بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های دو بعدی با استفاده از تابع چگالی مصنوعی

بهروز حسنی[1]، سید مهدی توکلی[2]، حسین قاسم نژاد مقری[3]
۱- دانشیار دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود
۲- دانشجوی دکتری سازه دانشگاه علم و صنعت
۳- دانشجوی دکتری سازه دانشگاه صنعتی شاهرود

b_hassani@shahroodut.ac.ir
s_m_tavakoli@yahoo.com
h.ghassemnezhad@civil.tus.ac.ir

خلاصه

در این مقاله از یکی از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی به نام روش مجانب‌های متحرک برای بهینه‌سازی توپولوژی استفاده می‌کنیم. استفاده از این روش امکان تعریف و فرمول‌بندی مسائل متنوعی را میسر می‌کند. ما فرمول‌بندی حداقل‌سازی وزن سازه با شرط باقی ماندن تنش‌ها در محدوده مجاز را مورد استفاده قرار می‌دهیم. مدل‌سازی مصالح با استفاده از روش چگالی مصنوعی انجام می‌شود. برای این منظور تابع چگالی مصالح به صورت یک مقدار ثابت برای هر المان درنظر گرفته می‌شود و در نهایت به‌عنوان متغیر طراحی در مسئله بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای نشان دادن درستی روش، مثال‌هایی برای سازه‌های دوبعدی حل شده و نتایج تشریح شده‌اند.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی توپولوژی، قید تنش، تابع چگالی مصنوعی

۱. مقدمه

در طراحی توپولوژی سازه‌ها به دنبال پیدا کردن توزیع بهینه ماده در یک دامنه طراحی مشخص هستیم. بسته به نوع شرایطی که سازه ساخته می‌شود و مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد، هدف از طراحی، می‌تواند به‌دست آوردن سازه‌ای با ماده و حفره (اصطلاحاً ۱-۰ یا سیاه و سفید) یا یک ماده مرکب باشد. استفاده از فرمول‌بندی توزیع ماده برای مسائل طراحی توپولوژی سازه‌های پیوسته، برای هر یک از حالت‌های مذکور بسیار مفید می‌باشد. در این‌گونه مسائل غالباً به دنبال یافتن توزیع چگالی در یک دامنه از پیش تعیین شده، جهت دست‌یابی به سازه‌ای با حداقل کار خارجی هستیم. این چگالی ممکن است معرف یک ماده مرکب خلل وفرج‌دار یا یک پارامتر درون‌یابی مصنوعی برای جلوگیری از حالت ۱-۰ مسئله اصلی باشد.

پس از معرفی تکنیک توزیع ماده برای کاربردهای محاسباتی طراحی توپولوژی سازه‌های پیوسته توسط بندسو و کیکوچی [۱]، تحقیقات بسیاری جهت ارتقاء روش اولیه از حالت حداقل کار خارجی به سایر معیارهای طراحی اختصاص یافته است. تقریباً تمام این تحقیقات که بر اساس در نظر گرفتن معیار کلی از منظر بهینه‌سازی پایه‌ریزی شده‌اند، مانند حداقل‌سازی کار خارجی، دارای پیچیدگی‌های محاسباتی (خصوصاً در مورد تعداد قیدها) هستند.

اگر بخواهیم قیدهای تنش را در مسائل طراحی توپولوژی پیوسته در نظر بگیریم، دو سوال اساسی وجود خواهد داشت. یکی طبیعت محلی قید تنش است، به این معنی که باید روش‌هایی به‌کار گرفته شوند که قادر به در نظر گرفتن تعداد زیادی قید در یک پروسه محاسباتی باشند. مورد دوم فرمول‌بندی معیار تنش معادل است. در حالتی که فرمول‌بندی ۱-۰ به‌کار گرفته می‌شود، قید تنش به سادگی تعریف می‌شود؛ اما برای حالتی که با یک ماده با چگالی بینابین سروکار داریم، شکل قید تنش دیگر مانند حالت قبلی نیست.

