,p_i} \tag{5}$$

با در نظر گرفتن تقریب مرتبهٔ اوّل تیلور در Y ، خواهیم داشت :

$$g(Y) = g(Y_0) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{0i}) \frac{\partial g(Y_0)}{\partial x_i} \tag{6}$$

و با جایگزین کردن رابطهٔ (5) در رابطهٔ (6) داریم :

$$g(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i^{\,pi} - x_{0i}^{\,pi}) \frac{\partial g(X_0)}{\partial x_i} \times \left[1 / \left(\partial y_i / \partial x_i \right) \right] \tag{7}$$

جملهٔ $\partial y_i / \partial x_i$ به شکل زیر محاسبه می گردد :

$$\frac{\partial \left(x_i^{\,p_i} \right)}{\partial x_i} = p_i \,.\, x_i^{\,p_i - 1} \tag{8}$$

و با جایگزینی مجدد در رابطهٔ (7) خواهیم داشت :

$$g(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{pi} - 1 \right] \times \left(\frac{x_{0i}}{p_i} \right) \times \frac{\partial g(X_0)}{\partial x_i} \tag{9}$$

نوآوری این روش در محاسبهٔ p_i با استفاده از مشتق نقطهٔ قبلی (X_1) می باشد.

$$\partial g(X_1) / \partial x_i = \left(x_i / x_{0i} \right)^{\,pi-1} \times \partial g(X_0) / \partial x_i \tag{10}$$

که X_0 و X_1 به ترتیب نقطهٔ فعلی که تقریب سازی در آن انجام می شود و نقطهٔ قبلی بدست آمده در فرآیند تکرار قبل می باشند. از معادلهٔ مذکور p_i به شکل زیر محاسبه می گردد :

$$p_i = 1 + Log \left[\frac{\partial\, g(X_1) / \partial x_i}{\partial\, g(X_0) / \partial x_i} \right] \div Log \left(x_i / x_{0i} \right) \tag{11}$$

برای شروع تقریب سازی، یک تقریب خطی انتخاب شده و سپس p_i از معادلهٔ (11) محاسبه می گردد. انتخاب تقریب خطی اوّلیه دلخواه بوده و می توان از تقریب معکوس نیز استفاده کرد. نکتهٔ مهم، بررسی روند انجام عملیات می باشد. باید توجه کرد که در هر تکرار می توانیم از اطلاعات تکرار قبلی استفاده کنیم و نیازی به انجام محاسبات اضافی نیست[7]،[8] .

4. تعریف مسئلهٔ بهینه سازی

فرآیند طراحی، به شکل یافتن مقدار بیشینه و یا کمینهٔ بعضی از پارامترها تعریف می شود. بهینه سازی با تغییر متغییرهای طراحی کمک می کند تا مقدار بیشینه و یا کمینه ای را برای تابع هدف در عین برآورده شدن ضوابط قیود طراحی، پیدا کنیم. هدف اصلی، پیدا کردن اندازهٔ سطح مقطع اعضاء و همچنین مختصات گره های خرپا می باشد که در عین حال بایستی قیود مسأله نیز اقناع گردند. در این تحقیق، بهینه سازی برای خرپاهای دو بعدی مورد بررسی قرار گرفته و تابع هدف وزن (ویا حجم مصالح) در نظر گرفته شده است. شکل کلّی مسئلهٔ بهینه سازی با فرمول بندی ریاضی برابر است با :

---
[1] Single-point approximation
[2] Two point exponential approximation

$$
\begin{aligned}
&F(X) \rightarrow \min \\
&g_j(X) \le 0 \qquad j = 1,\ldots,M \\
&A_i \le X_i \le B_i \qquad i = 1,\ldots,N
\end{aligned}
\tag{12}
$$

در رابطهٔ فوق M تعداد قیود، N تعداد متغیرهای طراحی و A_i , B_i به ترتیب کران پایین و بالای متغیرهای طراحی می باشند.

