



استفاده از اسپلاینها در مدلسازی و تحلیل مسایل تنش / کرنش مسطح

ناصر ظریف مقدم^۱، بهروز حسنی^۲

۱- دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی شاهرود

۲- دانشیار گروه عمران دانشگاه صنعتی شاهرود

Nasser_Zarif@yahoo.com

B_Hassani@shahroodut.ac.ir

خلاصه

در این پژوهش اقدام به فرمولبندی و حل مسایل تنش/کرنش مسطح با استفاده از اسپلاینها تحت عنوان روش ایزوژئومتریکی نموده ایم. از مزایای این روش نسبت به روش اجزای محدود، می توان به حذف مرحله شبکه بندی مساله و کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات حاصله نام برد. همچنین مدلسازی دقیقتر شرایط مرزی نسبت به روش اجزای محدود از مزایای دیگر این روش می باشد. با توجه به اینکه روش مذکور مبتنی بر استفاده از اسپلاینها و تکنیک نربز^۱ می باشد، لذا مفاهیم اسپلاینها و پارامترهای مورد نیاز برای محاسبه آنها نیز به اختصار توضیح داده شده است. در انتها نیز با حل مثال، دقت و توانمندی این روش نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: روش ایزوژئومتریک، مسایل تنش/کرنش مسطح، اسپلاینها، تکنیک نربز

۱. مقدمه

امروزه برای حل مسایلی که پیش روی مهندسیین و محققین قرار دارد، ناگزیر به حل معادلاتی می شوند که اغلب دارای شکل دیفرانسیلی بوده و در واقع با حل این معادلات دیفرانسیل مساله تحلیل شده و به جواب مورد نظر دست می یابیم. اما چون تعداد محدودی از این معادلات را می توان به صورت تحلیلی حل نمود، لذا روشهای حل دیگری که آنها را با عنوان روشهای عددی می شناسیم توسعه یافته اند. البته روشهای عددی با ظهور کامپیوترها رشد چشمگیری داشته اند و امروزه به کمک کامپیوترها و روشهای عددی موجود قادر به حل معادلات بسیار پیچیده در حوزه های متنوع علوم می باشیم. برخی از روشهای عددی معروف عبارتند از روش تفاضلات محدود^۲، روش اجزای محدود^۳، روش نقاط محدود^۴ و روشهای جدیدتر مانند روش ایزوژئومتریک^۵. این روشهای هر یک در پی دیگری آمده و دو هدف اصلی را دنبال کرده اند. این اهداف عبارتند از اولاً ایجاد کارایی، دقت و سرعت بالاتر و ثانیاً ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسایل و رفع مشکلات روشهای قبلی.

استفاده از روش اجزای محدود در تحلیل سازه های پیچیده و مکانیک محاسباتی به امری معمول تبدیل شده است. شاید بتوان گفت که توسعه این روش در سالهای گذشته و وجود نرم افزارهای متعدد تجاری سبب کاربرد وسیع این روش در علوم مختلف از جمله در علوم سازه و مکانیک شده است. اما باید دانست مزایایی مهم مانند سیستماتیک بودن روش اجزای محدود در یافتن توابع تقریب زننده، مدلسازی شکلهای پیچیده، قابلیت تبدیل به الگوریتمها و کدهای کامپیوتری و پیشرفت سریع کامپیوترها، از علل فراگیر شدن استفاده از این روش می باشد. اما روش اجزای محدود دارای معایبی نیز می باشد. مثلاً با اینکه این روش توانایی مدلسازی اشکال پیچیده را دارا می باشد ولی برای بالا رفتن دقت لازم است که تعداد و یا مرتبه المانها افزایش یابد که خود سبب بزرگ شدن دستگاه معادلات حاکم شده و گاه حل مسایل ناممکن و یا بسیار سخت و زمان بر می شود. تولید شبکه اجزای محدود نیز از مشکلات دیگر روش مذکور است که تاکنون وقت زیادی را از محققین برای تولید روشهای پایدار و کارآمد تولید شبکه گرفته است (۱). همچنین به طور میانگین برای حل یک مساله اجزای محدود حدود هشتاد درصد زمان حل مساله صرف تولید شبکه اجزای محدود می شود (۲). اشکالات دیگری نیز در روش اجزای محدود وجود دارد که در متن مقاله بیان شده است.

