بهینه سازی توپولوژیک لایه تقویتی سازه های صفحه ای با استفاده از قید تنش

بهروز حسنی[1]، حسین قاسم نژاد مقری[2]

۱- دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد عمران، گرایش سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

h.ghassemnezhad@civil.tus.ac.ir

خلاصه

در مسائل متداول بهینه سازی توپولوژی سازه، سختی سازه با در نظر گرفتن قید حجمی حداکثر می شود. در این نوع مسائل، هدف توزیع مقدار مشخصی مصالح در یک دامنه مشخص است، طوری که سخت ترین سازه ممکن برای یک بارگذاری مشخص به دست آید، در حالی که هیچ قید تنش و یا تغییر مکانی در نظر گرفته نمی شود. در مقاله حاضر نوع دیگری از مسئله بهینه سازی توپولوژی مطرح شده است که شامل حداقل کردن وزن سازه، با در نظر گرفتن قید تنش می باشد. از یک روش برنامه ریزی ریاضی به نام مجانب های متحرک برای بهینه سازی استفاده می شود. سازه مورد نظر صفحه خمشی میدلین رایزنر است که محل بهینه قرارگیری لایه تقویتی آن برای بارگذاری های مختلف به دست می آید.

کلمات کلیدی: بهینه سازی توپولوژی، مجانب های متحرک، سازه صفحه ای، لایه تقویتی

۱. مقدمه

بهینه سازی توپولوژی یکی از شاخه های بهینه سازی سازه ای است که به تعیین بهترین چیدمان سازه می پردازد. به عبارت دیگر بهینه سازی توپولوژی تعیین تعداد، مکان و شکل سوراخ های سازه و نحوه ارتباط بین اعضا می باشد. کاربرد عددی ایده توزیع ماده بر اساس مواد همگن شده برای اولین بار توسط (Bendsoe, M.P. & Kikuchi, N. ۱۹۸۸) [۱] انجام شد. در این روش توپولوژی بهینه، از بهینه کردن ابعاد حفره هایی که در مقیاس میکروسکوپی در نظر گرفته شده اند به دست می آید. یعنی بهینه سازی توپولوژی به نوعی بهینه سازی اندازه تبدیل می شود. خواص مکانیکی ماده میکروسلولی توسط روابط همگن سازی به دست می آیند. همچنین روش چگالی متغیر جریمه شده (SIMP) برای تقریب سازی عددی مسائل طراحی ۱-۰ توسط(Bendsoe, M. P. ۱۹۸۹) [۲] ، (Rozvany et, al,۱۹۹۴) [۳] و (Yang, R. j. & Chuang, C.-H. ۱۹۹٤)[۴] مورد استفاده قرار گرفته و تا به حال نیز به طور گسترده مورد استفاده قرار می گیرد.

به علت گسترده بودن فضای طراحی و زیاد بودن تعداد متغیرهای طراحی در مسائل مورد نظر، سعی می شود فرمول بندی روابط مسئله تا حد ممکن ساده باشد و از این رو در بسیاری از مسائل، طراحی به منظور حداقل کردن انرژی ناشی از بارهای اعمال شده (حداکثر کردن سختی کلی سازه) تحت قیدهای ساده انجام شده است. متغیرهای طراحی مسئله بهینه سازی نشان دهنده حضور یا عدم حضور ماده روی دامنه مسئله می باشند. با در نظر گرفتن متغیرهای طراحی پیوسته، متغیر چگالی می تواند مقادیری بین حد بالا ۱ (چگالی پر)و حد پایین نزدیک به ۰ (خالی) را اختیار کند.