در این مقاله مدل چگالی مصنوعی به‌کار گرفته شده و به منظور اعمال جریمه بر روی چگالی‌های بینابین از رابطه قانون توانی بین سختی و چگالی (SIMP)[۱] استفاده شده است. مسائلی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند، به شکل کلی زیر هستند:

$$\min_{0\le\rho\le 1} \int \rho\, d\Omega \qquad s.t. \quad \sigma(\rho) \le \sigma_l \tag{۱}$$

که در این رابطه ρ چگالی، Ω دامنه طراحی، σ تنش معادل هر المان و σ_l تنش مجاز می‌باشند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برخلاف مسائل سنتی طراحی توپولوژی، قید تنش اعمال شده است. یکی از موارد مورد توجه در این دسته از مسائل بی‌قاعدگی[۲] و ناپیوستگی در فضای طراحی است. این مشکل از شرایط نامناسب قیدها ناشی می‌شود و برای رفع آن باید از روش‌هایی استفاده نمود که با ایجاد تغییر در مسئله بهینه‌سازی آن را قابل حل می‌کنند. علاوه بر این بزرگی ابعاد مسئله بر مشکلات کار می‌افزاید. به این خاطر باید تمهیداتی برای استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی به کار گمارده شوند.

۲. رابطه‌سازی مواد با چگالی مصنوعی

در طراحی توپولوژی به دنبال پیدا کردن نقاطی هستیم که ماده باید وجود داشته باشد. زمانی که از یک فرم گسسته استفاده می‌کنیم، دامنه طراحی توسط اجزاء محدود به پیکسل‌هایی تبدیل می‌شود که در نهایت بسته به این‌که ماده در آن‌ها قرار می‌گیرد یا نه، سیاه یا سفید خواهند شد. در واقع در فضای مرجع Ω، به دنبال تعیین زیرمجموعه بهینه Ω_{mat} هستیم که شامل مواد باشد. برای مسئله بهینه‌سازی (۱)، این امر به این معنی است که برای مجموعه تانسورهای سختی قابل قبول، داریم:

$$E_{ijkl} = 1\Omega_{mat} E^0_{ijkl}, \quad 1\Omega_{mat} = \begin{cases} 1 \;\; if \;\; x \in \Omega_{mat} \\ 0 \;\; if \;\; x \notin \Omega_{mat} \end{cases} \tag{۲}$$

E^0_{ijkl} تانسور سختی برای ماده ایزوتروپیک می‌باشد.

متداول‌ترین شیوه حل این مسئله، جایگزین کردن مقادیر پیوسته به جای مقادیر صحیح و سپس استفاده از نوعی جریمه برای میل دادن جواب به سمت مقادیر گسسته ۱–۰ می‌باشد. پس از آن با بهبود ماتریس سختی طوری‌که به طور پیوسته وابسته به تابعی به نام چگالی ماده باشد، مسئله طراحی در دامنه ثابت تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی اندازه می‌شود [۲]. این تابع از این پس متغیر طراحی خواهد بود. نکته‌ای که باید مدنظر باشد این است که نتایج طراحی باید طوری باشد که تقریباً همه نواحی از مواد یاحفره تشکیل شده باشند. این به این معنی است که مقادیر بینابین تابع چگالی مصنوعی باید همانند سایر تقریب‌های بهینه‌سازی پیوسته مسائل ۱–۰ جریمه شوند.

یکی از گزینه‌هایی که کفایت و عمومیت آن مشخص شده‌است، مدل سختی نسبی جریمه شده یا مدل SIMP است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E^0_{ijkl}, \quad p > 1 \tag{۳}$$

حجم سازه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \int_\Omega \rho(x)\, d\Omega \tag{۴}$$

دلیل اینکه ρ چگالی نامیده می‌شود از این‌جا گرفته شده است. چگالی، خصوصیات مصالح را بین ۰ و E^0_{ijkl} به صورت زیر درون‌یابی می‌کند.

$$E_{ijkl}(\rho = 0) = 0, \qquad E_{ijkl}(\rho = 1) = E^0_{ijkl}, \tag{۵}$$

یعنی این‌که اگر طرح بهینه در تمام نقاط دارای چگالی صفر یا یک باشد، طرح سیاه و سفید مورد انتظار، با یک مدل فیزیکی مناسب حاصل شده‌است.

با انتخاب $P > 1$ در روش SIMP، چگالی‌های بینابین به‌خاطر کوچک بودن سختی در مقایسه با حجم در آن‌ها، نامطلوب خواهند بود. به بیان دیگرانتخاب مقدار P بزرگ‌تر از یک منجر به هزینه‌بر شدن چگالی‌های بینابین در طرح بهینه می‌شود و به عنوان جریمه‌ای برای آن‌ها اعمال می‌شود. تجربه نشان داده است که با انتخاب مقدار به اندازه کافی بزرگ P (برای طرح ۱–۰ واقعی $P \ge 3$) بهینه‌سازی نتیجه خواهد داد[۳]. علاوه براین برای

---

[۱] Solid IsotopicMaterial with Penalization

[۲] Irregularity

مسائل حداقل کار خارجی در حالت گسسته نشان داده شده است که برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ P، با شرط سازگار بودن قید حجم، یک جواب بهینه کلی ۱-۰ وجود خواهد داشت [۳].

