



## بررسی روش های حل اجزای محدود مسائل چپ شدگی تیرهای بدون تکیه گاه های جانبی و کماتش پیچشی ستون ها

اسماعیل شکوری<sup>۱</sup>، بهروز حسینی<sup>۲</sup>، علی هوسی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد هوا فضا، دانشگاه فردوسی مشهد، Esmaeel.Shakoori@gmail.com

<sup>۲</sup>دانشیار گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، behrooz.hassani@gmail.com

<sup>۳</sup>دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، havasi57@gmail.com

۱۳۲۸

### چکیده

در حیطه ی مهندسی سازه، تشکیل معادلات حاکم بر مسائلی نظیر اعوجاج تیرها بدون تکیه گاه های جانبی و کماتش پیچشی ستونها متحرک به معادلات دیفرانسیل مرتبه سه می شود. از آنجایی که حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد با مدل اجزای محدود ریز، به دلیل عدم امکان استفاده از شکل ضعیف معادله، امکان پذیر نیست؛ لذا در این مقاله جهت یافتن روشی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد، روش های مختلف اجزای محدود بررسی شده است. در این راستا معادله ی اعوجاج تیرها بدون تکیه گاه های جانبی، جهت یافتن تنش های نرمال و برشی در پال تیر، با دو مدل اجزای محدود ترکیبی و مدل اجزای محدود گالرکین با شرایط مرزی مختلف، حل شده است. به علت استفاده از چند جمله ای های مرتبه بالا در تشکیل توابع شکل مدل اجزای محدود قوی، می توان با تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه فرد بالاتر به چند معادله دیفرانسیل با مرتبه پایین تر، از دشواری های موجود در یافتن توابع شکل و زمان حل معادله کاست. همچنین در معادله ی کماتش پیچشی ستون هایی که تحت تاثیر بارهای فشاری قرار گرفته اند، بار بحرانی کماتش مشخص شده است. به منظور نشان دادن کارآمدی و دقت روش های پیشنهادی، نتایج حاصل با نتایج تحلیلی موجود مقایسه شده اند. مقایسه ی نتایج، کارآمدی روش های پیشنهادی در حل این دسته از معادلات دیفرانسیل را نشان می دهند.

واژه های کلیدی: اجزای محدود ترکیبی، گالرکین، چپ شدگی، کماتش پیچشی

## بررسی روش های حل اجزای محدود مسائل چپ شدگی تیرهای بدون تکیه گاه های جانبی و کمانش پیچشی ستون ها

اسماعیل شکوری<sup>۱</sup>، بهروز حسنی<sup>۲</sup>، علی هوسی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد هوا فضا، دانشگاه فردوسی مشهد، Esmaeel.Shakoori@gmail.com

<sup>۲</sup>دانشیار گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، behrooz.hassani@gmail.com

<sup>۳</sup>دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، havasi57@gmail.com

### چکیده

در حیطه ی مهندسی سازه، تشکیل معادلات حاکم بر مسائلی نظیر اعوجاج تیرها بدون تکیه گاه های جانبی و کمانش پیچشی ستونها<sup>۱</sup> منجر به معادلات دیفرانسیل مرتبه سه می شود. از آنجایی که حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد با مدل اجزای محدود ریتز، به دلیل عدم امکان استفاده از شکل ضعیف<sup>۲</sup> معادله، امکان پذیر نیست؛ لذا در این مقاله جهت یافتن روشی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد، روش های مختلف اجزا محدود بررسی شده است. در این راستا معادله ی اعوجاج تیرها بدون تکیه گاه های جانبی، جهت یافتن تنش های نرمال و برشی در بال تیر، با دو مدل اجزای محدود ترکیبی<sup>۳</sup> و مدل اجزای محدود گالرکین با شرایط مرزی مختلف، حل شده است. به علت استفاده از چند جمله ای های مراتب بالا در تشکیل توابع شکل مدل اجزا محدود قوی، می توان با تبدیل معادله دیفرانسیل مراتب فرد بالاتر به چند معادله دیفرانسیل با مرتبه پایین تر، از دشواری های موجود در یافتن توابع شکل و زمان حل معادله کاست. همچنین در معادله ی کمانش پیچشی ستون هایی که تحت تاثیر بارهای فشاری قرار گرفته اند بار بحرانی کمانش مشخص شده است. به منظور نشان دادن کارآمدی و دقت روش های پیشنهادی، نتایج حاصل با نتایج تحلیلی موجود مقایسه شده اند. مقایسه ی نتایج، کارآمدی روش های پیشنهادی در حل این دسته از معادلات دیفرانسیل را نشان می دهند.

### واژه های کلیدی

اجزای محدود ترکیبی، گالرکین، چپ شدگی، کمانش پیچشی.

### مقدمه

نیم رخ های فولادی تیرهایی از قبیل آی شکل (I)، ناودانی (L) و بال پهن که از نظر مقاومت خمشی و فشاری دارای مزایای قابل توجهی می باشند، از لحاظ پیچشی مقاومت خوبی ندارند، و اگر به علتی تحت

پیچش قرار گیرند، تغییر شکل ها و تنش های قابل توجه و یا ناپایداری های ناخواسته از کمانش ممکن است در آنها به وجود آید. به طور کلی وقتی که یک عضو با مقطع غیر دایره تحت پیچش قرار می گیرد. مقاطع صفحه ای عمود بر محور عضو، پس از پیچش دیگر به صورت صفحه باقی نمی ماند و سطح تاب برداشته ای<sup>۴</sup> به وجود می آورد. در این گونه اعضا اگر مقاطع برای تاب برداشتن آزاد نباشند علاوه بر تنش های برشی، تنش های قائم بر مقطع نیز خواهیم داشت. بنابراین تحلیل مسئله چپ شدگی در سازه پرکاربردی مانند تیر از اهمیت خاصی برخوردار می باشد [۱]. به علت آنکه معادله ی حاکم بر مسائل چپ شدگی پیچشی تیرها بدون اتکای جانبی و کمانش پیچشی ستون ها مانند کمانش صفحات دایره ای شکل متقارن مرکزی که تحت اثر نیروهای فشاری شعاعی یکنواخت قرار دارند، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه می باشد [۲،۳]. لذا ناگزیر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه فرد با استفاده از روش های عددی کارآمد می باشیم. روش عددی دیفرانسیل کوادرچر<sup>۵</sup> که توسط چانگ نیو چنگ معرفی شده است. روش مناسبی می باشد، که از آن در حل معادلات چپ شدگی پیچشی استفاده شده است [۴]. روش اجزای محدود از جمله روش های عددی بسیار نیرومند در حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی با هر مرتبه ای با قدمتی شصت ساله است. نرخ همگرایی بالا و استفاده ی آسان برای شرایط مرزی با هندسه ی نسبتاً پیچیده و الگوریتم شدن آن، جهت تهیه برنامه های کامپیوتری از مزایای شناخته شده این روش می باشد [۵]. که از آن به طور گسترده در حل معادلات دیفرانسیل حاصل از مسائل مکانیک مهندسی، که اکثراً معادلاتی از مراتب زوج هستند استفاده شده است. در این مقاله با بررسی این روش شناخته شده برای حل مسئله چپ شدگی، نشان داده شده است که حل معادلات فرد مراتب بالا هم به آسانی و با دقت بسیار بالا با استفاده از روش های قوی<sup>۶</sup> اجزای محدود قابل دستیابی می باشد.