همانطور که ذکر گردید برای شروع تقریب سازی، یک تقریب خطی مناسب انتخاب می گردد. حدس اوّلیه برای p_i بسیار حائز اهمیّت است. اگر تابع نسبت به متغیّرها خطی بوده و یا به حالت خطی نزدیک باشد، مانند تابع وزن خرپا نسبت به مساحت سطح مقطع اعضای آن، در این حالت p_i برابر 1 فرض می‌شود. و اگر تابع مربوطه نسبت به متغیّرها غیرخطی باشد، مانند تنش در هر المان نسبت به مساحت سطح مقطع، مقادیر p_i برابر 1- قرار داده می‌شود[7].

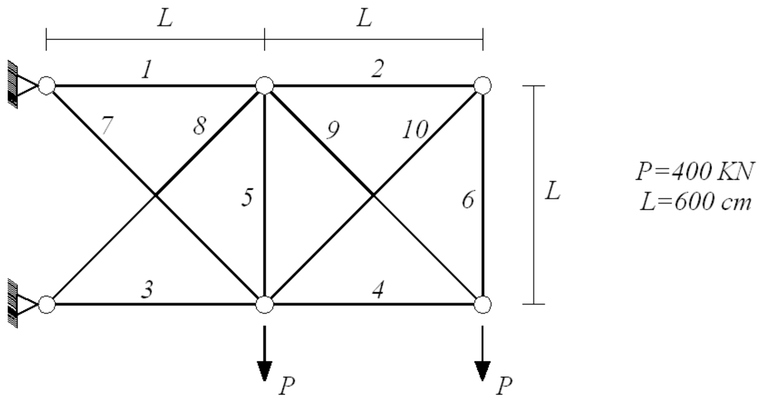
در تکرارهای بعدی، p_i برای هر تابع با کمک فرمول (11) بدست می آید. فرآیند بهینه‌سازی با تقریب جدید حول نقطهٔ بدست آمده ادامه می‌یابد. اگر توان p_i بزرگتر از 1 باشد به عدد 1 رند شده و اگر کمتر از 1- باشد مقدار 1- در نظر گرفته می شود. در نظر گرفتن این مرزها ضروری است، چرا که نتایج عددی نشان می دهد که در غیر اینصورت، تقریب سازی می تواند خطاهای معنی داری در بر داشته باشد[8].

از آنجائیکه برای هر قید، به تعداد متغیرهای طراحی p_i وجود دارد، لذا با یک ماتریس دو بعدی به ابعاد $m \times n$ مواجه هستیم (که m برابر تعداد قیدها و n برابر تعداد متغیرها می‌باشد). برای تابع هدف ابعاد ماتریس مربوطه $m \times n$ خواهد بود. با محاسبهٔ p_i در هر تکرار، با استفاده از اطلاعات حساسیت نقطهٔ قبل می توان شکل کلّی تقریب دو نقطه ای را به صورت فرمول (9) پدید آورد[7].

5. نمونه های طراحی

در این بخش به منظور بررسی تأثیر روش دو نقطه ای در میزان سرعت همگرایی به تحلیل عددی نتایج چندین مثال از بهینه سازی خرپاها می پردازیم. حل این مسائل را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم، ابتدا در مرحلهٔ اوّل مسئلهٔ اصلی را بدون دخالت روش دو نقطه‌ای تحلیل می کنیم. در مرحلهٔ بعد با استفاده از روش پیشنهاد شده، مسئلهٔ اصلی را با یک مسئلهٔ تقریبی ساده‌تر جایگزین نموده و حل می کنیم، سپس مجدداً توابع هدف و قیود را پیرامون نقطهٔ جدید تقریب زده و فرآیند را تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌دهیم. مقایسه روشهای مختلف بهینه‌سازی در این زمینه، بینش لازم را برای قضاوت در مورد کارایی این روش، فراهم می کند.

به عنوان اولین مثال خرپای ده عضوی نشان داده شده در شکل (1) را که برای تحمّل دو نیروی قائم $P = 400\,\mathrm{KN}$ طراحی شده است، مورد بررسی قرار می دهیم[9]،[10]. حدود تنش $\sigma^U = 25\,\mathrm{KN/cm^2}$ و $\sigma^L = -25\,\mathrm{KN/cm^2}$ به عنوان قیود مسئله فرض می‌گردد. مساحت سطح مقطع هر عضو به عنوان متغیّر طراحی A و وزن سازه به عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. شمارهٔ هر المان در کنار آن درج گردیده است.