¹ NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)

² Finite Difference

³ Finite Element Method

⁴ Finite Point or Meshless Method

⁵ Isogeometric Method



روش عددی حل مسایل با استفاده از اسپلاینها روشی جدید است که مفاهیم آن در سال ۲۰۰۵ برای اولین بار توسط هیوز^۱ و همکارانش با نام روش ایزوژئومتریکی معرفی گردید(۲). این روش مبتنی بر یک درک هندسی از مساله و تولید جوابهای مساله با استفاده از اسپلاینها و نوع توانمندتر آن یعنی نربز^۲ می باشد. روش ایزوژئومتریکی علاوه بر داشتن مزایای روش اجزای محدود، برخی از معایب آن را نیز مرتفع نموده است. در واقع مدلسازی دقیقتر شکل مساله و نیز مدلسازی دقیق شرایط تکیه گاهی در مقایسه با روش اجزای محدود، که شرایط تکیه گاهی فقط در محل گره ها قابل اعمال است، عدم نیاز به تولید شبکه و کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات از مزایای روش ایزوژئومتریکی می باشد(۳-۸).

در این مقاله در بخش دوم به معرفی اسپلاینها و تکنیک نربز و شرح مختصر پارامترهای آنها پرداخته ایم. در بخش سوم روش ایزوژئومتریکی را در مقایسه با روش اجزای محدود معرفی کرده و در بخش چهارم روش فرمولبندی مسایل تنش/کرنش مسطح ایزوتروپیک با استفاده از روش ایزوژئومتریکی بیان شده است. در بخش پنجم نیز با حل مثال توانایی روش مذکور را نشان داده ایم. در انتها نیز به بیان نتایج و پیشنهاداتی در این خصوص پرداخته شده است.

۲. معرفی اسپلاینها و تکنیک نربز

اسپلاینها در واقع ابزاری ریاضی هستند که می توان با استفاده از اطلاعات اندکی، منحنیها و سطوح پیچیده را به صورت عددی مدل نمود(۹). برای تولید یک منحنی اسپلاین در حالت کلی بایستی با برخی از تعاریف و مفاهیم آن آشنا بود که به اختصار در ادامه آمده است.

۲-۱ بردار گره

بردار $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ را در نظر بگیرید. این بردار شامل مجموعه ای از اعداد حقیقی است به طوری که رابطه $u_i \leq u_{i+1}$ $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ در آن برقرار است. بردار U بردار گره^۳ و u_i ها مقادیر گره^۴ نامیده می شوند. بازه $[u_i, u_{i+1}]$ را یک دهانه گره^۵ می نامیم که می تواند طول آن صفر باشد، زیرا گره ها لزوما دارای مقادیر متمایز نمی باشند. اگر فاصله بین گره ها مساوی باشد، در این حالت بردار گره را یکنواخت^۶ می نامیم، در غیر اینصورت این بردار، غیر یکنواخت^۷ خواهد بود(۹).

۲-۲ توابع پایه اسپلاین

i امین تابع پایه اسپلاین با درجه p (یا مرتبه $p+1$) را با $N_{i,p}(u)$ نشان داده و بصورت رابطه (۱) تعریف می کنیم.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

توجه شود که برخی از خواص پارامترهای موجود در روابط فوق عبارتند از: ۱- $N_{i,0}(u)$ یک تابع پله ای^۸ بوده و به جز در بازه $u \in [u_i, u_{i+1})$ مقدار آن در سایر نقاط صفر است. ۲- برای $p > 0$ ، آنگاه $N_{i,p}(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه $p-1$ می باشد. ۳- برای محاسبه کلیه توابع پایه به بردار گره U و درجه p نیاز داریم. ۴- در صورتی که در رابطه (۲-۱) به تقسیم $0/0$ برسیم، آن را برابر با صفر لحاظ می کنیم. ۵- $N_{i,p}(u)$ ها، چند جمله ایهای تکه ای^۹ هستند که بر روی یک خط حقیقی تعریف شده و فقط بازه $[u_0, u_m]$ را تحت تاثیر قرار می دهند(۹ و ۱۰).