در روش چگالی متغیر جریمه شده (SIMP) رابطه بین چگالی موثر ρ وچگالی واقعی ماده ρ_0 توسط یک تابع خطی بیان می شود، در حالی که برای سختی ماده D ، این رابطه، نمایی با $p > 1$ می باشد.

$$\rho = \mu\rho_0$$
$$\mathbf{D} = \mu^p \mathbf{D_0} \tag{۱}$$

به کار بردن p باعث جریمه چگالی های متوسط می شود طوری که آنها را به چگالی تقریبا پر یا خالی تبدیل می کند. با استفاده از روش المان های محدود فرمول بندی مسائل حداقل کردن انرژی بارهای اعمال شده به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}&\min_{\mu} \mathbf{f}^T \mathbf{u}\\&s.t.: \mathbf{K}(D)\mathbf{u} = \mathbf{f}\\&\sum_{i=1}^{n} \mu_i V_i = V\\&0 \le \mu_i \le 1 \quad i = 1,\dots,n\end{aligned}$$

(۲)

f و u به ترتیب بردار بارها و تغییر مکانهای گرهی و K ماتریس سختی سازه می باشند. همچنین μ_i و V_i به ترتیب چگالی و حجم المان i ام هستند. V حداکثر حجمی است که سازه می تواند اختیار کند.

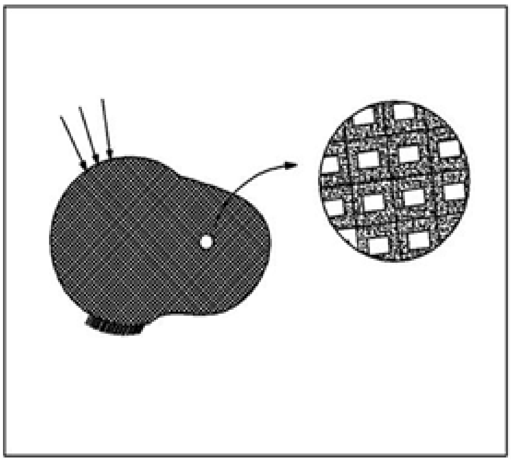
به خاطر کاربرد روش اجزا محدود و تقسیم دامنه طراحی به المان های زیاد، تعداد متغیرهای طراحی در این گونه مسائل زیاد می باشد. به همین خاطر استفاده از روش های برنامه ریزی ریاضی کمی غیر عملی به نظر می رسد. در عوض روش های معیار بهینگی [۵] به طور گسترده در این گونه مسائل استفاده شده است. روش های معیار بهینگی، روش های غیر مستقیم بهینه سازی هستند. برخلاف روش های برنامه ریزی ریاضی که مستقیما تابع هدف را بهینه می کنند، این روش ها تلاش می کنند تا دسته ای از معیارهای مربوط به رفتار سازه را ارضا کنند.

در سال های اخیر دسته ای از روش های برنامه ریزی ریاضی مانند روش مجانب های متحرک(MMA) [۶] در بهینه سازی توپولوژی مورد استفاده قرار گرفته اند. می توان نشان داد که استفاده از تقریب های این روش و حل زیر مسئله ها به کمک روش دوگان به نتایجی مشابه معیار بهینگی می انجامد[۷]. برای حل مسائل حداقل انرژی کرنشی، ممکن است همگرایی این روش کمی کندتر از معیار بهینگی باشد، ولی برای مسائلی که تعداد قیدهای بیشتری دارند، همگرایی آن بسیار عالی خواهد بود[۷].

در مقاله حاضر نوع دیگری از مسئله بهینه سازی توپولوژی مطرح می شود. تابع هدف در این مسئله وزن سازه می باشد که با در نظر گرفتن قید تنش بهینه می شود. سازه مورد نظر یک صفحه میدلین رایزنر است که لایه میکروسلولی روی لایه اصلی آن تعریف می شود. پس از بهینه سازی به کمک الگوریتم مجانب های متحرک توپولوژی لایه تقویتی آن به دست می آید.

۲. معرفی مدل مصالح

ایده اصلی در حل مسائل بهینه سازی توپولوژی معرفی تعداد نامحدودی از حفره های ریز مقیاس برای تشکیل یک ماده متخلخل است. مسئله بهینه سازی طوری تعریف می شود که ابعاد هندسی این حفره ها، متغیرهای طراحی باشند. اگر بخشی از جسم تنها از حفره های ریزساختارها تشکیل شده باشد ماده در آن محدوده جایگزین نخواهد شد. از طرف دیگر اگر هیچ حفره ای در قسمتی از جسم نباشد، ماده در آن قسمت جایگزین می شود.