### تعریف مسئله

<sup>۴</sup> Warped Surfaced

<sup>۵</sup> (DQEM) Differential quadrature element method

<sup>۶</sup> Strong form

<sup>۱</sup> Flexural- Torsional Buckling of Columns

<sup>۲</sup> Weak form

<sup>۳</sup> Mixed Finite Element Model

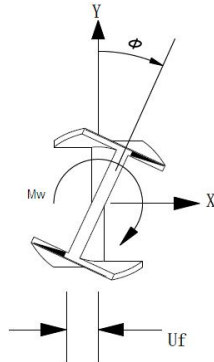
الف: مسئله چپ‌شدگی تیر بدون اتکای جانبی شکل ۱ تیری با مقطع (I) شکل را نشان می‌دهد. که در یک انتها به صفحه‌ای سخت جوش شده و در انتهای آزادش تحت لنگر پیچشی  $M_z$  قرار دارد. مقطع عرضی این تیر در شکل ۲ نشان داده شده است، که در آن جان تیر نسبت به وضعیت اولیه به اندازه  $\phi$  دوران نموده است. و بال‌های فوقانی و تحتانی نیز به اندازه  $U_f$  به وضعیت اولیه تغییر مکان جانبی نموده‌اند. در نتیجه این لنگر پیچشی، دو نوع تنش برشی در سطح مقطع بوجود می‌آید، یکی به واسطه پیچش خالص و دیگری به علت ممانعت ایجاد شده در مقابل تاب برداشتن، وجود این دو نوع تنش برشی، طبق رابطه ۱ دو لنگر پیچشی مقاوم، یکی لنگر پیچشی خالص  $V$  و دیگری لنگر پیچشی ممانعت شده  $^A$  ایجاد می‌کند.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dz^2} \quad (3)$$

لنگر پیچشی وارد بر انتهای آزاد عضو شکل ۱ باعث خمش جانبی بال‌های فوقانی و تحتانی در دو جهت مخالف می‌شود. این خمش جانبی بال‌ها سبب ایجاد تنش‌های برشی و قائمی می‌شود، که باید بر تنش‌های برشی و قائم موجود به علت سایر عوامل افزوده گردد.

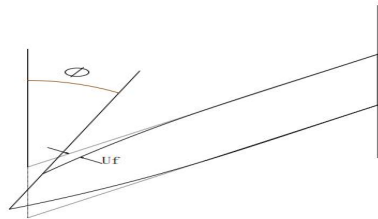
اگر نیروی برشی بال به علت خمش جانبی طبق شکل با  $V_f$  نشان داده شود. حاصل ضرب زوج نیروی  $V_f$  در فاصله بین آن‌ها یعنی  $h$  ایجاد لنگر پیچشی مقاوم  $M_w$  می‌نماید.

$$M_w = v_f h \quad (4)$$



شکل ۳: مقطع تیر تحت لنگر پیچشی تابیدگی

که در مقابله با پیچش خارجی، با لنگر پیچشی  $M_s$  مشارکت می‌کند. اگر در شکل ۴  $U_f$  تغییر مکان جانبی بال تیر نسبت به وضعیت اولیه باشد. و همچنین جان تیر در اثنای پیچش به صورت صفحه باقی بماند می‌توانیم رابطه ۵ را بنویسیم.

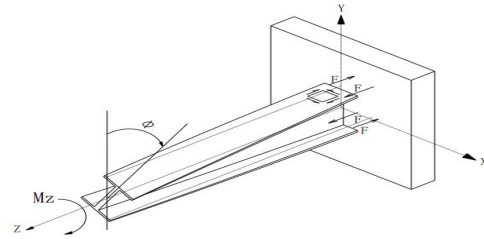


شکل ۴: تغییر مکان جانبی بال تیر

$$U_f = \phi \frac{h}{2} \quad (5)$$

رابطه بالا برای شناخت پیچش نیم‌رخ‌های آی (I) و ناودنی (D) شکل، بسیار مهم می‌باشد. این رابطه نشان می‌دهد که زاویه

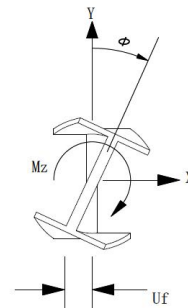
شکل ۱: تیر تحت پیچش



شکل ۱: تیر تحت پیچش

$$M_z = M_s + M_w \quad (1)$$

توجه به این نکته لازم است که در حوالی مقطع گیر دار شده، اکثر مقاومت پیچشی به علت لنگر پیچشی ممانعت شده می‌باشد، لیکن با دور شدن از این مقطع رفته رفته اثر آن کم شده به طوری که در حوالی انتهای آزاد، اکثر مقاومت پیچشی مقطع به علت پیچش خالص می‌باشد.