¹ T.J.R Hughes

² NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)

³ Knot Vector

⁴ Knots

⁵ Knot Span

⁶ Uniform

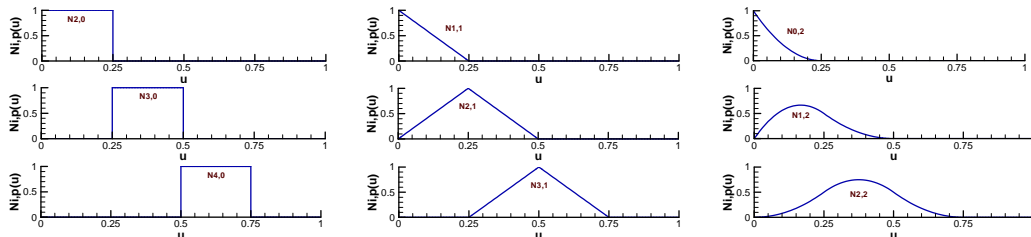
⁷ Non-Uniform

⁸ Step Function

⁹ Piecewise Polynomial



در ادامه، برای سادگی به جای $N_{i,p}(u)$ از $N_{i,p}$ استفاده می‌کنیم. همچنین به عنوان یک مثال اگر درجه تابع پایه به ترتیب برابر با $p = 0, 1, 2$ و بردار گره برابر با $U = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$ باشد، می‌توان توابع پایه را در شکل (۱) مشاهده نمود. سایر توابعی که نشان داده نشده اند دارای مقدار صفر می‌باشند.



شکل ۱ - شکل توابع پایه به ترتیب از چپ به راست برای درجات صفر و یک و دو

۳-۲ تولید سطوح اسپلاین و نرئز

می‌توان یک سطح NURBS را که دارای درجه p در جهت u و درجه q در جهت v می‌باشد را با رابطه (۲) به شکل زیر محاسبه نمود.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{matrix} \quad (2)$$

که $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی و $\{w_{i,j}\}$ وزن مربوط به آنها می‌باشند توجه شود که اگر وزن کلیه نقاط مساوی یک لحاظ شود، آنگاه منحنیها و سطوح تولیدی را با عنوان اسپلاین می‌شناسیم و در غیر این صورت منحنیها و سطوح نرئز تولید می‌شوند. همچنین $\{N_{i,p}(u)\}$ و $\{N_{j,q}(v)\}$ توابع پایه غیر گویا^۱ اسپلاین می‌باشند که بر روی بردارهای (۳) و (۴) تعریف می‌شوند.

$$U = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \} \quad (3)$$

$$V = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \} \quad (4)$$

توجه شود که روابط $r = n + p + 1$ و $s = m + q + 1$ نیز برقرار می‌باشند و اگر $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ را به شکل رابطه (۵) زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \quad (5)$$

اکنون می‌توانیم رابطه (۵) را به شکل (۶) باز نویسی نماییم.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (6)$$

با استفاده از رابطه (۶) می‌توان هر گونه سطح و رویه پیچیده ای را مدل نمود (۱۰) که در اینجا در روش ایزوژئومتریک، برای حل مسایل از این فرمولها برای مدل سازی جوابها استفاده می‌کنیم.

۳. روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود

چهارچوب کلی تحلیل ایزوژئومتریک با استفاده از تکنیک نرئز در مقایسه با روش اجزای محدود، مبتنی بر اصولی می‌باشد که عبارتند از (۱۲ و ۱):
شبکه المانها در این روش با ضرب بردارهای گره حاصل می‌شود. به عنوان مثال در مسایل دوبعدی مانند مسایل تنش/کرنش سطح این شبکه المان به