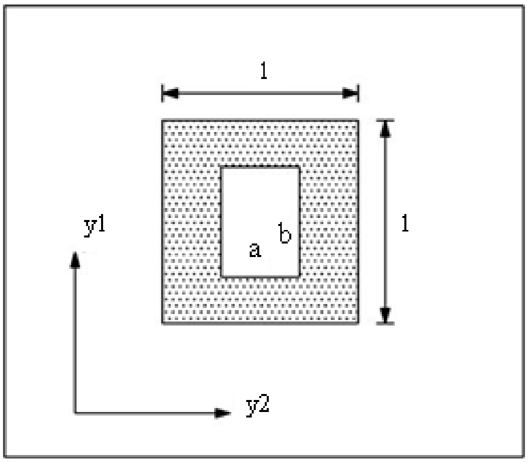


شکل ۱- ریز سلولها با سوراخ های مستطیلی

راههای زیادی برای معرفی ریزسازه ها وجود دارد که آنها را می توان به دو دسته تقسیم نمود. دسته اول ریزسازه های مرکب لایه‌ای(ranked layered material) ودسته دوم میکروسلول ها با حفره های داخلی می باشند. تئوری همگن سازی (Homogenization Theory) برای محاسبه

خواص مکانیکی ماکروسکوپی این مواد به کار می رود. اما راه ساده تری نیز وجود دارد که استفاده از تابع چگالی مصالح مصنوعی است. در این صورت می توان بدون استفاده از معادلات همگن سازی خواص مکانیکی ماکروسکوپی مواد را (با دقت کمتری نسبت به روش همگن سازی) به دست آورد. به این نوع مواد مواد مصنوعی گفته می شود. در این مقاله از مواد مصنوعی با میکرو سلول های حفره دار استفاده می شود.

در انتخاب ریزسازه ها، شکل آنها یکی از مهمترین مسائلی است که باید به آن توجه کرد. شکل انتخاب شده باید به گونه ای باشد که چگالی مواد در ریز سازه بتواند کل مقدار ۰ تا ۱ را پوشش دهد. از طرف دیگر شکل حفره ها بایستی با کمترین تعداد پارامتر تعریف شود تا میزان متغیرهای طراحی در مسئله بهینه سازی به حداقل برسد. سلول های مربعی با حفره های مستطیل شکل در مرکز آنها ساده ترین شکل برای این منظور می‌باشند(شکل ۱).



شکل ۲- سلول واحد مربعی با سوراخ مستطیلی در مرکز در مقیاس میکروسکوپی

شکل۲ سلول واحد را در دستگاه مختصات میکروسکوپی نشان می دهد. با استفاده از این مدل سطح اشغال شده توسط مواد جامد به صورت زیر محاسبه می شود.

$$A_s = \int_A (1-ab)dA \tag{۳}$$

که در این رابطه $0 \le a \le 1$ و $0 \le b \le 1$ و A فضای طراحی و A_s قسمت جامد فضای طراحی را نشان می دهد. هر نقطه $x \in A$ دارای مقادیر a و b می باشد که متغیرهای طراحی بهینه سازی می باشند.

$$a = a(x)\ ,\ b = b(x) \tag{٤}$$

در عمل این توابع به وسیله توابع ثابتی در هر المان از فضای طراحی گسسته سازی شده تقریب زده می شوند و بنا براین ابعاد ریزسازه ها در هر المان ثابت فرض می شود. در نتیجه ماتریس الاستیسیته همگن شده نیز برای هر المان ثابت خواهد بود. بنا براین در فضای دوبعدی اگر دامنه به N المان محدود تقسیم شود، ۲N متغیر طراحی در مسئله بهینه سازی وجود دارد.