شکل 1 – بهینه سازی خرپای ده عضوی

از آنجائیکه $W = \gamma V$، بنابراین برای راحتی محاسبات می‌توانیم حجم مصالح را به عنوان تابع هدف در نظر بگیریم. نتایج حاصل از هر روش، در جدول (1) مقایسه گردیده است.

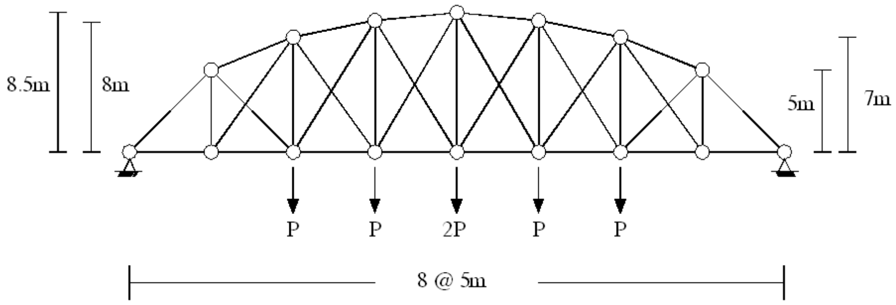
جدول 1- مقایسه روشهای مختلف در بهینه سازی خرپای ده عضوی

Element (cm^2)	*SLP Method*	*SQP Method*	*Two Point Exponential*
A_1	30.772	31.996	29.024
A_2	1.4428	0.001	0.001
A_3	33.228	32.004	35.044
A_4	14.772	15.996	15.320
A_5	0.001	0.001	0.002
A_6	1.434	0.001	0.001
A_7	24.368	22.632	26.852
A_8	20.888	22.624	17.848
A_9	20.888	22.624	22.204
A_{10}	2.6964	0.001	0.001
F (cm^3)	1074.03	1055.98	1044.06
Time(sec)	**0.344**	**0.281**	**0.156**

در جدول (1) متغیّرهای A_i، نشان‌دهندهٔ مساحت سطح مقطع هر المان بر حسب cm^2 و F تابع حجم سازه بر حسب cm^3 می‌باشد. همچنین در ردیف آخر زمان انجام محاسبات توسط کامپیوتر، بر حسب ثانیه بیان گردیده است.

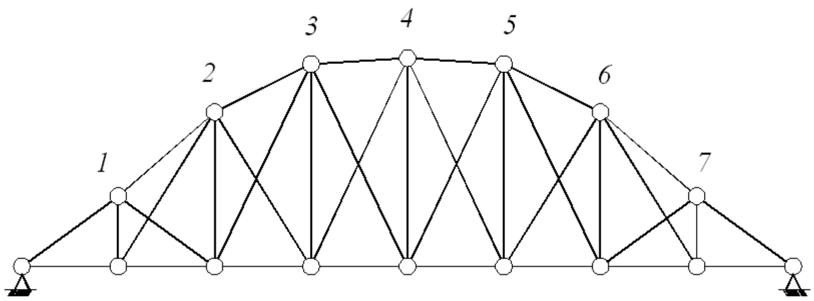
همانطور که از نتایج جدول (1) پیداست، استفاده از روش دو نقطه‌ای باعث می‌شود که حل مسئله با سرعت و نیز دقّت مناسب، به جواب بهینه نزدیک شود.

در مثال بعدی بهینه سازی هندسی خرپای نشان داده شده در شکل (2) را مورد بررسی قرار می دهیم. تنش در هر عضو به عنوان تابع قید به $\sigma^L = -10\ kN/cm^2$ و $\sigma^U = 10\ kN/cm^2$ محدود می‌شود. تابع هدف حجم (وزن) کلّی سازه بوده و ارتفاع گره های فوقانی به عنوان متغیّر طراحی در نظر گرفته می‌شود. مساحت سطح مقطع هشت عضو تحتانی $10\,cm^2$، هشت عضو فوقانی $20\,cm^2$ و بقیّه عضوها $5\,cm^2$ می‌باشد. مقادیر $P = 50\,KN$ می باشد.



شکل 2- بهینه سازی هندسی خرپای پل (35عضوی)

شمارهٔ گره های متغیّر در حالت اولیّهٔ خرپا و همچنین شکل حاصل از بهینه‌سازی خرپا در شکل (3) نمایش داده شده است.