شکل ۲: مقطع عرضی تیر تحت پیچش

ارتباط بین زاویه پیچش واحد طول  $\left(\frac{d\phi}{dz}\right)$  و لنگر پیچشی  $M_s$  طبق رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$M_s = G_j \frac{d\phi}{dz} \quad (2)$$

<sup>7</sup> Pure torsion

<sup>8</sup> Restraint Warping torsion

<sup>9</sup> Torsion curvature

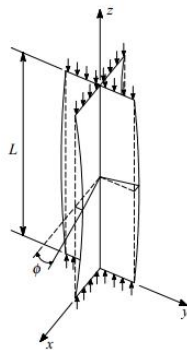
بنابراین معادله حاکم بر کمانش پیچشی ستون به صورت رابطه ۱۵ نوشته می شود که معرف یک مسئله مقدار ویژه است.

$$\begin{cases} EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} - \left( \frac{P}{A} r_0^2 - G_j \right) \frac{d\phi}{dz} = 0 \\ \phi(0) = 0, \phi(L) = 0 \\ \frac{d^2 \phi(L)}{dz^2} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

بار بجرانی کمانش با در نظر گرفتن معادله ۱۶ به عنوان جواب معادله دیفرانسیل بالا طبق رابطه ۱۷ محاسبه می شود.

$$\phi(z) = \phi \left( \frac{L}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi z}{L} \right) \quad (16)$$

$$p_{cr} = \frac{G_j}{r_0^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 EC_w}{G_j L^2} \right) \quad (17)$$



شکل ۵: کمانش پیچشی تیر ستونی با مقطع صلیبی

### بررسی روش های حل اجزای محدود معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ی فرد

الف: فرمول بندی شکل ضعیف<sup>۱۱</sup>

در روش اجزای محدود، از عبارت انتگرالی برای تولید روابط جبری میان ضرایب  $u_j$  در تقریب زیر استفاده می کنیم.

$$u \approx u_N = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (18)$$

که  $u_N$  بیانگر حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل خاص (۱۹) در حوزه ی تعریف  $\Omega$  می باشد.

$$A(u) = f \quad (19)$$

از آنجایی که جایگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل حاکم همواره به تعداد معادلات مستقل جبری خطی مورد نیاز برای ضرایب مجهول  $u_j$  ختم نمی گردد، استفاده از عبارت انتگرالی معادل با معادله ی دیفرانسیل حاکم الزامیست. تنها راه حصول اطمینان از برابری دقیق تعداد  $n$  معادله ی موجود با مجهولات، مستلزم صفر شدن انتگرالهای وزنی خطا در معادله می باشد. در نتیجه حل تقریبی

$u_N$  ملزم به ارضای معادله دیفرانسیل به صورت انتگرال وزنی  $20$

$$\int_{\Omega} wR \, d\Omega = 0 \quad (20)$$

$$R \equiv A(u_N) - f \quad (21)$$

پیچش متناسب با تغییر مکان جانبی می باشد. شرایط مرزی پیچش نیز مشابه شرایط مرزی خمش جانبی می باشد.

اگر از رابطه بالا سه بار نسبت به  $Z$  مشتق بگیریم. داریم:

$$\frac{d^3 U_f}{dz^3} = \frac{h}{2} \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (6)$$

رابطه ی خمش- انحنای جانبی بال نیز به صورت معادله  $7$  نوشته می شود. که در آن  $M_f$  لنگر خمشی عرضی بال و  $I_f$  ممان اینرسی یک بال نسبت به محور  $Y$  مقطع می باشد. علامت منفی نیز به این علت است که خمش مطابق شکل ۱ مثبت در نظر گرفته شده است. یعنی  $M_f$  منفی  $U_f$  مثبت ایجاد می کند.

$$\frac{d^2 U_f}{dz^2} = -\frac{M_f}{EI_f} \quad (7)$$

$$V = \frac{dM}{dz} \quad (8)$$

با توجه به روابط بالا معادله ۹ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{d^3 U_f}{dz^3} = -\frac{V_f}{EI_f} \quad (9)$$

با استفاده از رابطه های ۶ و ۹ داریم.

$$V_f = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (10)$$

نیروی برشی بال فوقانی و تحتانی کوپلی با فاصله  $h$  ایجاد می نماید. که لنگر این کوپل مساوی مولفه ی لنگر پیچشی  $M_w$  می شود.

$$M_w = V_f h = -EI_f \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \phi}{dz^3} = -EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (11)$$

که در آن  $C_w$ ، ثابت پیچش تابیدگی<sup>۱۲</sup> نامیده می شود.

$$C_w = I_f \frac{h^2}{2} \quad (12)$$

طبق رابطه ۱ لنگر پیچشی مقاوم مقطع مجموع لنگر پیچشی خالص  $M_s$  و لنگر پیچشی تابیدگی  $M_w$  می باشد.

$$M_z = G_j \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (13)$$

رابطه ی فوق رابطه پیچش مقاطع آی (I) و ناودانی (I) شکل، می باشد.

ب: کمانش پیچشی ستون ها

شکل ۵ تیر ستونی با سطح مقطع صلیبی را با دو صفحه تقارن که تحت اثر بارهای فشاری محوری  $P$  قرار دارد نشان می دهد، معادله ۱۳ نیز می تواند بیانگر کمانش پیچشی این تیر ستون با توزیع گشتاور پیچشی  $M_z$  که توسط رابطه ۱۴ بیان شده است، باشد.

$$\begin{cases} M_z = \frac{P}{A} r_0^2 \frac{d\phi}{dz} \\ r_0^2 = \frac{I_x^2 + I_y^2}{A} \end{cases} \quad (14)$$

<sup>11</sup> Weak Formulation

<sup>10</sup> Warping torsional constant

شکل ضعیف، توسط عبارت انتگرالی وضع می‌گردد. بنابراین  $\Psi$  باید دارای مشتقات غیر صفر، تا بالاترین مرتبه‌ی موجود در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم باشد. از آنجایی که این نوع شکل انتگرالی شامل هیچ‌گونه شرایط مرزی معین مسئله نمی‌باشد، توابع تقریب باید به گونه‌ای انتخاب شوند، که حل تقریبی، هر دو شرایط مرزی اساسی و طبیعی را ارضاء نماید. این شرط درجه عبارت چند جمله‌ای مورد استفاده در روش باقیمانده وزنی را افزایش می‌دهد. به طور کلی،  $\Psi$ ها در این روش توابعی با درجه بالاتری نسبت به روش رایلی-ریتز می‌باشند. و توابع مورد استفاده در رایلی-ریتز ممکن است شرایط پیوستگی در روش باقیمانده‌ی وزنی را اقلانغ نکنند.

