مقایسه کارایی و دقت روش های اجرای محدود و ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد

بهروز حسنی[1] ،اسماعیل شکوری[2] ،علیرضا حسن زاده طاهری[3]
دانشگاه فردوسی مشهد،میدان آزادی ،صندوق پستی۱۱- ۹۱۷۷۵،مشهد، ایران

معادلات حاکم بر مسائلی نظیر چپ شدگی تیر های بدون اتکا ی جانبی ،کمانش پیچشی ستون ها و صفحات دایره ای شکل متقارن مرکزی که تحت اثر نیروهای شعاعی فشاری یکنواخت قرار دارند ،از مرتبه سه می باشند،از آنجایی که حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد با مدل اجزای محدود ریتز به دلیل عدم امکان استفاده از شکل ضعیف معادله امکان پذیر نیست . در ابتدا روش های حل اجزای محدود این معادلات بررسی در ادامه با ارائه چند مثال عددی کارائی و دقت روش های اجزای محدود و ایزو ژئومتریک با هم مقایسه شده اند در پایان با بکار بستن اصول حاصل شده ،مساله چپ شدگی تیرهای بدون اتکای جانبی را به کمک روش های اجزای محدود و ایزو ئومتریک گالرکین و حداقل مربعات حل . با پاسخ های تحلیلی مقایسه شده اند.

واژه های کلیدی:اجزای محدود-ایزوژئومتریک-گالرکین -حداقل مربعات -چپ شدگی

۱-دانشیار گروه هوافضا دانشگاه فردوسی

۲-دانشجوی کارشناسی ارشد هوافضا ۰۹۳۸۱۵۹۰۱۱۵

Esmaeel.shakoori@gmail.com

3-دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک

AERO2013-18290

دوازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران
تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مقایسه کارائی و دقت روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد

بهروز حسنی[۱]،اسماعیل شکوری[۲]،علیرضا حسن‌زاده طاهری[۳]
دانشگاه فردوسی مشهد، میدان آزادی، صندوق پستی ۱۱-۹۱۷۷۵، مشهد، ایران.

چکیده

معادلات حاکم بر مسائلی نظیر چپ‌شدگی تیرهای بدون اتکای جانبی، پیچش تیرهایی با مقاطع غیر دوار، کمانش پیچشی ستون‌ها و صفحات دایره‌ای شکل متقارن محوری که تحت اثر نیروهای شعاعی فشاری یکنواخت قرار دارند، از مرتبه فرد می‌باشند. از آنجایی که حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد با روش‌های اجزای محدود ریتز به دلیل عدم امکان استفاده از شکل ضعیف معادله امکان‌پذیر نیست، ابتدا پس از بیان ناکارآمدی روش اجزای محدود شکل ضعیف به روش‌های حل با شکل قوی پرداخته و معادلات اجزا استخراج شده است. سپس با بکارگیری روش‌های تولید هندسه نظیر منحنی‌های بی-اسپلاین، و مبانی ریاضی موجود در روش اجزای محدود، فرمول‌بندی روش ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد بدست آمده است. در ادامه، با ارائه مثال-های عددی کارائی و دقت روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با هم مقایسه شده‌اند. در پایان، مسئله پیچش تیریی با مقطع غیر دوار به کمک روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک گالرکین و حداقل مربعات حل شده است. به طور کلی، در این پژوهش نحوه بکارگیری هرکدام از روش-های اجزای محدود و ایزوژئومتریک گالرکین و حداقل مربعات در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه سه با شرایط مرزی متفاوت بررسی شده است. مقایسه دقت نتایج روش‌های فوق در حل معادلات دیفرانسیل با پاسخ‌های تحلیلی، کارآمدی روش‌های مذکور را تایید می‌نماید.

واژه های کلیدی : *اجزای محدود- ایزوژئومتریک- گالرکین- حداقل مربعات- معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه فرد*

مقدمه

نیم‌رخ های فولادی تیرهایی از قبیل آی شکل (I)، ناودانی ([) و بال پهن که از نظر مقاومت خمشی و فشاری دارای مزایای قابل توجهی می‌باشند، از لحاظ پیچشی مقاومت خوبی ندارند، و اگر به علتی تحت پیچش قرار گیرند، تغیر شکل‌ها و تنش‌های قابل توجه و یا ناپایداری‌های ناخواسته از کمانش ممکن است در آنها به وجود آید. به طور کلی وقتی که یک عضو با مقطع غیر دایره تحت پیچش قرار می‌گیرد. مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور عضو، پس از پیچش دیگر به صورت صفحه باقی نمی‌مانند و سطح تاب برداشته‌ای به وجود می‌آورند. دراین‌گونه اعضا اگر مقاطع برای تاب برداشتن آزاد نباشند علاوه بر تنش‌های برشی، تنش‌های قائم بر مقطع نیز خواهیم داشت. بنابراین تحلیل مسئله چپ‌شدگی در سازه پرکاربردی مانند تیر از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد [۱].

به علت آنکه معادله‌ی حاکم بر مسائل چپ‌شدگی پیچشی تیرها بدون اتکای جانبی، پیچش تیرهایی با مقاطع غیر دوار وکمانش پیچشی ستون‌ها مانند کمانش صفحات دایره‌ای شکل متقارن محوری که تحت اثر نیروهای فشاری شعاعی یکنواخت قرار دارند، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه می‌باشد [۲,۳] لذا ناگزیر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه فرد با استفاده از روشهای عددی کارآمد می‌باشیم.

روش عددی دیفرانسیل کوادرچر[1] که توسط چانگ نیو چنگ معرفی شده است. روش مناسبی می‌باشد که از آن در حل معادلات چپ‌شدگی پیچشی استفاده شده است [۴]. روش اجزای محدود از جمله روش‌های عددی بسیار نیرومند در حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی با هر مرتبه‌ای با قدمتی شصت ساله است. نرخ همگرای بالا و استفاده‌ی آسان برای شرایط مرزی با هندسه‌ی نسبتاً پیچیده و الگوریتمه شدن آن، جهت تهیه برنامه‌های کامپیوتری از مزایای شناخته شده این روش می-باشد [۵] که از آن به طور گسترده در حل معادلات دیفرانسیل حاصل از مسائل مکانیک مهندسی که اکثرا معادلاتی از مراتب زوج هستند استفاده شده است. بررسی این روش شناخته شده برای حل معادلات مراتب سه، نشان داده است که حل معادلات دبفرانسیل مراتب فرد هم به آسانی و با دقت بسیار بالا با استفاده از شکل‌های قوی روش اجزای محدود قابل دستیابی می‌باشد[۶].