¹ Non-rational B-spline basis function



صورت $U \times V$ خواهد بود. ۲- المانها از تقسیم دامنه توسط دهانه های گرهی^۱ بدست می آیند. ۳- هندسه مساله با مشارکت نقاط کنترلی و توابع پایه تولید می شود. ۴- با استفاده از مفهوم ایزوپارامتریک^۲ مجهولات مانند تغییر مکانها، تنشها، سرعت، حرارت و غیره را با همان توابع پایه ای که برای تعریف هندسه استفاده کرده ایم، بیان می نمایم. ۵- درجات آزادی عبارتند از متغیرهای کنترلی^۳ که همان ضرایب توابع پایه می باشند. ۶- روند بهبود شبکه^۴ نیز با استفاده از اضافه کردن گره، ارتقای درجه توابع پایه و یا ترکیبی از آنها انجام می شود. این عمل مشابه با روشهای بهبود h ، p و hp در اجزای محدود است. البته روش جدیدی با نام روش بهبود k نیز در تحلیل ایزوژئومتریکی امکانپذیر است که خارج از بحث این مقاله می باشد. برای اطلاع بیشتر در این خصوص می توان به مرجع (۵) رجوع نمود. ۷- در مرحله روی هم گذاری^۵، همانند روش اجزای محدود، آرایه های محاسبه شده شده برای وصله ها^۶ در تحلیل ایزوژئومتریکی در یک آرایه کلی قرار داده می شوند. برای ایجاد سازگاری^۷ بین وصله ها، می توان از پارامترهای مشابه برای ساخت لبه ها یا سطوح دو طرف وصله^۸ استفاده نمود. در جدول (۱) می توان مقایسه ای بین روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریکی از دیدگاه مشابهت برخی مشخصه های کلیدی در هریک از دو روش را ملاحظه نمود.

جدول ۱ - مقایسه روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریکی

روش اجزای محدود	روش ایزوژئومتریکی
نقاط گرهی	نقاط کنترلی
متغیرهای گرهی	متغیرهای کنترلی
شبکه اجزای محدود	مقادیر گره ها در بردار گره
انجام درونیابی نقاط و متغیرهای گرهی با توابع پایه	عدم انجام درونیابی نقاط و متغیرهای کنترلی با توابع پایه
هندسه تقریبی	هندسه دقیق
توابع پایه از نوع چندجمله ای های جبری	توابع پایه نوبز
پدیده گیبز ^۹	میرایی تغییرات ^{۱۰}
زیر دامنه ها	وصله ها

۴. بدست آوردن فرمولبندی ایزوژئومتریکی

در این بخش ابتدا به معرفی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسایل تنش/ کرنش مسطح نموده و سپس مراحل دستیابی به فرمولبندی روش ایزوژئومتریکی برای حل این مسایل بیان می شود. همانگونه که می دانیم، معادلات دیفرانسیل (7) به طور همزمان بر مسایل تنش/ کرنش مسطح حاکم می باشند.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + f_x = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f_y = 0$$

در این معادلات شرایط مرزی طبیعی به صورت روابط (8) بیان می شوند.

$$t_x = \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \quad (8)$$

$$t_y = c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y$$

در این روابط، C_{ij} ها ضرایب الاستیسیته می باشند که در مسایل تنش مسطح با مصالح ارتوتروپیک و از روابط (9) به صورت زیر:

- 1 Knot spans
- 2 Isoparametric
- 3 Control variables
- 4 Mesh refinement
- 5 Assemble
- 6 Patches
- 7 Compatibility
- 8 Patch Interfaces
- 9 Gibbs phenomena
- 10 Variation diminishing



$$c_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad c_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \quad (9)$$

$$c_{12} = \mu_{21}c_{11} = \mu_{12}c_{22}, \quad c_{66} = G_{12}$$

و در مسایل کرنش مسطح با مصالح ارتوتروپیک از روابط (10) بدست می آیند.

$$c_{11} = \frac{E_1(1 - \mu_{12})}{1 - \mu_{12} - 2\mu_{12}\mu_{21}}, \quad c_{22} = \frac{E_2(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{(1 + \mu_{12})(1 - \mu_{12} - 2\mu_{12}\mu_{21})} \quad (10)$$

$$c_{12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12} - 2\mu_{12}\mu_{21}}, \quad c_{66} = G_{12}$$