پ: فرمولبندی ترکیبی<sup>۱۳</sup>

در حل معادلات دیفرانسیل مراتب بالا، باید از توابع تقریب با پیوستگی بالاتر نیز استفاده نمود. در روش فرمولبندی ترکیبی اجزای محدود می‌توان یک معادله دیفرانسیلی از مرتبه دو یا بالاتر را به چند معادله دیفرانسیل از مرتبه پایین‌تر و یا به صورت دستگاه معادلات مرتبه یک باز نویسی نمود. در این فرآیند ملزم به معرفی متغیرهای اضافه تری می‌باشیم که معمولاً دارای معانی فیزیکی هستند، که کاملاً متفاوت با معانی متغیرهای موجود در معادله اصلی می‌باشند. در ادامه می‌توان با بکارگیری هرکدام از روش‌های شکل ضعیف و یا قوی اجزای محدود دستگاه معادلات حاصل را حل نمود. لازم به ذکر است که دستگاه معادلات خطی از مرتبه یک فقط به کمک روش‌های باقیمانده وزنی قابل حل می‌باشد.

#### حل مسئله چپ شدگی:

در حل معادله دیفرانسیل مرتبه سه، مسئله چپ‌شدگی با استفاده از مدل اجزای محدود قوی، همانطور که گفته شد ملزم به انتخاب توابع تقریبی در یک جزء محدود، به گونه‌ای می‌باشیم که شرایط اساسی (هندسی) و طبیعی (نیروی) را در هر گره به صورت دسته معادلات ۲۳ اقلانغ نماید.

$$\begin{aligned} \phi(z_e) &= u_1, \quad \frac{d\phi(z_e)}{dz} = u_2, \quad \frac{d^2\phi(z_e)}{dz^2} = u_3 \\ \phi(z_{e+1}) &= u_4, \quad \frac{d\phi(z_{e+1})}{dz} = u_5 \\ \frac{d^2\phi(z_{e+1})}{dz^2} &= u_6 \end{aligned} \quad (23)$$

از آنجا که در مجموع شش شرط در یک جزء محدود می‌باشد، باید یک چند جمله‌ای شش پارامتری برای تابع تقریبی جواب انتخاب کنیم.

$$\phi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + C_5 z^4 + C_6 z^5 \quad (24)$$

با اعمال شرایط ۲۳ در معادله ۲۴ و تشکیل یک معادله ماتریسی،  $C_i$  ها را می‌توان بر حسب متغیرهای گره‌ای یا به عبارت دیگر جابه-

می‌باشد. که  $R$  را باقیمانده و  $W$  را تابع وزن می‌نامند. چنانچه مشتق گیری بین حل تقریبی  $u_N$  و تابع وزن  $W$  توزیع شود شکل انتگرالی منتجه شرایط پیوستگی ضعیفتری را روی  $\Psi$  ایجاد می‌نماید، بنابراین شکل انتگرال وزنی را شکل ضعیف می‌نامند، که دارای دو مشخصه مطلوب می‌باشد. اولاً، احتیاج به پیوستگی ضعیفتری برای متغیر وابسته می‌باشند، و اغلب به دسته‌ای از معادلات جبری بر حسب ضرایب ختم می‌گردد. ثانیاً، شرایط مرزی طبیعی مسئله در شکل ضعیف آن گنجانده می‌شود، بنابراین حل تقریبی  $u_N$  تنها لازم است شرایط اساسی مسئله را ارضاء نماید. توزیع مساوی مشتق گیری بین تابع وزن و متغیر وابسته تنها زمانی امکان پذیر است که مشتقات موجود در معادله دیفرانسیل از مرتبه‌ی زوج باشد. تغییر مشتق‌پذیری از متغیرهای وابسته به تابع وزن، بخاطر نیاز به گنجانیدن شرایط معنی دار فیزیکی، بدون توجه به اثرات الزامات پیوستگی اعمال می‌گردد. از طرف دیگر تعویض مشتق‌گیری از متغیرهای وابسته اگر به عبارات مرزی که از نظر فیزیکی معنی دار نیستند، ختم گردد نباید انجام شود. در ضمن تابع وزن باید شکل همگن شرایط مرزی معادله را اقلانغ نماید، و متعلق به همان فضای توابعی باشد که توابع تقریب هستند.

(۲۲)

شکل ضعیف یک معادله دیفرانسیل، یک عبارت انتگرال وزنی معادل با معادله‌ی دیفرانسیل و شرایط مرزی طبیعی معین مسئله می‌باشد، که برای کلیه‌ی مسائل خطی یا غیر خطی که توسط معادلات درجه دو یا بالاتر تشریح شده‌اند وجود دارد. زمانیکه معادله دیفرانسیل خطی و دارای درجه زوج است، شکل ضعیف حاصل دارای شکل دو خطی متقارن در متغیر وابسته  $u$  و تابع وزن  $W$  خواهد بود. در این صورت تابع انرژی پتانسیل کل را می‌توان استخراج نمود و از میان کلیه‌ی توابع قابل قبول  $u$ ، آنکه انرژی پتانسیل کل را کمینه نماید، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی طبیعی مسئله را ارضاء می‌کند.

ب: فرمولبندی روش‌های باقیمانده وزنی<sup>۱۲</sup>

همیشه می‌توان شکل انتگرال وزنی یک معادله‌ی دیفرانسیل را نوشت هرچند، همیشه امکان تولید تابعی که اولین وردش آن برابر شکل وردشی آن باشد وجود ندارد، روش رایلی-ریتز را می‌توان برای کلیه-ی مسائل، شامل خطی یا غیر خطی که دارای شکل ضعیف هستند به کار برد. در این روش تابع وزن اجباراً برابر با توابعی که در تقریب مورد استفاده هستند، قرار داده می‌شوند. اما در روش باقیمانده‌های وزنی، توابع وزن را می‌توان مجموعه‌ای از توابع مستقل انتخاب نمود و لازمی آن تنها تعیین پارامترها به وسیله‌ی شکل انتگرال وزنی می‌باشد. این روش را می‌توان برای تقریب شکل انتگرال وزنی هر معادله به کار برد. ضرورت مشتق‌پذیری توابع شکل در این روش برخلاف

مشتق آن، به عنوان درجه آزادی گره خواهد بود. لیکن برای تقریب جواب اجزاء محدود این مسئله قابل قبول نیست.