روش تحلیل ایزوژئومتریک از مزایا و مبانی ریاضی روش اجزای محدود بهرمند است. در این روش به‌کمک خواص توابع پایه‌ای اسپلاین و نربز (NURBS)، هندسه مسئله دقیق مدل می‌شود و در ادامه از اطلاعاتی که برای مدلسازی هندسه بکار گرفته شده، برای تقریب تابع مجهول استفاده می‌گردد. سادگی ارتقاء درجه چندجمله ای تابع پایه، سهولت افزایش تعداد گره ها در بردار گره، افزایش نقاط کنترلی و یا تغییر محل آنها از جمله موارد افزایش دقت حل می باشند [۷].

بررسی روش حل اجزای محدود معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی فرد

فرمول‌بندی شکل ضعیف:

در روش اجزای محدود، از عبارت انتگرالی برای تولید روابط جبری میان ضرایب u_j در تقریب (۱) استفاده می‌کنیم که u_N بیانگر حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل خاص (۲) در حوزه‌ی تعریف Ω می‌باشد. از آنجایی که جایگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل حاکم همواره به تعداد خطی مورد نیاز برای ضرایب مجهول u_j ختم نمی‌گردد، استفاده از عبارت انتگرالی معادل با معادله‌ی دیفرانسیل حاکم الزامیست. تنها راه حصول اطمینان از برابری دقیق تعداد n معادله‌ی موجود با مجهولات، مستلزم صفر شدن انتگرالهای وزنی خطا در معادله می‌باشد. در نتیجه حل تقریبی u_N ملزم به ارضای معادله دیفرانسیل به صورت انتگرال وزنی (۳) می‌باشد که R در رابطه (۴) باقیمانده و w را تابع وزن می‌نامند. چنانچه مشتق گیری بین حل تقریبی u_N و تابع وزن w توزیع شود شکل انتگرالی منتجه شرایط پیوستگی ضعیفتری را روی ψ_j ایجاب می‌نماید، بنابراین

[1](DQEM) Differential quadrature element method

۱- دانشیار گروه هوافضا دانشگاه فردوسی
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد هوا فضا، ۰۹۳۸۱۵۹۰۱۱۵،
Esmaeel.shakoori@gmai.com
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک

شکل انتگرال وزنی را شکل ضعیف می‌نامند و دارای دو مشخصه مطلوب می‌باشد. اولاً، احتیاج به پیوستگی ضعیفتری برای متغیر وابسته می‌باشند و اغلب به دسته‌ای از معادلات جبری بر حسب ضرایب ختم می‌گردد. ثانیاً، شرایط مرزی طبیعی مسئله در شکل ضعیف آن گنجانده می‌شود، بنابراین

$$u \approx u_N = \sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j \qquad (۱)$$

$$A(u) = f \qquad (۲)$$

$$\int_{\Omega} wR \, d\Omega = 0 \qquad (۳)$$

$$R \equiv A(u_N) - f \qquad (۴)$$

حل تقریبی u_N تنها لازم است شرایط اساسی مسئله را ارضاء نماید. توزیع مساوی مشتق گیری بین تابع وزن و متغیر وابسته تنها زمانی امکان پذیر است که مشتقات موجود در معادله دیفرانسیل از مرتبه‌ی زوج باشد. تغییر مشتق‌پذیری از متغیرهای وابسته به تابع وزن، بخاطر نیاز به گنجاندن شرایط معنی دار فیزیکی بدون توجه به اثرات الزامات پیوستگی اعمال می‌گردد از طرف دیگر تعویض مشتق‌گیری از متغیرهای وابسته اگر به عبارات مرزی که از نظر فیزیکی معنی دار نیستند، ختم گردد نباید انجام شود. در ضمن تابع وزن باید شکل همگن شرایط مرزی معادله را اقناع نماید و متعلق به همان فضای توابعی باشد که توابع تقریب هستند[۵].

$$w \sim \psi_j \qquad (۵)$$

شکل ضعیف یک معادله دیفرانسیل، یک عبارت انتگرال وزنی معادل با معادله‌ی دیفرانسیل و شرایط مرزی طبیعی معین مسئله می‌باشد که برای کلیه‌ی مسائل خطی یا غیر خطی که توسط معادلات درجه دو یا بالاتر تشریح شده‌اند وجود دارد. زمانیکه معادله دیفرانسیل خطی و دارای درجه زوج است، شکل ضعیف حاصل دارای شکل دو خطی متقارن در متغیر وابسته u و تابع وزن w خواهد بود. در این‌صورت تابع انرژی پتانسیل کل را می‌توان استخراج نمود و از میان کلیه‌ی توابع قابل قبول u، آنکه انرژی پتانسیل کل را کمینه نماید، معادله دبفرانسیل و شرایط مرزی طبیعی مسئله را ارضاء می‌کند [۵].

فرمولبندی روش‌های باقیمانده وزنی[۲]

روش ریتز[۳] را می‌توان برای کلیه‌ی مسائل، شامل خطی یا غیر خطی که دارای شکل ضعیف هستند به کار برد. در این روش تابع وزن اجباراً برابر با توابعی که در تقریب مورد استفاده هستند، قرار داده می‌شوند. اما در روش باقیمانده‌های وزنی، توابع وزن را می‌توان مجموعه‌ای از توابع مستقل انتخاب نمود و لازمه‌ی آن تنها تعین پارامترها به وسیله‌ی شکل انتگرال وزنی می‌باشد. این روش را می‌توان برای تقریب شکل انتگرال وزنی هر معادله به کار برد. ضرورت مشتق‌پذیری توابع شکل در این روش برخلاف شکل ضعیف، توسط عبارت انتگرالی وضع می‌گردد. بنابراین ψ_j باید دارای مشتقات غیر صفر، تا بالاترین مرتبه‌ی موجود در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم باشد. از آنجایی که این نوع شکل انتگرالی شامل هیچ‌گونه شرایط مرزی معین مسئله نمی‌باشد، توابع تقریب ساز باید به گونه‌ای انتخاب شوند که حل تقریبی، انواع شرایط مرزی را ارضاء نماید. این شرط درجه عبارت چند جمله‌ای مورد استفاده در روش باقیمانده وزنی را افزایش می‌دهد. به طور کلی، ψ_jها در این روش توابعی با درجه بالاتری نسبت به روش رایلی-ریتز می‌باشند و توابع مورد استفاده در رایلی- ریتز ممکن است شرایط پیوستگی در روش باقیمانده‌ی وزنی را اقناع نکنند [۵].

حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه سه خطی با ضرایب متغیر به کمک روش های اجزاء محدود:

مسئله تعیین $u(x)$ بگونه‌ای که معادله دیفرانسیل مقدار مرزی (۵) با شرایط مرزی (۶) را ارضا نماید در نظر بگیرید.

$$\int_{\Omega^e} w\left(a(x)\frac{d^3u(x)}{dx^3} + b(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + c(x)\frac{du(x)}{dx} + d(x)u(x) - f(x)\right) d\Omega^e = 0 \qquad (۵)$$

$$u(x)|_{x=0\ or\ l} = u_{1,4}, \left(\frac{du(x)}{dx}\right)\Bigg|_{x=0\ or\ L} = u_{2,5}, \left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0\ or\ L} = u_{3,6} \qquad (۶)$$

هدف یافتن حل تقریبی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم (۳) برای یک جزء نمونه $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$، با استفاده از روش باقیمانده‌های وزنی و شکل انتگرال وزنی معادله دیفرانسیل حاکم به صورت رابطه (۷) می‌باشد. در حل معادله دیفرانسیل مرتبه سه، با استفاده از مدل اجزای محدود قوی، همان‌طور که گفته شد ملزم به انتخاب تقریب چند جمله‌ای حل به صورت (۹) در یک جزء محدود، به گونه‌ای می‌باشیم که همه شرایط مرزی را در هر گره به صورت دسته معادلات (۸) اقناع نماید.

$$u_N^e = \sum_{j=1}^{n} u_j \psi(x)_j^e \qquad (۷)$$

$$\begin{cases} U(x_e) = u_1 \ , \ \dfrac{dU(x_e)}{dx} = u_2 \ , \dfrac{d^2U(x_e)}{dx^2} = u_3 \\ U(x_{e+1}) = u_4 \ , \dfrac{dU(x_{e+1})}{dx} = u_5 \\ , \dfrac{d^2U(x_{e+1})}{dx^2} = u_6 \end{cases} \qquad (۸)$$

از آنجایی که در مجموع شش شرط در یک جزء محدود می‌باشد، باید یک چند جمله‌ای شش پارامتری برای تابع تقریب ساز جواب انتخاب کنیم.

$$U(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5 \qquad (۹)$$

با اعمال شرایط (۸) در معادله (۹) وتشکیل یک معادله ماتریسی، c_i ها را می‌توان بر حسب متغیرهای گره‌ای یا به عبارت دیگر جابه‌جای‌های تعمیم یافته u_i ها بیان نمود، در نتیجه تابع تقریب جواب در هر جزء محدود به صورت رابطه (۱۰) خواهد شد.

$$u(x)_h^e = \sum_{j=1}^{6} u_j^e \psi_j^e \qquad (۱۰)$$

مقادیر توابع شکل ψ_j^e ها در مختصات محلی[۴] ($\bar{x}$) به‌صورت دسته معادلات (۱۱) بیان می‌شوند [۶].

[2] Weighted-Residual method
[3] Ritz method
[4] Local coordinate

$$\begin{cases} \psi(\bar{x})_1^e = 1 - 6\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^5 + 15\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^4 - 10\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \\ \psi(\bar{x})_2^e = -\bar{x}\left(3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^4 - 8\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 + 6\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 1\right) \\ \psi(\bar{x})_3^e = -\frac{\bar{x}^2}{2}\left(\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right) - 1\right) \\ \psi(\bar{x})_4^e = 6\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^5 - 15\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^4 + 10\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \\ \psi(\bar{x})_5^e = \bar{x}\left(-3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^4 + 7\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 - 4\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2\right) \\ \psi(\bar{x})_6^e = \bar{x}^2\left(.5\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 - \left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + .5\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)\right) \end{cases} \quad (۱۱)$$

برای تشکیل روابط اجزای محدود بر اساس شکل قوی معادله، با جایگذاری جواب تقریبی $U(x)_h^e$ رابطه (۱۰) در معادله (۵) رابطه (۱۲) بدست می‌آید با انتخاب‌های متفاوت و مستقلی که برای تابع وزنی w_i امکان پذیر است، مدلهای مختلفی در روش‌های باقی‌مانده وزنی به‌جود می‌آید.

با انتخاب ماتریس $[k_{ij}^e]$ و بردار ستونی $\{F_i\}$ به عنوان ماتریس ضرایب و بردار منبع و جدا نمودن u_j^e ها می‌توانیم رابطه (۱۳) را به صورت (۱۶) بازنویسی کنیم.

$$\int_{x_A}^{x_B} w\left(a(x)\frac{d^3U(x)_h^e}{dx^3} + b(x)\frac{d^2U(x)_h^e}{dx^2} + c(x)\frac{dU(x)_h^e}{dx} + d(x)U(x)_h^e - f(x)\right)dx^e = 0 \quad (۱۲)$$

$$\sum_{j=1}^{6}\left[\int_{x_A}^{x_B} w_i\left(a(x)\frac{d^3\psi_j^e}{dx^3} + b(x)\frac{d^2\psi_j^e}{dx^2} + c(x)\frac{d\psi_j^e}{dx} + d(x)\psi_j^e - f(x)\right)dx^e\right] = 0 \quad (۱۳)$$

$$k_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B}\left[w_i^e\left(a(x)\frac{d^3\psi_j^e}{dx^3} + b(x)\frac{d^2\psi_j^e}{dx^2} + c(x)\frac{d\psi_j^e}{dx} + d(x)\psi_j^e\right)\right]dx^e \quad (۱۴)$$

$$F^e{}_i = \int_{x_a}^{x_b} w_i^e\ f(x)\ dx^e \quad (۱۵)$$

$$[k^e]\{u^e\} = \{F^e\} \quad (۱۶)$$

روش گالرکین[5]

تابع وزن ω_i^e برابر با توابع شکل ψ_j^e انتخاب می‌شود در این روش ماتریس ضرایب K_{ij} قرینه نمی‌باشد [۵].