البته توجه شود که در این مقاله، مسایل به صورت ایزوتروپیک و با فرض $E = E_1 = E_2$ و $\mu = \mu_{12} = \mu_{21}$ حل شده اند. در ادامه جواب مساله را به صورت روابط (11) برای تغییر مکان $u(x, y)$ و (12) برای تغییر مکان $v(x, y)$ در دامنه مساله در نظر می گیریم که در واقع از تعریف تولید رویه اسپلاین حاصل شده است و تغییر مکان در دامنه مساله را در هر جهت و هر نقطه (x, y) در دامنه مساله از روی ارتفاع رویه حل استخراج نمود.

$$U(r, s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j} U_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j}} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r, s) U_{i,j} \quad (11)$$

$$V(r, s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j} V_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j}} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r, s) V_{i,j} \quad (12)$$

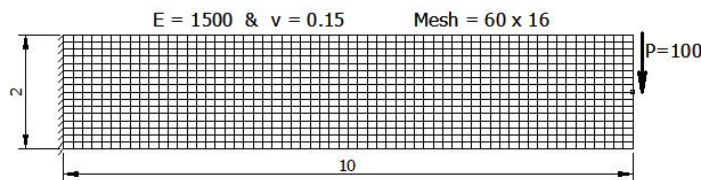
پس از نوشتن شکل ضعیف معادلات و محاسبه ژاکوبین ها مورد نیاز به دستگاه معادلاتی به شکل معادله (13) می رسیم که با حل آن می توان مختصات ارتفاع نقاط کنترلی را برای تولید رویه جواب محاسبه نمود. سپس با استفاده از فرمول تولید رویه و تکنیک معکوس نریز می توان مقدار تغییر مکان برای هر نقطه دلخواه از مساله و یا کانتورهای تنش و تغییر مکان را برای مساله بدست آورد.

$$[\mathbf{K}]\{U\} = \{F\} \quad (13)$$

که در این رابطه $[\mathbf{K}]$ ماتریس ضرایب، $\{F\}$ بردار نیروها و $\{U\}$ بردار تغییر مکانها در کل دامنه مساله می باشد. در ادامه با حل مثال، کیفیت و توانمندی و دقت جوابها در روش مذکور نشان داده شده است.

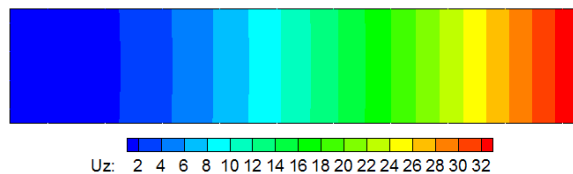
۵. حل مثال

در این بخش با حل یک مثال و مقایسه نتایج با روش اجزای محدود، توانمندی و مزایای روش ایزوژئومتریک نشان داده شده است. در این مثال فرض شده است که یک صفحه مستطیلی در حالت تنش مسطح با اتصال گیردار در یک انتها و تحت اثر بار متمرکز 1000 در انتهای آزاد خود در گره مشخص شده در شکل (۱) قرار دارد. مقدار مدول الاستیسیته در کل دامنه برابر با مقدار ثابت 15000 و مقدار ضریب پواسون برابر با 0.15 فرض شده است. همانطور که در شکل (۱) دیده میشود ابعاد تیر 10 در 2 با ضخامت واحد فرض شده است. ابتدا این مسئله با روش اجزای محدود و با تقسیم دامنه به 960 المان چهار گرهی حل شده است. ملاحظه می شود که در روش اجزای محدود، حل مساله منجر به حل دستگاه معادلاتی با حدود 1000 معادله و مجهول خواهد شد. سپس با استفاده از نرم افزار تهیه شده با روش ایزوژئومتریک نیز مساله مجدداً حل و نتایج با روش اجزای محدود مقایسه شده است.



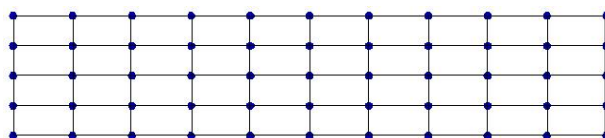
شکل ۱ - شبکه بندی اجزای محدود و سایر مشخصات مثال حل شده

نتیجه تحلیل مساله برای تغییر مکان قائم U_z صفحه مستطیلی با روش اجزای محدود در شکل (۲) نشان داده شده است.