با در اختیار داشتن تابع تقریبی جواب ۲۵ شکل باقیمانده وزنی معادله ۱۳ در جزء محدود  $\Omega_e = (z_a, z_b)$  به شکل زیر نوشته می-شود.

$$R_e = \left[ EC_w \frac{d^3 \theta(z)_h^e}{dz^3} - G_j \frac{d\theta(z)_h^e}{dz} - M_z \right] \quad (29)$$

$$\int_{z_a}^{z_b} w R_e dz = 0 \quad (30)$$

با جایگذاری جواب تقریبی ۲۵ و انتخاب  $\omega_i^e$  به عنوان تابع وزن  $w$  در جزء محدود، معادلات زیر حاصل می-گردد.

$$\sum_{j=1}^6 k_{ij}^e u_j^e - M_i^e = 0 \quad \text{یا} \quad [k^e] \{u^e\} = \{M^e\} \quad (31)$$

$$k_{ij}^e = \int_{z_a}^{z_b} \omega_i^e \left( EC_w \frac{d^3 \psi_j^e}{dz^3} - G_j \frac{d\psi_j^e}{dz} \right) dz \quad (32)$$

$$M_i^e = \int_{z_a}^{z_b} \omega_i^e M dz \quad (33)$$

با توجه به انتخابهای متفاوت و مستقلى که برای توابع وزنی وجود دارد، مدل های مختلفی در این روش به شرح زیر نامگذاری شده-اند.

الف: روش گالریکین<sup>۱۹</sup>

تابع وزن  $\omega_i^e$  برابر با توابع شکل  $\psi_j^e$  انتخاب می-شود. در این روش ماتریس ضرایب  $K_{ij}$  قرینه نمی-باشد.

$$k_{ij}^e = \int_{z_a}^{z_b} \psi_i^e \left( EC_w \frac{d^3 \psi_j^e}{dz^3} - G_j \frac{d\psi_j^e}{dz} \right) dz \quad (34)$$

$$M_i^{(e)} = \int_{z_a}^{z_b} \psi_j^e M dz \quad (35)$$

ب: روش حداقل مربعات<sup>۲۰</sup>

در این روش چنانچه عملگر  $A$  خطی باشد.  $\omega_i^e = A(\psi_j^e)$  در نظر گرفته شده و پارامترهای  $u_i$  را با کمینه سازی انتگرال مربع باقیمانده به صورت زیر تعیین می-کنیم.

$$\int \frac{\partial R}{\partial u_i} R d\Omega = 0 \quad (36)$$

در این روش ماتریس ضرایب  $K_{ij}$  قرینه است.

$$\omega_i^e = EC_w \frac{d^3 \psi_j^e}{dz^3} - G_j \frac{d\psi_j^e}{dz} \quad (37)$$

$$k_{ij}^e = \int_{z_a}^{z_b} \left[ \left( EC_w \frac{d^3 \psi_j^e}{dz^3} - G_j \frac{d\psi_j^e}{dz} \right) \left( EC_w \frac{d^3 \psi_i^e}{dz^3} - G_i \frac{d\psi_i^e}{dz} \right) dz \right] \quad (38)$$

$$M_i^{(e)} = \int_{z_a}^{z_b} \left( EC_w \frac{d^3 \psi_j^e}{dz^3} - G_j \frac{d\psi_j^e}{dz} \right) M dz \quad (39)$$

پ: حل به کمک روش فرمولبندی ترکیبی

با استفاده از معادلات ۵ و ۷ و معرفی متغیر  $M_f$  می-توانیم معادله چپ‌شدهگی را با جایگذاری معادله ۴۰ در معادله ۱۳ بصورت یک

جای‌های تعمیم یافته  $u_i$  ها بیان نمود، در نتیجه تابع تقریب جواب را در هر جزء محدود به صورت ۲۵ درمی-آید.

$$\theta(z)_h^e = \sum_{j=1}^6 u_j^e \psi_j^e \quad (25)$$

که مقادیر توابع شکل  $\psi_j^e$  ها در مختصات محلی  $(\bar{z})$  و طبیعی  $(\xi)$  به صورت دسته معادلات ۲۶ و ۲۷ به ترتیب بیان می-شوند.

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(\bar{z})_1^e &= 1 - 6 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^5 + 15 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^4 - 10 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^3 \\ \psi(\bar{z})_2^e &= -\bar{z} \left( 3 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^4 - 8 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^3 + 6 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^2 - 1 \right) \\ \psi(\bar{z})_3^e &= -\frac{\bar{z}^2}{2} \left( \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^3 - 3 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^2 + 3 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right) - 1 \right) \\ \psi(\bar{z})_4^e &= 6 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^5 - 15 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^4 + 10 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^3 \\ \psi(\bar{z})_5^e &= \bar{z} \left( -3 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^4 + 7 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^3 - 4 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^2 \right) \\ \psi(\bar{z})_6^e &= \bar{z}^2 \left( .5 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^3 - \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right)^2 + .5 \left( \frac{\bar{z}}{h_e} \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (26)$$

$$\psi(\xi)_1^e = \frac{1}{80} (40 - 75\xi + 50\xi^3 - 15\xi^5) \quad (27a)$$

$$\psi(\xi)_2^e = \frac{1}{80} (25 - 35\xi - 30\xi^2 + 50\xi^3 + 5\xi^4 - 15\xi^5) \quad (27b)$$

$$\psi(\xi)_3^e = \frac{1}{80} (5 - 5\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5) \quad (27c)$$

$$\psi(\xi)_4^e = \frac{1}{80} (40 + 75\xi - 50\xi^3 + 15\xi^5) \quad (27d)$$

$$\psi(\xi)_5^e = \frac{1}{80} (-25 - 35\xi + 30\xi^2 + 50\xi^3 - 5\xi^4 - 15\xi^5) \quad (27e)$$

$$\psi(\xi)_6^e = \frac{1}{80} (5 + 5\xi - 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 + 5\xi^5) \quad (27f)$$

ارتباط بین دستگاه‌های مختصات کلی  $(z)$ <sup>۱۴</sup>، محلی  $(\bar{z})$ <sup>۱۵</sup> و طبیعی  $(\xi)$ <sup>۱۶</sup> در یک جزء محدود در رابطه زیر بیان شده است.

$$z - z_e = \bar{z}, z_{e+1} = z_e + h_e, \bar{z} = .5(\xi + 1)h_e \quad (28)$$

توابع شکل درجه پنج معادلات بالا با میانمایی<sup>۱۷</sup> و مشتقهای آن در گره ها بدست می-آیند، چنین چندجمله‌ای ها را توابع میانمایی خانواده هرمیت<sup>۱۷</sup> و  $\psi_j^e$  را توابع میانمایی درجه پنج هرمیتی می-نامند. توابع میانمایی هرمیت با توابع میانمایی لاگرانژ<sup>۱۸</sup> که از میانمایی مقادیر تابع در گره‌ها و نه مشتقات آن استخراج می-گردد متفاوت می-باشد. یک جزء درجه پنج لاگرانژی دارای شش گره با متغیر وابسته، و نه