با در نظر گرفتن روابط حاکم بر مصالح مصنوعی و استفاده از تابع پیوسته $\mu(x)$ برای توصیف سازه روابط زیر برقرار می باشند:

$$\begin{gathered} \rho(x) = \mu(x)\rho_0 \\ D(x) = \mu(x)D_0 \end{gathered} \tag{۵}$$

که دراین روابط ρ_0 و D_0 به ترتیب چگالی و ماتریس الاستیسیته قسمت جامد همگن می باشند. همچنین $0 \le \mu(x) \le 1$ و $x \in A$ می‌باشد. اگرچه روابط (۵) سبب ساده شدن الگوریتم بهینه سازی می شوند، اما در این حالت جواب سازه بهینه شده دارای نواحی خلل وفرج دار زیادی

است. از نقطه نظر مهندسی حلی که منجر به ایجاد فقط قسمت جامد و یا فقط حفره شود، عملی تر است. از این رو بهتر است که نواحی خلل و فرج دار با استفاده از جریمه ای که به تعلق می گیرد، حذف شوند. در نتیجه روابط (۵) به صورت زیر تغییر می یابد.

$$D(x) = \mu(x)^p D_0$$

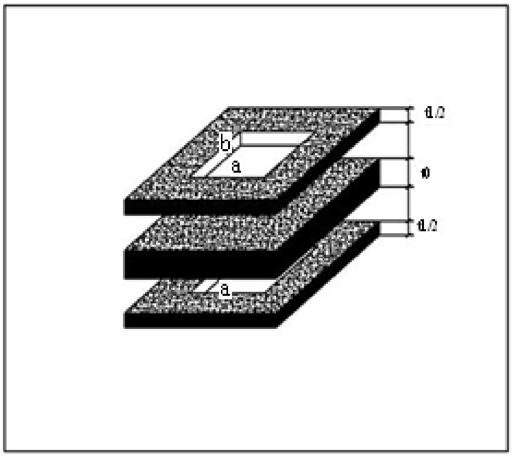
(۶)

که در این رابطه p عامل جریمه و بزرگتر از ۱ می باشد. تابع چگالی مصنوعی μ برای ساختن ریزسازه های مصنوعی با بعضی پارامترهای هندسی در ارتباط است. برای ساختن جسم سلولی شامل سلول های واحد با حفره های مستطیل شکل که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد، $\mu(x)$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\mu(x) = 1 - a(x)b(x)$$

(۷)

با در نظر گرفتن نظریه مونتاژ لایه ها[۸] مدل سلولی شکل ۳ را مورد استفاده قرار می دهیم[۹].



شکل ۳- سلول پایه به همراه لایه تقویتی

در این مدل لایه ایزوتروپیک میانی صفحه اصلی، و لایه های بالایی و پایینی، لایه های تقویتی را تشکیل می دهند؛ که مدل مصالح مصنوعی با حفره های مستطیلی برای آنها به کار رفته است.

با استفاده از تئوری میدلین-رایزنر و استفاده از مدل سلولی فوق ماتریس الاستیسیته خمشی و غشایی به صورت زیر به دست می آیند:

$$D_f = \frac{E(t_0{}^3 + \mu^p t_1{}^3)}{12(1-\upsilon^2)} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\upsilon)/2 \end{bmatrix}$$

$$D_m = \frac{E(t_0 + \mu^p t_1)}{12(1+\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\upsilon)/2 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

۳. تعریف مسئله بهینه سازی

یک قید تنش مناسب برای مدل مصالح مصنوعی باید تا حد ممکن ساده باشد. از طرفی باید از لحاظ فیزیکی سازگار با خصوصیات ریز سازه باشد. در اینجا از قید تنش فن میزز برای مصالح مصنوعی (SIMP) با ضریب جریمه p استفاده می شود[۷].

$$\sigma_{vm} \le \rho^p \sigma_l \quad if \;\; \rho \ge 0 \quad (۹)$$

در رابطه بالا σ_{vm} تنش فن میزز و σ_l **تنش مجاز می باشند.** این قید بیانگر کاهش مقاومت در ماده متخلخل است. این امر موجب کاهش محدوده مقاومت با فاکتور ρ^p می شود. همانطور که مشاهده می شود برای به دست آوردن سختی و قید تنش از توان یکسان استفاده شده است. انتخاب مقدار دیگری برای توان با فیزیک مسئله سازگار نمی‌باشد. [۱۰].