۳. تعریف مسئله بهینه‌سازی

اعمال قید تنش به مسائل طراحی بهینه توپولوژی بسیار پراهمیت است. با این‌حال مشکلات بسیاری برای حل این‌گونه مسائل مطرح می‌شود. از این میان میتوان به نحوه مطرح کردن قید، زیاد بودن تعداد قیود، اعمال الگوریتم مناسب جهت بهینه‌سازی وغلبه بر مشکلات تمرکز تنش اشاره نمود.

یک قید تنش مناسب برای مدل مصالح مصنوعی باید تا حد ممکن ساده باشد. از طرفی باید از لحاظ فیزیکی سازگار با خصوصیات ماده با چگالی مصنوعی باشد. در این‌جا از معیار تنش فون میزس برای مصالح مصنوعی (SIMP) با ضریب جریمه p استفاده می‌شود[۳].

$$\sigma_{vm} \le \rho^p \sigma_l \quad if \;\; \rho \ge 0 \tag{۶}$$

در رابطه بالا σ_{vm} تنش فن میزز و σ_l تنش مجاز می باشند. این قید بیان‌گر کاهش مقاومت در ماده متخلخل است. این امر موجب کاهش محدوده مقاومت با فاکتور ρ^p می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود برای به‌دست آوردن سختی و قید تنش از توان یک‌سان استفاده شده است. انتخاب مقدار دیگری برای توان با فیزیک مسئله سازگار نمی‌باشد[۴].

به این ترتیب شکل کلاسیک مسئله حداقل کردن وزن سازه با در نظر گرفتن قید تنش که در تعادل پایدار با نیروهای خارجی است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\min_{\rho} \;\; \sum_{e=1}^{N} A_e \rho_e \\ &s.t: \;\; KU = f \\ &\qquad (\sigma_e)_{vm} < \rho_e^{\,p} \;\; if \;\; \rho > 0 \qquad 0 < \rho_e < 1 \quad e = i, \ldots, N \end{aligned} \tag{۷}$$

در رابطه (۷) اندیس e معرف المان می باشد. U، K و f به ترتیب ماتریس تغییر مکان، سختی و نیروهای گرهی می‌باشند که بیان‌گر تعادل پایدار در مسئله است. در مسئله فوق می توان تنش را در یک نقطه المان، مثلا گره میانی در نظر گرفت.

۴. روش‌های حل

وجود مسئله "تکینی"[۱] باعث می‌شود تا تمهیدات خاصی را در حل مسائل با قید تنش اعمال کنیم[۵]. این مسئله ابتدا در حل مسائل خرپا پیش آمد و منجر به یک بی قاعدگی در فضای طراحی شد. تکینی به این خاطر روی می‌دهد که تغییر در توپولوژی سازه (حذف یک یا چند المان) باعث حذف قید متناظر با آن‌ها شده و در نهایت فضای طراحی مسئله را تغییر می‌دهد و باعث چندحالتی[۲] شدن فضای طراحی می‌شود. این امر به این معنی است که روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی مبتنی بر شرایط کان‌تاکر دیگر نمی‌توانند نقاط بهینه‌ای را که در این نواحی چندحالته قرار دارند، پیدا کنند. به عبارت دیگر یک الگوریتم استاندارد بهینه‌سازی قادر نخواهد بود نقاط با چگالی کم را کاملا حذف کند و به توپولوژی بهینه درست برسد.

یک روش برای رفع این مشکل این است که فرمول‌بندی را طوری تغییر دهیم که بهتر به جواب همگرا شود. در ابتدا توجه کنیم که در یک مسئله طراحی توپولوژی، قیدهای تنش تنها زمانی اعمال می‌شوند که ماده وجود داشته باشد. برای حذف شرط $\rho > 0$ از قید می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\rho\left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^{\mu}\sigma_l} - 1\right) \le 0 \tag{۸}$$