<sup>14</sup> Global coordinate

<sup>15</sup> Local coordinate

<sup>16</sup> Natural coordinate

<sup>17</sup> Hermit

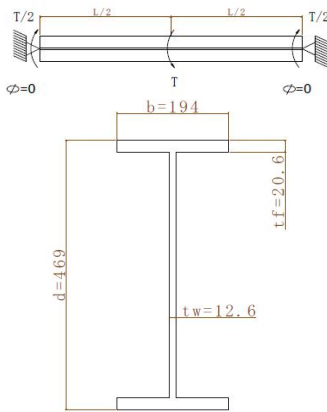
<sup>18</sup> lagrange

<sup>19</sup> Galerkin Method

<sup>20</sup> Least-squares Method

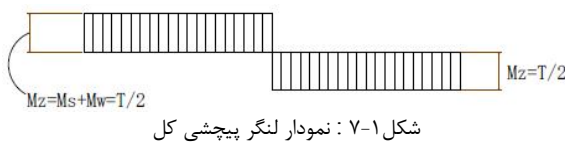


د: مثال از تیری با تکیه‌گاه‌های ساده  
شکل ۶، تیری به طول 8m با مقطع (I) شکل را که در وسط دهانه  
تحت لنگر پیچشی متمرکز 2kn.m قرار دارد نشان می‌دهد که دو  
تکیه‌گاه آن جهت جلوگیری از دوران مقطع ساده می‌باشد. لیکن در  
بالهای مقطع هیچگونه اتکای جانبی وجود ندارد.

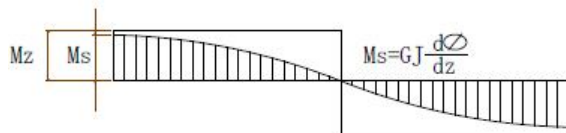


شکل ۶: تیر (I) شکل (ابعاد به میلی‌متر می‌باشد)

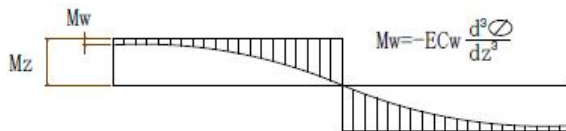
نمودارهای لنگرهای پیچشی کل، سن‌ونان و لنگر پیچشی  
تابیدگی در شکل ۷ رسم شده‌اند.



شکل ۷-۱: نمودار لنگر پیچشی کل



شکل ۷-۲: نمودار لنگر پیچشی سن‌ونان



شکل ۷-۳: نمودار لنگر پیچشی تابیدگی

معادله ۵۰ با شرایط مرزی معین شده، دارای جواب دقیقی طبق  
رابطه ۵۱ می‌باشد.

$$\begin{cases} GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3\phi}{dz^3} = M_z \\ \phi(0) = 0 \\ \frac{d^2\phi(0)}{dz^2} = 0 \\ \frac{d\phi(L/2)}{dz} = 0 \end{cases} \quad (50)$$

دستگاه معادله دیفرانسیل متشکل از یک معادله مرتبه دو و یک  
معادله از مرتبه یک بازنویسی کنیم.

$$M_f + EI_f \frac{h}{2} \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (40)$$

$$\begin{cases} \frac{dM_f}{dz} + \frac{GJ}{h} \frac{d\phi}{dz} = \frac{M_z}{h} \\ \frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{M_f}{EI_f \frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \quad (41)$$

در ادامه بکمک روش‌های باقیمانده وزنی دستگاه معادله بالا را  
بصورت دستگاه معادله انتگرال وزنی ۴۲ می‌نویسیم.

$$\begin{cases} \int_{z_a}^{z_b} w_1 R_1 = 0 \\ \int_{z_a}^{z_b} w_2 R_2 = 0 \end{cases} \quad (42)$$

$$R_1 = \frac{dM_f}{dz} + \frac{GJ}{h} \frac{d\phi}{dz} - \frac{M_z}{h} \quad (43)$$

$$R_2 = \frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{M_f}{EI_f \frac{h}{2}} \quad (44)$$

جواب‌های تقریبی معادلات بالا را بصورت  $\phi(z)$  و  $M_f(z)$  در  
نظر می‌گیریم که  $\psi_i^{(1)}(z)$  تابع شکل هرمیتی درجه سه و  
 $\psi_i^{(2)}(z)$  تابع شکل لاگرانژی درجه یک می‌باشد.

$$\phi(z) \approx \sum_{i=1}^4 \phi_i \psi_i^{(1)}(z) \quad (45a)$$

$$\psi_1^{(1)} = 1 - 3\left(\frac{z}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{h_e}\right)^3 \quad (45b)$$

$$\psi_2^{(1)} = -z\left(1 - \frac{z}{h_e}\right)^2 \quad (45c)$$

$$\psi_3^{(1)} = 3\left(\frac{z}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{h_e}\right)^3 \quad (45d)$$

$$\psi_4^{(1)} = -z\left(\left(\frac{z}{h_e}\right)^2 - \frac{z}{h_e}\right) \quad (45e)$$

$$M_f(z) \approx \sum_{i=1}^2 M_{fi} \psi_i^{(2)}(z) \quad (46a)$$

$$\psi_1^{(2)}(z) = 1 - \frac{z}{h_e} \quad (46b)$$

$$\psi_2^{(2)}(z) = \frac{z}{h_e} \quad (46c)$$

با انتخاب توابع وزنی ۴۷ مدل اجزای محدود گالرکین را می‌توان

بشکل ۴۸ نوشت.

$$w_1 \sim \psi_i^{(2)}, w_2 \sim \psi_i^{(1)} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{ij} & k_{12}^{ij} \\ k_{21}^{ij} & k_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

مقادیر k ماتریس معادله بالا بشکل دسته معادلات ۴۹ است.