به این ترتیب شکل کلاسیک مسئله حداقل کردن وزن سازه با در نظر گرفتن قید تنش که در تعادل پایدار با نیروهای خارجی است، به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} &\min_{\rho} \ \sum_{e=1}^{N} A_e \rho_e \\ &s.t: \ KU = f \\ &\qquad (\sigma_e)_{vm} < \rho_e{}^p \quad if \ \ \rho > 0 \qquad 0 < \rho_e < 1 \quad e = i, \ldots, N \end{aligned}$$

(۱۰)

در رابطه (۱۰) اندیس e معرف المان می باشد. K، U و f به ترتیب ماتریس تغییر مکان، سختی و نیروهای گرهی می باشند که بیانگر تعادل پایدار در مسئله است. در مسئله فوق می توان تنش را در یک نقطه المان، مثلا گره میانی در نظر گرفت.

۴. روش بهینه سازی

همانطور که پیشتر اشاره شد برای مسائل حداقل انرژی کرنشی از روش های معیار بهینگی استفاده می شود. این روش ها با محدودیت های زیادی از جمله محدود بودن تعداد قید همراه هستند و به همین خاطر نمی توانند در این گونه مسائل به کار آیند. استفاده از برنامه ریزی ریاضی برای حل مسائل بهینه سازی سازه ای اندازه و شکل بسیار متداول می باشد. در این روش ها مسئله طراحی به عنوان مسئله بهینه سازی تنها بر حسب متغیرهای طراحی درنظر گرفته می‌شود و میدان تغییر مکان به صورت تابعی از متغیرهای طراحی بیان می شود. میدان تغییر مکان بر اساس معادلات تعادل به صورت ضمنی بر حسب متغرهای طراحی بیان می شود.

ایده اساسی روش توزیع ماده برای بهینه سازی توپولوژی، تبدیل مسئله به بهینه سازی اندازه برای چگالی روی یک دامنه ثابت است. بنابراین روش ذکر شده در بالا می تواند برای مسائل طراحی توپولوژی نیز به کار رود. مشکل عمده پیدا کردن الگوریتم مناسبی است که بتواند برای تعداد زیادی متغیر طراحی به همراه تعداد زیادی قید، مناسب باشد. در اینجا ما از روش مجانب های متحرک (MMA) [۶] برای این کار استفاده می کنیم. این الگوریتم نشان داده است که بسیار کلی است و برای مسائل بهینه سازی توپولوژی با قیدهای زیاد مناسب است.[۷]

روش مجانب های متحرک (MMA) وروش مادر آن (CONLIN) مشابه روشهایی مثل خطی سازی متوالی(SLP) وتقریب سهموی متوالی(SQP) می باشند که برای حل مسائل بهینه سازی هموار غیر خطی به کار می روند. همه آنها با زیر مسئله های تقریبی ساده تر کار می کنند که این زیر مسئله ها برای روش(MMA) و (CONLIN) تفکیک پذیر و محدب می باشند و بر اساس مقادیر مشتقات در نقطه تکرار فعلی و تکرار قبلی ساخته می شوند. در هر نقطه تکرار این زیر مسئله توسط روش دوگان حل می شود و جواب زیر مسئله به عنوان نقطه تکرار بعدی در نظر گرفته می شود.