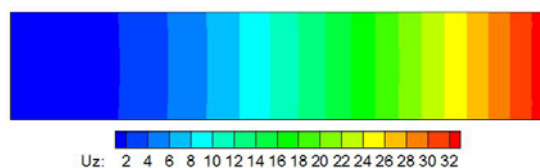
شکل ۲ - تحلیل اجزای محدود مثال شکل ۱

البته مساله مذکور با تعداد المانهای بیشتر نیز حل شده است که اساسا تغییر معناداری در جوابها حاصل نشده است. اکنون مساله فوق را با روش ایزوژئومتریك و با تعداد ۵۵ نقطه کنترلی مطابق شکل (۳) حل می کنیم. البته دقت شود که در شکل (۳) هر مستطیل یک المان نیست و اصلا در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش ایزوژئومتریك وجود ندارد. در واقع شبه المانهای روش ایزوژئومتریك از حاصلضرب بردارهای گرهی بدست می آید. نکته دیگر اینکه در اجزای محدود همواره گره ها بر روی دامنه قرار میگیرند در حالی که در روش ایزوژئومتریك نقاط کنترلی در حالت کلی میتوانند بر روی دامنه نباشند.



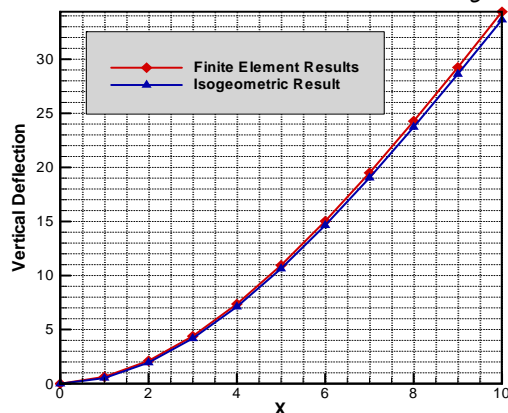
شکل ۳ - شبکه نقاط کنترلی در صفحه مستطیلی

بردار گره برای جهت طولی برابر با $\{0.0000, 0.2500, 0.5000, 0.7500, 1.0000\}$ و برای جهت عرضی برابر با $\{0.0000, 0.3300, 0.6600, 1.0000\}$ در نظر گرفته شده است. همچنین درجه توابع پایه اسپلاین در این مساله مساوی ۲ لحاظ گردیده است. نتیجه تحلیل ایزوژئومتریك با شرایط ذکر شده، در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل ۴ - تحلیل ایزوژئومتریك مثال شکل ۱

همانگونه که از روی کانتورهای شکلهای (۲) و (۴) ملاحظه می شود، نتایج تحلیل بسیار به یکدیگر شبیه است که این مساله برای تغییر شکل قائم محور میانی صفحه مستطیلی فوق در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۵ - مقایسه نتایج روش اجزای محدود با روش ایزوژئومتریك

توجه شود که در واقع در تحلیل ایزوژئومتریك فقط از ۱۲ شبه المان که در واقع از حاصلضرب تعداد دهانه های گرهی حاصل می شود استفاده شده است، در حالی که در روش اجزای محدود از ۹۶۰ المان چهار گرهی استفاده شده است که حدود ۸۰ برابر بیشتر می باشد. همچنین در



روش تحلیل ایزوژئومتریکی تعداد مجهولات گرهی در حدود ۱۰۰ و در اجزای محدود در حدود ۱۰۰۰ است که باز ملاحظه می‌شود که تغییرات قابل ملاحظه‌ای در ابعاد دستگاه معادلات نهایی ایجاد شده که سبب افزایش سرعت و دقت حل مساله در روش ایزوژئومتریکی شده است. همچنین در روش اجزای محدود برای مدل‌سازی تکیه‌گاه فقط نقاط تکیه‌گاهی گیردار می‌شوند که از معایب و ضعفهای روش اجزای محدود محسوب می‌شود، در حالی که در روش ایزوژئومتریکی کل وجه سمت چپ صفحه مستطیلی به صورت سراسری و پیوسته به صورت گیردار مدل می‌شود که باز تفاوت در دقت مدل‌سازی نسبت به روش اجزای محدود روشن خواهد بود. البته برای آشنایی با توانمندیهای روش ایزوژئومتریکی و ملاحظه مثالهای با جزئیات بیشتر می‌توان به مراجع (۱۲ و ۱۳) رجوع نمود.