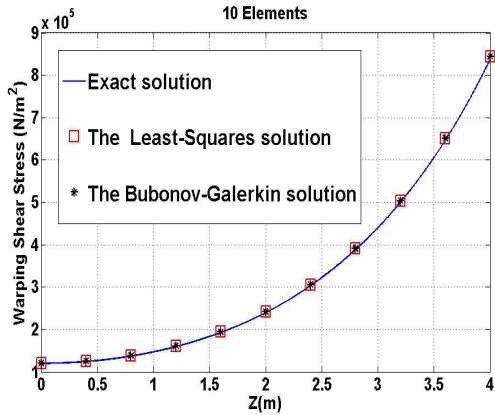
$$k_{11}^{ij} = \int_{z_a}^{z_b} \frac{GJ}{h} \psi_i^{(1)} \frac{d\psi_j^{(1)}}{dz} dz \quad (49a)$$

$$k_{12}^{ij} = \int_{z_a}^{z_b} \psi_i^{(1)} \frac{d\psi_j^{(2)}}{dz} dz \quad (49b)$$

$$k_{21}^{ij} = \int_{z_a}^{z_b} \psi_i^{(2)} \frac{d^2\psi_j^{(1)}}{dz^2} dz \quad (49c)$$

$$k_{22}^{ij} = \int_{z_a}^{z_b} \psi_i^{(2)} \frac{\psi_j^{(2)}}{EI_f \frac{h}{2}} dz \quad (49d)$$

$$M = \int_{z_a}^{z_b} \psi_i^{(1)} \frac{M_z}{h} dz \quad (49e)$$

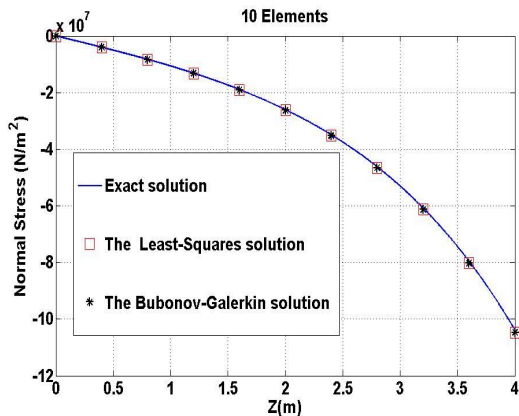


شکل ۱۰: تنش برشی تابیدگی در بال تیر

همچنین به علت چپشدهگی تنش قائم  $\sigma_w$  در بال تیر ایجاد می گردد.

$$\sigma_w = \frac{Eb(d-t_f)}{4} \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (53)$$

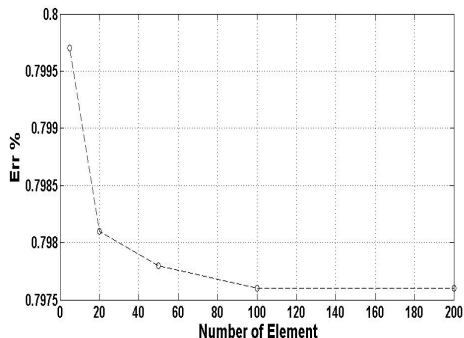
نمودار جواب دقیق و اجزای محدود تنش نرمال بال تیر در شکل ۱۱ رسم شده است.



شکل ۱۱: تنش نرمال تابیدگی در بال تیر

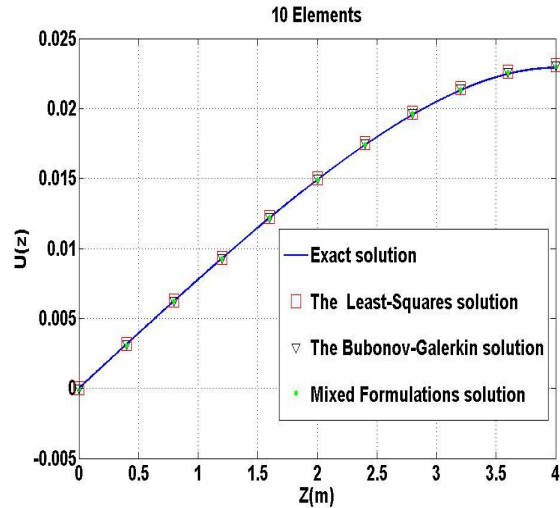
### نتیجه گیری و جمع بندی

۱- با افزایش تعداد المانها حداکثر مقادیر مطلق خطا در نقاط گره- ای در هر سه روش مذکور کاهش می یابد و نهایتا همانطور که در نمودار شکل زیر مشخص است به یک مقدار ثابت همگرا خواهد شد.



$$\phi = \frac{T}{2GJ\lambda} \left[ \lambda z - \frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda L/2)} \right], \lambda = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} \quad (51)$$

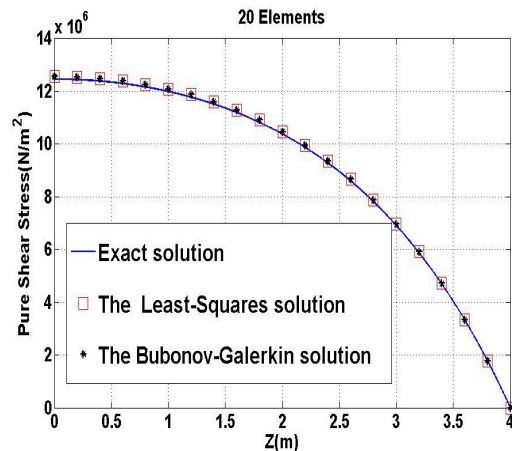
نمودار شکل ۸ نشان دهنده جوابهای دقیق و اجزای محدود قوی معادله دیفرانسیل مسئله چپشدهگی مثال بالا می باشد، که با توجه به تقارن های هندسی و نیروی مثال، در فاصله  $L/2$  رسم شده اند.



شکل ۸: جواب های دقیق و عددی (درجه)

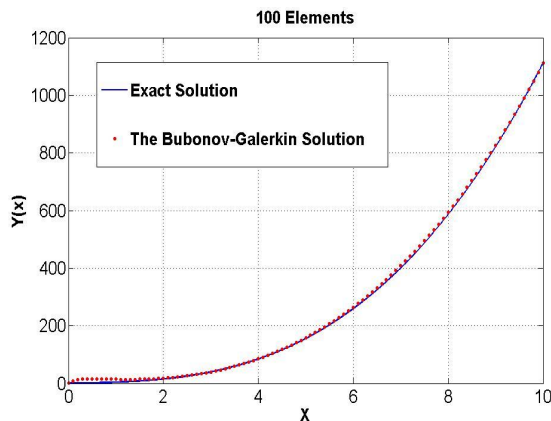
در اثر لنگر پیچشی متمرکز  $M_z$ ، تنش های برشی خالص  $\tau_s$  ناشی از لنگر پیچشی خالص  $M_s$  و تنش برشی چپشدهگی  $\tau_w$  منتجه از لنگر پیچش تابیدگی  $M_w$  طبق رابطه ۵۲ در بال تیر بوجود می آیند. نمودار های ۹ و ۱۰ تنش های برشی خالص و چپ- شدهگی بال تیر را نشان می دهند.

$$\begin{cases} \tau_s = Gt_f \frac{d\phi}{dz} \\ \tau_w = E \frac{b^2(d-t_f)}{16} \frac{d^3 \phi}{dz^3} \end{cases} \quad (52)$$



شکل ۹: تنش برشی خالص در بال تیر





شکل ۱۳: جواب‌های دقیق و گالرکین

جواب گالرکین دارای حداکثر خطای مطلق ۱.۲۰۷۷٪ در نقاط گره‌ای می‌باشد.