[۱] Singularity

[۲] Degeneracy

برای اجزای میله‌ای در یک خرپا، این شرط به معنی درنظر گرفتن نیروها به جای تنش‌ها است[۵]. متاسفانه بازنویسی فرمول به این شکل کافی نیست و نیاز به اعمال تغییرات دیگری نیز هست. یک روش این است که قیدها را با روش رها سازی[۱] که توسط چنگ و ژو [۶] ارائه شد، بازنویسی کنیم. رابطه جدید به این صورت می‌باشد:

$$\rho(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^{\mu}\sigma_l}-1)\leq\varepsilon(1-\rho)\qquad\varepsilon^2=\rho_{\min}\leq\rho \tag{۹}$$

که ε یک مقدار مشخص است. به ازی هر $\varepsilon>0$، مسئله با قیدهای بالا، دارای فضای طراحی خواهد بودکه دیگر چندحالتی نیست. ضریب $(1-\rho)$ اطمینان می‌دهد که قید تنش واقعی زمانی اعمال می‌شود که $\rho=1$ باشد. بنابراین با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی عادی، امکان رسیدن به نقطه مینیمم ρ_{ε}^{*} وجود خواهد داشت. چنگ و ژو نشان دادند که فرمول‌بندی رهاسازی، نگاشت‌هایی یک به یک میان پارامتر رهاسازی ε و فضای طراحی رهاسازی شده و جواب بهینه آن‌ها به وجود می‌آورد. این یعنی اینکه وقتی $\varepsilon\rightarrow 0$، دنباله فضاهای طراحی $\{\Omega_{\varepsilon}\}$ و جواب بهینه آن‌ها ρ_{ε} به سمت مسئله اصلی چندحالتی و جواب بهینه آن همگرا می‌شود. بنابراین روند رسیدن به جواب نهایی شامل حل دنباله‌ای از مسائل بهینه‌سازی متناسب با پارامترهای نزولی ε خواهد بود. می‌توان از روش‌های توابع مانع[۲] و توابع جریمه[۳] استفاده کرد. همچنین می‌توان با استفاده از $\rho_{\min}=\varepsilon^2$ و با کاهش تصاعدی حداقل چگالی از 10^{-1} به 10^{-4} یا 10^{-6}مسئله را حل کرد[۵]. می‌توان این کار را با تقسیم متوالی $\rho_{\min}=\varepsilon^2$ بر یک ضریب معلوم (مثل2) انجام داد. برای اینکه مجموعه نقاط شروع که منجر به پیدا کردن نقطه تکین می‌شوند را افزایش دهیم، باید چگالی حداقل انتخابی به اندازه کافی بزرگ باشد[۱۳].

برای استفاده از روش مجانب‌های متحرک (MMA) [۷] باید قیدهای تنش طوری نوشته شوند که متناسب با راه حل‌های تقریب‌سازی این روش باشند. برای این منظور قیدها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم[۵]:

$$\frac{\sigma_{VM}}{\rho^{\mu}\sigma_l}-\frac{\varepsilon}{\rho}+\varepsilon\leq 1 \tag{۱۰}$$

۵. روش بهینه‌سازی

برای مسائل حداقل انرژی کرنشی از روش‌های معیار بهینگی استفاده می‌شود. این روش‌ها با محدودیت‌های زیادی از جمله محدود بودن تعداد قید همراه هستند و به همین خاطر نمی‌توانند در این گونه مسائل به کار آیند. استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی برای حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای اندازه و شکل بسیار متداول می‌باشد. در این روش‌ها مسئله طراحی به عنوان مسئله بهینه‌سازی تنها بر حسب متغیرهای طراحی درنظر گرفته می‌شود و میدان تغییر مکان به صورت تابعی از متغیرهای طراحی بیان می‌شود. میدان تغییر مکان بر اساس معادلات تعادل به صورت ضمنی بر حسب متغرهای طراحی بیان می‌شود.

ایده اساسی روش توزیع ماده برای بهینه‌سازی توپولوژی، تبدیل مسئله به بهینه‌سازی اندازه برای چگالی روی یک دامنه ثابت است. بنابراین روش ذکر شده در بالا می تواند برای مسائل طراحی توپولوژی نیز به کار رود. مشکل عمده پیدا کردن الگوریتم مناسبی است که بتواند برای تعداد زیادی متغیر طراحی به همراه تعداد زیادی قید، مناسب باشد. در این‌جا ما از روش مجانب‌های متحرک (MMA) برای این کار استفاده می‌کنیم. این الگوریتم نشان داده است که بسیار کلی است و برای مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با قیدهای زیاد مناسب است[۳].