روش حداقل مربعات[6]

در این روش چنانچه عملگر A خطی باشد، $\omega_i^e = A(\psi_j^e)$ در نظرگرفته شده و پارامترهای u_i را باکمینه سازی انتگرال مربع باقیمانده به صورت (۱۷) تعیین می‌کنیم. ماتریس ضرایب k_{ij} در این روش قرینه است [۵].

$$\int \frac{\partial R}{\partial u_i} R d\Omega = 0 \quad (۱۷)$$

اعمال شرایط مرزی در روش اجزای محدود

نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی در مسائل مقادیر مرزی با روش اجزای محدود در هر گره باید به گونه‌ای باشد که پس از چیدمان درجات آزادی در گره-های هر جز و سرهم نمودن همه اجزای محدود، مقادیر معین شده در هر شرط در نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه در درجات آزادی متناظر با نوع شرط قرار داده شوند [۵].

روش تحلیل ایزوژئومتریک

تعریف توابع پایه بی- اسپلاین و مشتقات آن:

در این تحقیق از توابع پایه اسپلاین که در واقع معمول‌ترین و پرکاربردترین توابع پایه نربز جهت تعریف منحنی‌ها و سطوح پیچیده می-باشد استفاده شده است.

بردار گره[7] $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ را در نظر بگیرید. این بردار شامل مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است به طوری که رابطه (۱۸) در آن برقرار می‌باشد و u_i ها مقادیر گرهی[8] نامیده می‌شوند [۸].

(۱۸)

اکنون i اُمین تابع پایه اسپلاین با درجه p و مرتبه $(p+1)$ را با $N_{i,p}(u)$ برای $p \geq 0$ نشان داده و به صورت (۱۹) تعریف می‌کنیم [۸].

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & if\ u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (۱۹)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u)$$

مشتق اول توابع پایه بی-اسپلاین را می‌توان از رابطه (۲۰) محاسبه نمود [۸].

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \quad (۲۰)$$

همچنین مشتق مرتبه kام تابع پایه $N_{i,p}^{(k)}(u)$ را می‌توان توسط رابطه (۲۱) محاسبه نمود. توجه شود که مقدار k نبایستی از مقدار p تجاوز نماید [۸].

[5] Galerkin Method

[6] Least-squares Method

[7] Knot Vector

[8] Knots

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p\left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p}-u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right) \quad (۲۱)$$

منحنی‌های بی-اسپلاین:

منحنی‌های بی- اسپلاین را می‌توان با استفاده از توابع پایه بی-اسپلاین تعریف نمود. یک منحنی درجه p اُم بی- اسپلاین توسط رابطه (۲۲) بیان می‌شود [۸].

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \times p_i \quad (۲۲)$$

که در آن $\{P_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(u)\}$ مجموعه توابع پایه درجه pاُم بی- اسپلاین می‌باشند.

بطور کلی بردار گره‌ای غیر تکراری[9] مقید و غیر یکنواخت[10] را با رابطه (۲۳) تعریف می‌شود [۸] در این تحقیق از بردار گره‌ای مقید یکنواخت بین صفر و یک استفاده شده است.

$$U = \left\{\underbrace{a,\cdots,a}_{p+1}, u_{m-p-1}, \underbrace{b,\cdots,b}_{p+1}\right\} \quad (۲۳)$$

فرض کنید که $c^{(k)}(u)$ مشتق مرتبه k ام منحنی بی- اسپلاین $c(u)$ و مقدار پارامتر u معین[11] باشد، آنگاه می‌توان $c^{(k)}(u)$ را با محاسبه مشتق k ام توابع پایه بی- اسپلاین مطابق رابطه (۲۴) محاسبه نمود [۸].

$$c^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}^{(k)}(u) P_i \quad (۲۴)$$

فرمول‌بندی در روش ایزوژئومتریک:

در روش ایزوژئومتریک جواب معادله دیفرانسیل با استفاده از توابع پایه اسپلاین $N_{i,p}(r)$ به‌صورت رابطه (۲۴) تقریب زده می‌شوند [۹]. نقاط کنترلی $P_i = (x_i, y_i)$ باید بگونه‌ای تعین گردند که منحنی (۲۴) بر جواب معادله منطبق شود.

به‌عبارت دیگر به‌ازای هر متغیر اسپلاین (r) در رابطه (۲۴) می‌توان نقطه هندسی (x) و تابع مجهول متناظر آن یعنی (u) را پیدا کرد. تابع $x(r)$ و $u(r)$ را با استفاده از توابع پایه بی-اسپلاین می‌توان به صورت روابط (۲۵,۲۶) تقریب زد:

$$x(r) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(r) X_i \quad (۲۵)$$

$$u(r) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(r) Y_i \quad (۲۶)$$

با توجه به مقدار r در بازه غیر صفر توابع پایه $r \in [r_j, r_{j+1}]$، روابط فوق را می‌توان به صورت (۲۸,۲۷) بازنویسی کرد.

$$x(r) = \sum_{i=j-p}^{j} N_{i,p}(r) X_i \quad (۲۷)$$

$$u(r) = \sum_{i=j-p}^{j} N_{i,p}(r) Y_i \quad (۲۸)$$

در ادامه می‌توان از شکل قوی معادله دیفرانسیل رابطه (۵) استفاده نموده تا فرمولبندی حل در روش ایزوژئومتریک بدست آید.

$$\int_{\Omega^e} w\left(a(x)\frac{d^3u(x)}{dx^3} + b(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + c(x)\frac{du(x)}{dx} + d(x)u(x) - f(x)\right) d\Omega^e = 0\ , \quad 0 \le x \le L \quad (۲۹)$$