شکل 3- شکل خرپای پل پس از بهینه سازی

باید توجه نمود که این شکل بهینه منحصر به بارگذاری نشان داده شده می‌باشد و طبیعتاً هنگامیکه بارگذاری تغییر کند، شکل حاصل از بهینه‌سازی نیز تغییر می‌نماید. نتایج حاصل از بهینه‌سازی شکل، به روشهای مختلف در جدول (2) مقایسه شده‌اند.

جدول 2- مقایسه روش های مختلف در بهینه‌سازی شکل خرپای پل

Height (m)	*SLP Method*	*SQP Method*	*Two Point Exponential*
Y_1	3.946	3.615	3.605
Y_2	7.805	7.933	7.697
Y_3	10.253	10.401	10.401
Y_4	10.160	10.709	10.709
Y_5	10.253	10.401	10.401
Y_6	7.805	7.933	7.697
Y_7	3.946	3.615	3.605
$F(cm^3)$	206402	206402	203537
Time(sec)	**0.356**	**0.356**	**0.001**

در جدول مذکور، مقادیر متغیر های Y بیانگر ارتفاع گره های فوقانی خرپا بوده و بر حسب متر و F تابع حجم سازه بر حسب cm^3 می‌باشد. در ردیف آخر زمان انجام محاسبات توسط کامپیوتر، بر حسب ثانیه بیان گردیده است.

6. نتایج

در این مقاله نوع دیگری از روشهای بهینه سازی تقریبی، با نام تقریب های بهبود یافته و بویژه روش دو نقطه ای نمایی بیان شد. این روش سعی دارد مسئلهٔ اصلی را به چندین مسئلهٔ ساده‌تر تجزیه کند که محاسبهٔ آنها سریعتر انجام شود. هر کدام از این زیر مسئله ها به یکدیگر وابسته هستند، بدین شکل که از اطلاعات مشتقات بدست آمده در تکرار قبل، زیر مسئلهٔ جدید ساخته شده و حل می‌گردد. نقطهٔ بهینه بدست آمده مبنای پایه ریزی زیر مسئلهٔ بعدی می‌شود و این فرآیند تا رسیدن به جواب بهینهٔ واقعی ادامه دارد. در حقیقت این بزرگترین امتیاز روش دو نقطه‌ای است که باعث می‌شود سرعت همگرایی افزایش بیابد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که اگر به شکل مناسبی از روش دونقطه‌ای نمایی استفاده کنیم، ابزار قدرتمند و با کیفیّتی برای بهینه‌سازی سازه های بزرگ در اختیار داریم.

7. مراجع

1. Kirsch ,U. 1993: *"Structural Optimization (Fundamentals and Application)"* , Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993

2. Vanderplaats, G.N. 1984 : *" Numerical Optimization Techniques For Engineering Design "* , McGraw-Hill, N.Y.,1984

3. Etman,P.(1997), *"Optimization of multibody systems using approximation concepts"* , PhD thesis, TU Eindhoven.

4. Haftka, R.T. 1989: *"First- and second-order constraint approximations in structural optimization"* . Comp. Mech.

5. Barthelemy, J.M.; Haftka, R.T. 1993: *"Approximation concepts for optimum structural design – a review"* . Struct Optim 5, 129–144

6. Toropov, V.V. and Alvarez, L.F. (1998), *Multidisciplinary Analysis and Optimization,* St. Louis (USA), September 2-4, 1998, part 1, pp. 490-498, AIAA

7. Fadel, G.M.; Riley, M.F.; Barthelemy, J.F.M. 1990: *"Two point exponential approximation methods for structural optimization"* . Struct. Optim. 2, 117–124

8. Wang,L.; Grandhi, R.V.1995a: *"Improved two-point function approximation for design optimization"* . AIAA J. 33, 1720-1727

9. Alvarez, L.F , (2000) , *"Approximation model building for design optimization using the response surface methodology and genetic programming"* , PhD thesis , University of Bradford, UK

10. P´erez,V.M.; Renaud, J.E. and Watson, L.T. (2004), *"An interior-point sequential approximate optimization".* Struct Multidisc Optim 27, 360–370