در روش (MMA) تقریب تابع F از n متغیر حقیقی $X = (x_1, \ldots, x_n)$ حول نقطه تکرار x^0 به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} &F(x) = r_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_i}{x_i - L_i}\right) \\ &r_i = F(x^0) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{U_i - x_i^0} + \frac{q_i}{x_i^0 - L_i}\right) \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

که مقادیر p_i و q_i به صورت زیر انتخاب می شوند.

$$\begin{aligned} &if \ \frac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \quad p_i = (U_i - x_i^0)^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0) \ , \ q_i = 0 \\ &if \ \frac{\partial F}{\partial x_i} < 0 \quad , \ p_i = 0 \ , \ q_i = -(x_i^0 - L_i)^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0) \end{aligned}$$

(۱۱)

پارامترهای U_i و L_i مجانب های قائم برای تقریب های F می باشند که در پروسه بهینه سازی برای هر یک از توابع، بر اساس نتایج به دست آمده به روز می شوند. به طور خلاصه می توان الگوریتم بهینه سازی را به صورت زیر بیان کرد:

گام ۰. انتخاب یک نقطه شروع $X^{(0)}$ و قرار دادن اندیس تکرار برابر صفر $k = 0$.

گام ۱.تولید توابع تقریبی $f_i(x^{(k)})$ و تولید گرادیان های آنها $\nabla f_i(x^{(k)})$ در نقطه تکرار $X^{(k)}$ برای $i = 0,1,\ldots,m$.

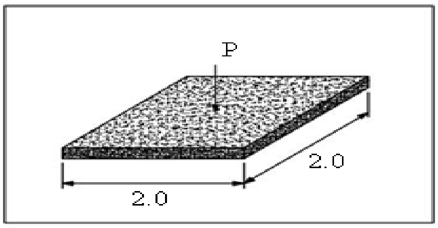
گام ۲.تولید زیر مسئله $P^{(k)}$ با قرار دادن توابع تقریبی $f_i^{(k)}$ به جای توابع f_i.

گام۳.حل زیر مسئله $P^{(k)}$ و قرار دادن جواب این زیر مسئله به عنوان نقطه تکرار بعدی $X^{(k+1)}$، قرار دادن $k = k+1$ و رفتن به گام ۱.

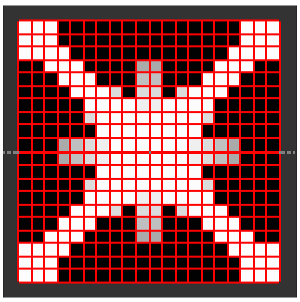
۵. مثال ها

در مثال های زیر سازه صفحه خمشی میدلین رایزنر با تکیه گاههای ساده با ابعاد ۲×۲ مورد بررسی قرار می گیرد.همه واحدهابر حسب متر وکیلوگرم می باشند. ضخامت لایه میانی و لایه تقویتی برابر۰.۰۱می‌باشد. از المان خمشی مربعی ۹ گرهی برای تحلیل استفاده شده است و تنش های گره میانی هر المان معادل تنش آن المان قرار گفته است. مدول الاستیسته و ضریب پواسون به ترتیب $E = ۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ و $\upsilon = ۰.۳$ و تنش مجاز برابر $\sigma = ۲۴۰۰۰۰۰۰$ در نظر گرفته شده اند. همچنین ضریب پنالتی برای مصالح مصنوعی برابر $\mu = ۴$ می باشد. نواحی سفید شده بیانگر نقاط تقویت شده هستند که ماده در آنها قرار گرفته است.

در اولین مثال یک بار متمرکز برابر $P = ۵۰۰۰$ در مرکز صفحه وارد شده است(شکل ۴). در شکل ۵ محل بهینه قرارگیری لایه تقویتی مشاهده می‌شود. شکل ۶ نمودار تکرار و همگرایی را نشان می دهد. وزن بهینه سازه با در نظر گرفتن لایه تقویتی بعد از ۱۵ تکرار برابر ۷.۲۷ به دست آمده است.