با به‌کارگیری قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای می‌توان مشتق اول u را بر حسب متغیر وابسته x به شکل رابطه (۳۰) نوشت و سپس با یافتن مشتقات $\frac{dx(r)}{dr}$ و $\frac{du(r)}{dx(r)}$ و با جایگذاری روابط (۳۱) و (۳۲) در معادله (۳۰) می‌توان مشتق اول را به شکل (۳۳) در روش ایزوژئومتریک بازآفرینی نمود.

$$\frac{du(r)}{dx(r)} = \frac{du(r)}{dr} \times \frac{dr}{dx(r)} \quad (۳۰)$$

$$\frac{du(r)}{dr} = \sum_{i=j-p}^{j} N'_{i,p}(r)\, Y_i \quad (۳۱)$$

$$\frac{dx(r)}{dr} = \sum_{i=j-p}^{j} N'_{i,p}(r)\, X_i = J(r) \quad (۳۲)$$

$$\frac{du(r)}{dx(r)} = \left(\sum_{i=j-p}^{j} N'_{i,p}\, Y_i\right) J^{-1}(r) \quad (۳۳)$$

به طور مشابه مشتقات مراتب دوم و سوم با استفاده از قوانین مشتق زنجیره‌ای به صورت روابط (۳۴,۳۵) حاصل خواهد شد.

$$\frac{d^2u(r)}{dx(r)^2} = \frac{\frac{d^2u}{dr^2}}{J^2(r)} - \frac{\frac{d^2x}{dr^2}\frac{du}{dr}}{J^3(r)} \quad (۳۴)$$

$$\frac{d^3u(r)}{dx(r)^3} = \frac{\frac{d^3u}{dr^3}}{J^3(r)} - \frac{3\frac{d^2u}{dr^2}\frac{d^2x}{dr^2}}{J^4(r)} - \frac{\frac{d^3x}{dr^3}\frac{du}{dr}}{J^4(r)} + \frac{3\left(\frac{d^2x}{dr^2}\right)^2\frac{du}{dr}}{J^5(r)} \quad (۳۵)$$

با جایگذاری روابط فوق و همچنین تقریب $a(x), b(x), c(x), d(x)$ بر حسب توابع پایه می‌توان انتگرال وزنی رابطه (۵) را در کلی ترین حالتش برحسب توابع پایه اسپلاین به صورت رابطه (۳۶) نوشت.

با انتخاب‌های مستقلی که برای توابع باقی‌مانده وزنی $w(r)$ وجود دارد می‌توان معادله انتگرالی (۳۶) را به صورت معادله ماتریسی (۳۷) بازنویسی نمود که جملات داخل انتگرال و خود انتگرال به راحتی قابل محاسبه می‌باشد. همچنین می‌توان رابطه (۳۷) را به شکل متداول (۳۸) خلاصه نمود.

---

[9] Nonperiodic
[10] NonUniform
[11] Fixed

$$\int_0^1 w(r)\Bigg\{a(r)\Bigg(\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}'''(r)\,Y_i}{J^3(r)} - 3\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}''(r)\,X_i}{J^4(r)}\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}''(r)\,Y_i - \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}''(r)\,X_i}{J^4(r)}\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}'(r)\,Y_i + 3\frac{\left(\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}''(r)\,X_i\right)^2}{J^5(r)}\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}'(r)\,Y_i\Bigg) + b(r)\Bigg(\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}''(r)\,Y_i}{J^2(r)} - \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}''(r)\,X_i}{J^3(r)}\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}'(r)\,Y_i\Bigg) + c(r)\Bigg(\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}'(r)\,Y_i}{J(r)}\Bigg) + d(r)\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(r)\,Y_i\Bigg\}J(r)dr = \int_0^1 w(r)f(r)J(r)dr \qquad (۳۶)$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega_0}[k^{00}] & \dots & \int_{\Omega_n}[k^{0n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega_0} k^{n0} & \dots & \int_{\Omega_n} k^{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_0} F_0(r) \\ \vdots \\ \int_{\Omega_n} F_n(r) \end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

$$K_{ij}Y_j = F_i \qquad (۳۸)$$

اعمال شرایط مرزی

وقتی که مقادیر مشخص متغیر وابسته در مرزها معین باشد:
نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی‌هایی که حاصل از کاربرد بردار گره‌ای مقید در حل معادلات دیفرانسیل در این تحقیق هستند طبق تعریف خواص اینگونه از منحنی‌ها بر روی نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی قرار دارند [۸,۱۰].

حالتی که مقادیر مشتق اول در مرزها مشخص باشند:
طبق تعریف، منحنی‌های بسته بی-اسپلاین در نقاط ابتدایی و انتهایی مرزها بر چند ضلعی کنترل مماس می‌باشند [۸,۱۰] با نوشتن معادله خط مماس بر منحنی در این نقاط می‌توان Yهای نقاط کنترلی را یافت.

$$\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y}_0 + \left.\frac{du(r)}{dx(r)}\right|_{x=0}(x_1 - x_0) \qquad (۳۹)$$

حالتی که مقادیر مشتق دوم $\frac{d^2u(x)}{dx^2}$ در مرزها مشخص باشند:
در این حالت با استفاده از رابطه (۳۴) و محاسبه مشتقهای مرتبه اول و دوم توابع پایه در $r = 0, r = 1$ و با استفاده از خواص توابع پایه می‌توان Y کنترلی متناظر را بر حسب Y های معلوم رابطه سازی نمود [۱۰].

حل معادله دیفرانسیل مرتبه سه یک بعدی همگن- مثال (۱)

جهت مقایسه دقت حل و نرخ همگرایی روش‌های اجزای محدود گالرکین و ایزوژئومتریک گالرکین معادله (۴۰) با تعداد درجات آزادی یکسان حل شده است.

$$\frac{d^3u(x)}{dx^3} + \frac{d^2u(x)}{dx^2} + 100\frac{du(x)}{dx} + 100u(x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi/2 \qquad (۴۰)$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du(0)}{dx} = 10, \quad u(\pi/2) = 0 \qquad (۴۱)$$

حل تحلیلی این معادله به صورت رابطه (۴۲) می‌باشد. همان‌طور که پیداست جواب این معادله در بازه فوق دارای چند نوسان می‌باشد، در واقع علت اصلی انتخاب این معادله نشان دادن قابلیت روش ایزوژئومتریک در دنبال کردن جواب‌های پیچیده و نوسانی می‌باشد.

$$U(x) = sin(10x) \qquad (۴۲)$$

در شکل (۱) حل‌های ایزوژئومتریک-گالرکین با تعداد درجات آزادی مختلف به‌ازای توابع پایه درجه سه در مقابل جواب دقیق به تصویر کشیده شده است. در نمودار شکل (۲) پاسخ‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در کنار جواب دقیق با تعداد درجات آزادی ۱۸ و ۵۴ رسم شده‌اند، لازم به ذکر است که حداقل درجه چند جمله‌ای استفاده شده در حل اجزای محدود باید از مرتبه پنج و در روش ایزوژئومتریک از مرتبه سه باشد.