روش مجانب های متحرک (MMA) و روش مادر آن (CONLIN) [۸] مشابه روشهایی مثل خطی سازی متوالی(SLP) وتقریب سهموی متوالی(SQP) می باشند که برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار غیر خطی به کار می روند. همه آن‌ها با زیرمسئله‌های تقریبی ساده‌تر کار می‌کنند که این زیرمسئله‌ها برای روش(MMA) و (CONLIN) تفکیک‌پذیر و محدب می‌باشند و براساس مقادیر مشتقات در نقطه تکرار فعلی و تکرار قبلی ساخته می‌شوند. در هر نقطه تکرار، این زیرمسئله توسط روش دوگان حل می‌شود و جواب زیر مسئله به عنوان نقطه تکرار بعدی در نظر گرفته می‌شود. در روش (MMA) تقریب تابع F از n متغیر حقیقی $X=(x_1,\dots,x_n)$ حول نقطه تکرار x^0 به شکل زیر است:

---

[۱] Relaxation

[۲] Barrier Function

[۳] Penalty Function

$$F(x) = r_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_i}{x_i - L_i}\right)$$
$$r_i = F(x^0) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{U_i - x_i^0} + \frac{q_i}{x_i^0 - L_i}\right) \qquad i = 1, \dots, n \tag{۱۱}$$

که مقادیر p_i و q_i به صورت زیر انتخاب می‌شوند.

$$if\ \frac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \quad p_i = (U_i - x_i^0)^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0)\ ,\ q_i = 0$$
$$if\ \frac{\partial F}{\partial x_i} < 0 \quad ,\ p_i = 0\ ,\ q_i = -(x_i^0 - L_i)^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0) \tag{۱۲}$$

پارامترهای U_i و L_i مجانب‌های تقریب‌های F می‌باشند که در پروسه بهینه‌سازی برای هر یک از توابع، بر اساس نتایج به‌دست آمده به روز می‌شوند. به طور خلاصه می توان الگوریتم بهینه‌سازی را به صورت زیر بیان کرد:

گام ۰. انتخاب یک نقطه شروع $X^{(0)}$ و قرار دادن اندیس تکرار برابر صفر $k = 0$.

گام ۱.تولید توابع تقریبی $f_i(x^{(k)})$ و تولید گرادیان های آنها $\nabla f_i(x^{(k)})$ در نقطه تکرار $X^{(k)}$ برای $i = 0,1,\dots,m$.

گام ۲.تولید زیر مسئله $P^{(k)}$ با قرار دادن توابع تقریبی $f_i^{(k)}$ به جای توابع f_i.

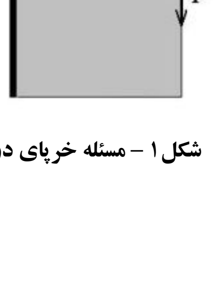
گام۳.حل زیر مسئله $P^{(k)}$ و قرار دادن جواب این زیر مسئله به عنوان نقطه تکرار بعدی $X^{(k+1)}$، قرار دادن $k = k+1$ و رفتن به گام ۱.

۶. مثال‌های عددی

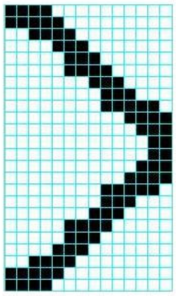
در این بخش جهت نشان دادن کارایی روش مذکور مثال‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در مثال‌های عددی که در این بخش ارائه می‌شوند ضریب توان جریمه $p = 3$ در نظر گرفته شده است. همچنین برای سادگی مدول الاستیسیته و نسبت پواسون را به ترتیب $E = 1N/m^2$ و $\nu = 0.3$ اختیار می‌کنیم. در نتاج نشان داده شده در مثال‌های زیر، المان‌های سیاه شده معرف المان‌های با چگالی یک هستند. یعنی نقاطی که ماده در آن‌ها قرار می‌گیرد. المان‌های سفید به معنی نقاط با چگالی صفر هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود سازه اولیه در مثال‌های زیر از موادی با چگالی بینابین تشکیل شده‌اند که پس از پایان بهینه‌سازی، چگالی المان‌ها به مقادیر صفر و یک یا نزدیک به آن‌ها همگرا شده‌اند و توپولوژ بهینه سازه به دست آمده است.

به عنوان اولین مثال مسئله خرپای دو عضوی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سطح اولیه، شرایط تکیه‌گاهی و شرایط بارگذاری در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. از یک شبکه‌بندی ۱۴×۲۴ جهت تحلیل و بهینه‌سازی استفاده می‌کنیم. مقدار بار وارده و مقدار تنش مجاز به ترتیب $p = 5N$ و $\sigma_l = 20N/m^2$ می‌باشند. شکل نهایی سازه بهینه در شکل (۲) نشان داده شده است.