۵- از آنجایی که برای حل معادلات دیفرانسیل فرد مراتب بالا باید از چند جمله‌ای‌های تقریبی مراتب بالاتر نیز جهت یافتن توابع شکل در روش‌های قوی اجزای محدود استفاده نمود. لذا یافتن توابع شکل با افزایش مرتبه معادله دیفرانسیل کاری مشکل و زمان بر می‌باشد. بنابراین توصیه می‌شود که از روش فرمولبندی اجزای محدود ترکیبی برای حل معادلات فرد مراتب بالا استفاده شود.

۶- به عنوان پیشنهاد می‌توان از روش عددی ایزوژئومتریک<sup>۲۱</sup> که اولین بار در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز<sup>۲۲</sup> معرفی شده، و بر مبنای استفاده از تکنیک‌های تولید هندسه بنا شده است، در حل معادلات دیفرانسیل استفاده نمود [۶,۷]. در این روش هندسه مسئله بصورت دقیق مدل می‌شود. و در ادامه از اطلاعاتی که برای مدلسازی هندسه استفاده شده است، برای تقریب تابع مجهول استفاده می‌شود. به طور خلاصه برخی از مزایای این روش به شرح زیر می‌باشد. الف: مدلسازی هندسه و انعطاف پذیری فوق العاده در تولید و کنترل مرزها و مدل‌هایی با اشکال پیچیده.

ب: امکان اقناع دقیق شرایط مرزی که در روش اجزای محدود گره‌ها تحت تاثیر شرایط مرزی قرار دارند ولی در این روش یک مرز تحت تاثیر قرار می‌گیرد.

پ: داشتن تئوری مشابه با اجزای محدود و دارا بودن مزایای این روش.

ج: حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر.

د: ایجاد امکانات بیشتر در خصوص مسائله بهبود شبکه و بالا بردن دقت حل.

## مراجع

شکل ۱۲: حساسیت خطا به شبکه بندی در روش اجزای محدود ترکیبی

۲- در جدول ۱ مقادیر جواب‌ها و خطاها در تعداد محدودی از نقاط گره‌ای با انتخاب صد جزء محدود در شبکه‌بندی روش‌های اجزای محدود گالرکین و حداقل مربعات نشان داده شده‌است. مقادیر خطا در هر دو روش برابر می‌باشد.

جدول ۱: مقایسه بین جواب‌های دقیق و عددی در نقاط گره‌ای

Z	جواب دقیق	گالرکین	حداقل مربعات	خطا %
۰	۰	۰	۰	۰
۰/۸	۰/۰۰۶۲۴۲	۰/۰۰۶۲۴۲	۰/۰۰۶۲۹۰	۰/۷۹۷۲
۱/۶	۰/۰۱۲۱۷۲	۰/۰۱۲۲۶۹	۰/۰۱۲۲۶۹	۰/۷۹۷۳
۲/۴	۰/۰۱۷۳۹۰	۰/۰۱۷۵۲۸	۰/۰۱۷۵۲۸	۰/۷۹۷۴
۳/۲	۰/۰۲۱۲۹۲	۰/۰۲۱۴۶۲	۰/۰۲۱۴۶۲	۰/۷۹۷۵
۴	۰/۰۲۲۹۰۵	۰/۰۲۲۹۰۵	۰/۰۲۳۰۸۷	۰/۷۹۷۶

۳- لنگر خمشی عرضی بال  $M_f$  در فرمولبندی روش اجزای محدود ترکیبی، همانطور که از معادله ۴۶ پیداست. جزء مقادیر گره‌ای محسوب می‌شود و مستقیماً قابل محاسبه می‌باشد، لذا دارای مقادیری با دقت بالاتری نسبت به روش‌های گالرکین و حداقل مربعات می‌باشد.

۴- معادله مرتبه سه مسئله چپ‌شدگی مثال بالا معادله‌ای با ضرایب ثابت می‌باشد. چنانچه که خواص مکانیکی تیر نظیر مواد مرکب تابعی متغیر باشد، معادله‌ی حاصل دارای ضرایب متغیر می‌باشد. روش‌های اجزای محدود ذکر شده قادرند هر معادله مرتبه سه ناهمگن با ضرایب متغیر را حل نمایند. برای نشان دادن توانای روش‌های بالا، معادله دیفرانسیل غیر همگن با ضرایب متغیر ۵۴ را به عنوان نمونه به کمک روش اجزای محدود گالرکین حل نموده‌ایم.

$$\begin{cases} -x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 + 2x + 3 \\ y(0) = 1 \\ \frac{dy(0)}{dx} = 1 \\ \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = 2 \end{cases} \quad (54)$$

جواب معادله بالا به صورت رابطه ۵۵ بوده و نمودار شکل ۱۳ نشان دهنده جواب‌های دقیق و گالرکین معادله می‌باشد.

$$y = x^3 + x^2 + x + 1, \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (55)$$

<sup>21</sup> Isogeometric

<sup>22</sup> Hughes



[۵] Reddy, J. N., 2006. An introduction to the finite element method. McGraw-Hill.

[۶] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazileves, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement". *Comput. Methods Appl. Mesh. Engrg.* 194, pp. 4135-4195.

[۷] Hasani, B., Moghadam, N.Z., Tavakoli, S.M., 2009. "Isogeometrical solution of Laplace Equation". *Aslan Journal of civil engineering (Building of Housing)*, 10(5), PP. 579-592.

[۱] Murray, N. W., 1984. Introduction to The Theory of Thin-walled Structures. Clarendon Press, Oxford

[۲] Charles G. Salmon., 1995. Steel structures design and behavior. HaperCollins.

[۳] C.M. Wang., 2005. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press. www.crcpress.com

[۴] Chen, C. N., 1997. "The warping torsion bar model of the differential quadrature element method". *Computers & Structures*, 66(2-3), pp. 249-257