۶. نتیجه‌گیری

روش اجزای محدود روشی شناخته شده و توانمند در تحلیل مسایل سازه و مکانیک می‌باشد. ولی با توجه به برخی از محدودیت‌های این روش، روش‌های دیگری مانند روش‌های بدون شبکه و روش ایزوژئومتریکی برای پوشش ضعف‌های آن در سال‌های اخیر ارایه شده‌اند. با توجه به اینکه روش ایزوژئومتریکی در ابتدای راه تکامل خود قرار دارد ولی پتانسیل بالای این روش در حل مسایل پیچیده مکانیک و سازه سبب ارتقا و عمومی شدن این روش در زمان کوتاهی خواهد گردید. از مزایای این روش که در حل مسایل مشاهده شد می‌توان به راحتی، سرعت و دقت بالای مدل‌سازی نسبت به روش اجزای محدود، عدم نیاز به شبکه بندی دامنه مساله مانند روش اجزای محدود، همچنین کاهش ابعاد دستگاه معادلات و اقلان دقیق شرایط مرزی در مدل‌سازی مساله اشاره نمود.

به عنوان پیشنهاد نیز می‌توان از این روش در بهینه‌سازی توپولوژی و شکل سازه^۱ با توجه به کاهش چشمگیر متغیرهای طراحی و تولید شکلهای بسیار عملی‌تر با مرزهای یکنواخت تر و یا حل مسایل ساخته شده با مصالح FG^۲ و ارتوتروپیک استفاده نمود. توزیع جریان سیالات در محیط‌های متخلخل و انتشار موج در جامدات و سیالات نیز از مواردی است که میتوان با روش ایزوژئومتریکی به مدل‌سازی و حل آنها مبادرت نمود.

۸. مراجع

۱. ظریف مقدم، ن.، (۱۳۸۳)، " بهینه سازی شکل سازه ها با استفاده از روش تغییرات مرزی، " پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.
2. Hughes, T.J.R. and Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., (2005), "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, " *Computers Method in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp 4135–4195
3. Hassani, B. and Khanzadi, M. and Tavakkoli, S.M. and Moghaddam, N.Z., (2009) "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems," 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June 1 - 5, Lisbon, Portugal
4. Cottrell, J.A. and Hughes, T.J.R. and Reali, A., (2007), "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196- pp 4160–4183
5. Bazilevs, Y. and DaVeiga, L.B. and Cottrell, J. and Hughes, T.J.R. and Sangalli, G., (2006), "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 161031–1090,
6. Bazilevs, Y. and Calo, V. and Cottrell, J. and Hughes, T. and Reali, A. and Scovazzi, G., (2007), "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 197 (1–4) pp173–201
7. Bazilevs, Y. and Calo, V.M. and Zhang, Y. and Hughes, T.J.R., (2006) "Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow", *Comput. Mech.* 38 (4) pp310–322
8. Cottrell, J.A. and Reali, A. and Bazilevs, Y. and Hughes, T.J.R., (2006), "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195 (41–43) pp5257–5296

¹ Structural Shape and Topology Optimization

² Functionally Graded Materials



9. Piegl, L. and Tiller, W., (1997), "The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)" Second edition., Springer-Verlag, New York
10. Rogers, D.F., (2001), "An Introduction to NURBS: With Historical Perspective," Second edition., Morgan Kaufmann publishers
11. Shikin, E.V. and Plis, A.I., (1995), "Handbook on Spline for the Users," CRC Press
12. Hassani, B. and Moghaddam, N. Z., (2008) "Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spline basis functions", Technical Report No. 1015, Shahrood University of Technology, Iran, (In Farsi).