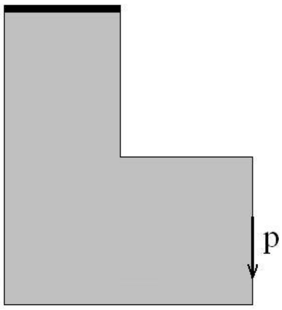
در مثال بعدی سازه ال-شکل را که تحت بار متمرکز قرار دارد بررسی می‌کنیم. هندسه، شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری در شکل (۳) نشان داده شده است. سازه تحت بار $p = 2N$ قرار دارد. شبکه‌بندی با ۸۸۴ المان انجام شده است و تنش مجاز $\sigma_l = 20N/m^2$ در نظر گرفته شده است. سازه نهایی در شکل (۴) ملاحظه می‌شود.



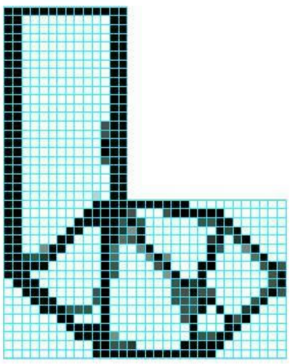
شکل ۱ – مسئله خرپای دو عضوی



شکل ۲ – توپولوژی بهینه خرپای دو عضوی



شکل ۳- سازه ال-شکل تحت بار متمرکز



شکل ٤ – توپولوژی بهینه سازه ال-شکل

۷. نتایج

در این مقاله نوع دیگری از مسئله بهینه‌سازی توپولوژی بیان شد که شامل حداقل سازی وزن سازه با اعمال قید تنش است. از معیار تنش فون میزس برای بیان قید تنش استفاده شد و مقدار توان جریمه کاهش تنش مجاز برابر با ضریب جریمه p به کار گرفته شد.

از روش مجانب‌های متحرک که یک روش برنامه‌ریزی ریاضی است، برای انجام بهینه‌سازی استفاده شده است. همان‌طور که اشاره شد در مسئله با تعداد قیدهای طراحی زیاد، برخلاف مسائل سنتی بهینه‌سازی توپولوژی امکان استفاده از روش‌های معیار بهینگی وجود ندارد. روش برنامه‌ریزی ریاضی مورد استفاده باید قابلیت حل مسئله حجیم با تعداد متغیرهای طراحی و قیود زیاد را داشته باشد. نتایج مثال‌های حل شده نشان دهنده کارایی روش مذکور می‌باشد.

در مسائلی که قید تنش وارد می‌شود مشکل تکینی یا بی‌قاعده شدن فضای طراحی مطرح می‌شود. این مشکل در مسائل طراحی توپولوژی سازه‌های پیوسته باعث ایجاد نقاط خاکستری (نقاط با چگالی بینابین) می‌شود که از نقطه نظر مهندسی چندان مطلوب نمی‌باشند. روش رهاسازی برای حذف المان‌های با چگالی بینابین و غلبه بر مشکل تکینی به کار گرفته شد که مثال‌های حل شده نشان می‌دهد این روش کارایی لازم را داشته است.

۸. مراجع

1.Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N. (1988), “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng.,* **71,** 197-224.

2.Bendsoe, M. P. (1989), “Optimal shape design as a material distribution problem”, *structural optimization.,* **1,** 193-202.

3. Bendsoe, M. P. and Sigmund, O. (2004), “*Topology Optimization, Theory, Methods, and Applications*” Berlin**,** Heidelberg, New York: Springer.

4.Duysinx, P. and Sigmound, O. (1998). “New Development in Handling Stress Constraints in Optimal Material Distributions”, *7th Symposium on Multidiciplinary Analysis and Optimization,* AIAA/USAF/NASA/ISSMO, AIAA-98-4906, pp. 1501-1509.

5.Duysinx, P. and Bendsoe, M. P. (1998) “Topology optimization of continuum structures with local stress constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering.***, 43,** 1453-1478**.**

6. Cheng, G. D. Xu Guo. (1997), “ε-relaxed approach in structural topology optimization”, *Struct optim*., **13,** 258-266.

7. Svanberg, K. (1987), “The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **24.** 359–373.

8. Fleury, C. (1989), “CONLIN**:** an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts”, *Structural Optimization*., **1,** 81-89.