نمودار شکل (۳) نشان دهنده نرخ همگرایی جواب‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک به‌ازای درجات آزادی (۹,۱۸,۵۴,۱۰۲) می‌باشد. افزایش نرخ همگرایی با میزان خطای کمتر روش ایزوژئومتریک –گالرکین در مقابل حل اجزای محدود گالرکین مشهود است.

نرخ همگرایی جواب‌ها با استفاده از رابطه (۴۳) که به نرم خطای L_2 معروف است محاسبه شده است. در این رابطه u_e مقدار دقیق و u_c مقدار محاسبه شده پاسخ‌های عددی می‌باشد.

$$Error = \left(\int_a^b |u_c - u_e|^2\right)^{1/2} \qquad (۴۳)$$

حل اجزای محدود و ایزوژئومتریک مسأله پیچشی تیری با مقطع غیر دوار – مثال (۲)

شکل (۴)، تیری به طول ۸ متر با مقطع (I) شکل را که در وسط دهانه تحت لنگر پیچشی متمرکز ۲kN.m قرار دارد نشان می‌دهد که دو تکیه‌گاه آن جهت جلوگیری از دوران مقطع، گیردار می‌باشد. لیکن در بال‌های مقطع هیچ‌گونه اتکای جانبی وجود ندارد. معادله (۴۴) با شرایط مرزی

معین شده (۴۵) بیانگر رفتار چپ‌شدگی تیر مثال بالاست که تحت لنگر خمشی قرار دارد و دارای جواب دقیقی طبق رابطه (۴۵) می‌باشد [۲].

$$\begin{cases} Gj\dfrac{d\emptyset}{dz} - EC_w\dfrac{d^3\emptyset}{dz^3} = M_z \\ \emptyset(0) = 0 \\ \dfrac{d^2\emptyset(0)}{dz^2} = 0 \\ \dfrac{d\emptyset\left(\frac{L}{2}\right)}{dz} = 0 \end{cases} \quad (۴۴)$$

$$\emptyset = \frac{T}{2GJ\lambda}\left[\lambda z - \frac{sinh(\lambda z)}{cosh(\lambda L/_2)}\right], \lambda = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} \quad (۴۵)$$

نمودار شکل (۵) نشان دهنده جواب‌های دقیق و عددی معادله دیفرانسیل مسئله پیچش مثال می‌باشد که مطابق با مقادیر استحکام مکانیکی و مشخصات هندسی معین شده در جدول (۱) و با توجه به تقارن هندسی مثال، در فاصله $\frac{L}{2}$ رسم شده‌اند [۶].

جدول ۱- مقادیر استحکام مکانیکی و مشخصات هندسی تیر (I) شکل

E	۲۰۰e۹ Pa	مدول الاستسیته
G	۷۶/۹۲۳e۹ Pa	مدول برشی
J	۱/۴۱۵e۶m^4	گشتاور دوم سطح
c_w	۱/۲۶e-۶m^6	ثابت پیچش تابیدگی
λ	./657	عدد بی بعد
T	۲e۳Nm	گشتاور پیچشی

جهت نشان دادن کارایی هرکدام از روش‌های اجزای محدود گالرکین و حداقل مریعات در مقابل روش‌های ایزوژئومتریک گالرکین و حداقل مریعات حداکثر خطای مطلق هر روش به ازای تعداد درجات آزادی برابر با ۳۳ در جدول (۲) مشخص شده است.

جدول ۲- حداکثر خطای پاسخ‌های عددی چپ‌شدگی تیر

حداقل مربعات	گالرکین	حداکثر مقدار خطا (%)
۰/۷۹۷۵	۰/۷۹۷۶	اجزای محدود
۰/۲۲۵۷	۰/۲۲۹۸	ایزوژئومتریک

تنش‌های برشی خالص در بال تیر

در اثر لنگر پیچشی متمرکز M_z، تنش‌های برشی خالص τ_s ناشی از لنگر پیچشی خالص M_s و تنش برشی چپ‌شدگی τ_w منتجه از لنگر پیچش تابیدگی M_w طبق رابطه (۴۶) در بال تیر بوجود می‌آیند. نمودار های (۶) و (۷) تنش‌های برشی خالص و چپ‌شدگی بال تیر را نشان می‌دهند [۲].

$$\begin{cases} \tau_s = Gt_f\dfrac{d\emptyset}{dz} \\ \tau_w = E\dfrac{b^2(d-t_f)}{16}\dfrac{d^3\emptyset}{dz^3} \end{cases} \quad (۴۶)$$

مقادیر حداکثر خطای مطلق پاسخ‌های عددی تنش‌های برشی خالص و چپ‌شدگی در جدول‌های (۳) و (۴) به ترتیب مشخص شده‌اند.

جدول ۳- حداکثر مقادیر خطای تنش برشی خالص در بال تیر

حداقل مربعات	گالرکین	حداکثر مقدار خطا (%)
۰/۷۹۷۲	۰/۷۹۷۲	اجزای محدود
۰/۱۹۶۵	۰/۱۹۸۲	ایزوژئومتریک

جدول ۴- حداکثر مقادیر خطای تنش برشی تابیدگی در بال تیر

حداقل مربعات	گالرکین	حداکثر مقدار خطا (%)
۰/۸۰۱۸	۰/۸۰۱۷	اجزای محدود
۰/۱۸۱۷	۰/۱۸۲۵	ایزوژئومتریک

تنش قائم در بال تیر

همچنین به علت چپ‌شدگی، تنش عمودی σ_w (۴۷) در بال تیر ایجاد می‌گردد [۲].

$$\sigma_w = \frac{Eb(d-t_f)}{4}\frac{d^2\emptyset}{dz^2} \quad (۴۷)$$

نمودار جواب‌های دقیق و عددی تنش نرمال بال تیر در شکل (۸) رسم شده است و در جدول (۵) مقادیر خطاهای هر روش مشخص گردیده است.

جدول ۵- حداکثر مقادیر خطای تنش قائم در بال تیر

حداقل مربعات	گالرکین	(%)حداکثر مقدار خطا
۰/۷۹۹۰	۰/۷۹۹۰	اجزای محدود
۰/۲۱۹۳	۰/۲۱۸۷	ایزوژئومتریک

نتیجه‌گیری

۱- از آنجایی که در حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد از فرمول بندی روش اجزای محدود قوی استفاده می‌شود، لذا چند جمله‌ای‌های انتخابی باید به گونه‌ای باشند که همه شرایط مرزی از نوع مقدار متغیر وابسته و مشتقات آن را در مرزهای مسأله ارضا نماید که خود سبب می‌شود چند جمله‌ای از درجه‌ای بالاتر انتخاب شود.

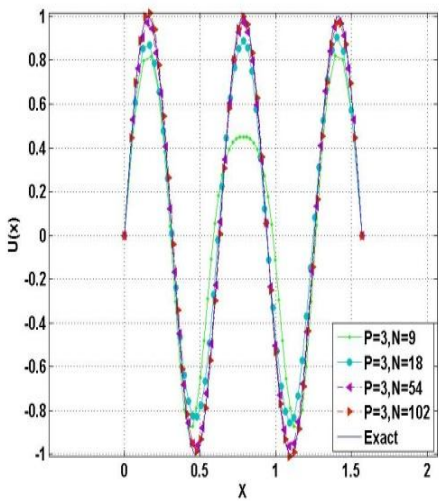
۲- ماتریس ضرایب در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک گالرکین نامتقارن می‌باشد در حالی که روش حداقل مربعات ماتریس ضرایب متقارن را نتیجه می‌دهد.

۳- همگرایی جواب‌های ایزوژئومتریک با افزایش تعداد نقاط کنترلی و درجه توابع پایه افزایش می‌یابد اما نرخ همگرائی با افزایش تعداد نقاط کنترلی محسوس‌تر می‌باشد، لذا جهت حصول جواب دقیق‌تر افزایش تعداد نقاط کنترلی پیشنهاد می‌شود. به طور کلی در حل معادلات دیفرانسیل مراتب بالا استفاده از توابع پایه حداقل برابر با مرتبه معادله‌ی دیفرانسیل جهت دست‌یابی به پاسخ‌های دقیق‌تر توصیه می‌شود.

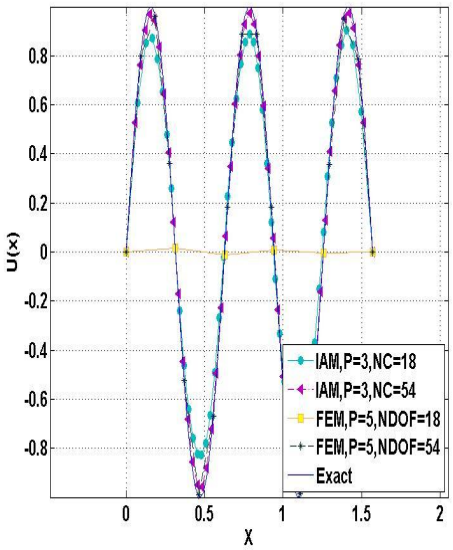
۴- در روش تحلیل ایزوژئومتریک نیازی به تولید شبکه و گره نمی‌باشد در حالی که در روش اجزای محدود به تولید شبکه و در روش‌های نقاط محدود به تولید گره نیاز داریم. در واقع مفاهیمی مانند المان و گره در روش تحلیل ایزوژئومتریک، در تعاریف بردار گره گنجانده شده است.

۵- همیشه در حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد به کمک روش ایزوژئومتریک حداقل به چند جمله‌ای‌هایی که تا مرتبه معادله، مشتق‌پذیر

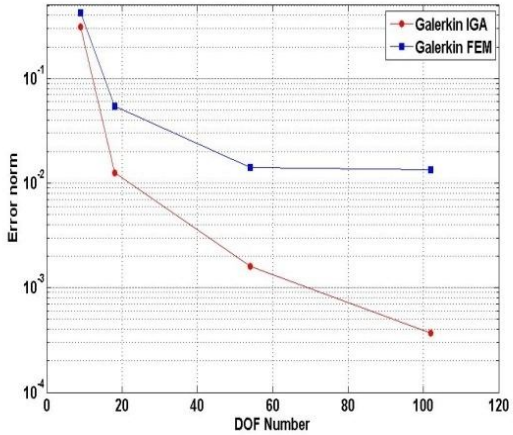
هستند نیاز داریم حال آنکه در روش اجزای محدود حداقل درجه چند جمله‌ای مورد نیاز برابر $2 \times n - 1$ می‌باشد. (n درجه معادله دیفرانسیل مرتبه فرد می‌باشد).



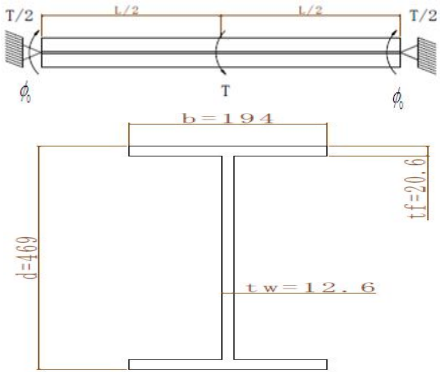
شکل۱- جواب روش ایزوژئومتریک گالرکین به‌ازای توابع پایه درجه سه معادله مرتبه سه



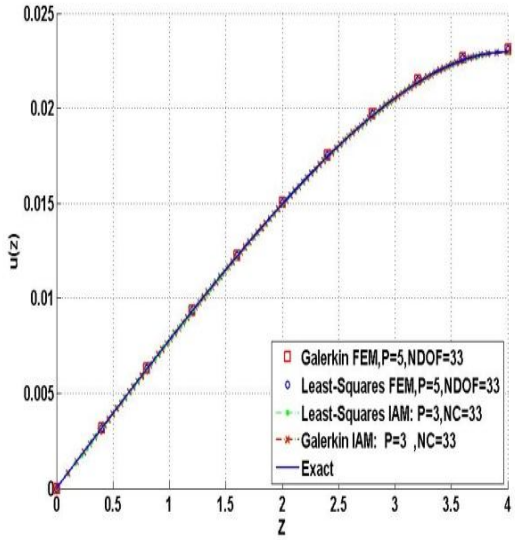
شکل ۲- جواب اجزای محدود و ایزوژئومتریک گالرکین معادله مرتبه سه به‌ازای تعداد درجات آزادی برابر



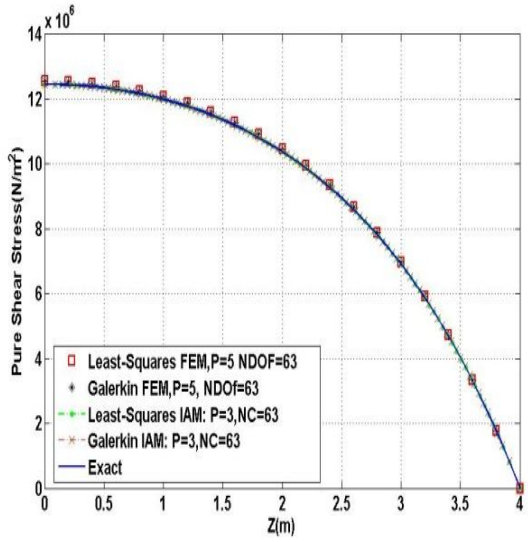
شکل ۳- نرخ همگرایی حل‌های ایزوژئومتریک و اجزای محدود گالرکین معادله مرتبه سه به‌ازای تعداد درجات آزادی برابر



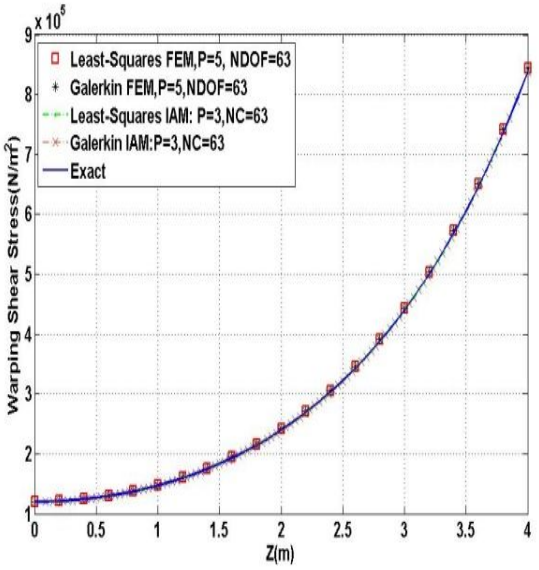
شکل ۴- تیر (I) شکل (ابعاد به میلی‌متر)



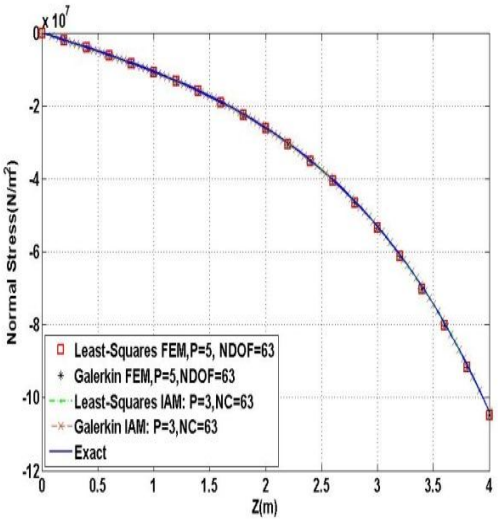
شکل ۵- جواب گالرکین و حداقل مربعات روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک بازای تعداد درجات آزادی برابر (درجه)



شکل ۶- تنش برشی خالص در بال تیر بازای حل‌های گالرکین و حداقل مربعات روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با درجات آزادی یکسان



شکل ۷- تنش برشی تابیدگی در بال تیر بازای حل‌های گالرکین و حداقل مربعات روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با تعداد درجات آزادی یکسان



شکل ۸- تنش قائم در بال تیر به‌ازای حل‌های گالرکین و حداقل مربعات روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با تعداد درجات آزادی یکسان

مراجع

1. Murray N.W., *Introduction to The Theory of Thin-walled Structures*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
2. Charles G., and Salmon., *Steel structures design and behavior.* HaperCollins, 1995.
3. Wang C.M., *Exact solutions for buckling of structural members.* CRC Press, 2005.
4. Chen C.N., The warping torsion bar model of the differential quadrature element method. *Computers & Structures*, v. 66 , 1997, pp. 249-257.
5. Reddy J.N., *An introduction to the finite element method*. 3nd ed., McGraw-Hill, 2006.
۶. شکوری، اسماعیل، حسنی، بهروز، هوسی، علی، بررسی روش‌های حل اجزای محدود مسائل چپ‌شدگی تیرهای بدون تکیه‌گاه‌های جانبی و کمانش پیچشی ستون‌ها. *اولین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک و فن‌آوری های پیشرفته*، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر مجلسی، اصفهان، ۱۹-۲۰ مهر ۱۳۹۱، ص۱۸۳-۱۹۱.
7. Hassani B., Moghaddam NZ., and Tavakkoli SM., Isogeometrical solution of Laplace equation. *Asian journal of civil engineering (building and housing),* v. 10, n. 6, 2009, pp. 579-592.
8. Piegl L., and Tiller W., *The NURBS book*. 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
9. Falco C.de., reali A., and Vazquez R., A research tool for Isogeometric Analysis of PDEs. *Advances in Engineering Software,* v. 42, 2011, pp. 1034 -2011.
10. Cottrell J.A., Bazilevs Y., and Hughes T.G.R., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl Mech. Engrg*, v. 194, 2005, pp. 4135-4195.