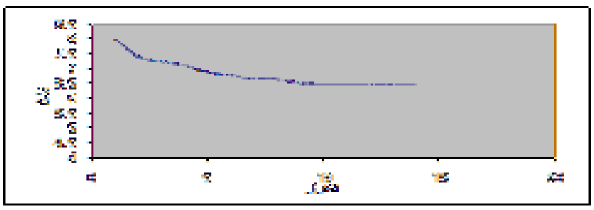


شکل ٤- صفحه مربعی با بار متمرکز در مرکز

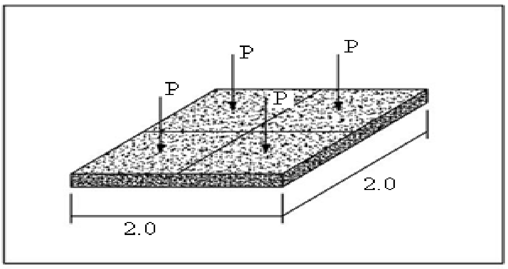


شکل ۵-محل بهینه لایه تقویتی صفحه مربعی با بار متمرکز

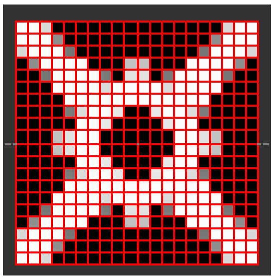
در مثال بعدی چهار بار مساوی $P = ۵۰۰۰$ به صورت متقارن در مرکز قسمت های یک چهارم وارد شده اند (شکل ۷). شکل های ۸ و ۹ به ترتیب شکل نهایی لایه تقویتی و روند همگرایی را نشان می دهند. وزن بهینه سازه بعد از ۱۴ تکرار برابر ۷.۷۲ به دست آمده است.



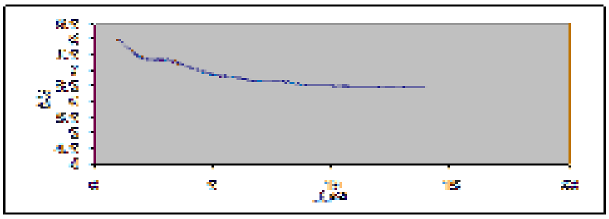
شکل٦-نمودار همگرایی صفحه مربعی با بار متمرکز



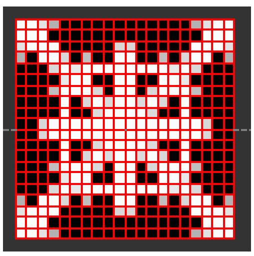
شکل٧-صفحه مربعی با چهار بار متمرکز



شکل٨- محل بهینه لایه تقویتی صفحه مربعی با چهار بار متمرکز

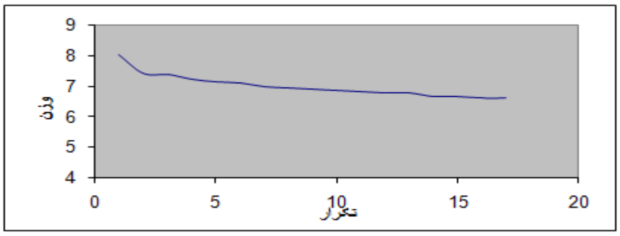


شکل٩- نمودار همگرایی صفحه مربعی با چهار بار متمرکز



شکل١٠- محل بهینه لایه تقویتی صفحه مربعی با بار گسترده یکنواخت

در نهایت سازه تحت یک بار گسترده یکنواخت قرار می گیرد. وزن بهینه سازه بعد از ۱۷ تکرار برابر ۷.۷۸ به دست آمده است. شکل نهایی لایه تقویتی و روند همگرایی در شکل های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده اند.



شکل ۱۱- نمودار همگرایی صفحه مربعی با بار گسترده یکنواخت

۶. نتیجه گیری

در این مقاله نوع دیگری از بهینه سازی توپولوژی سازه ای مورد بررسی قرار گرفته است که شامل حداقل کردن وزن سازه به جای حداکثر کردن سختی است. اگرچه تابع هدف در این گونه مسائل نسبت به حالت معمول ساده تر است، ولی مسئله بهینه سازی به دلیل زیاد بودن تعداد قید مشکل تر می باشد. در عوض در این روش تعبیر فیزیکی بیان مسئله بهینه سازی از نقطه نظر مهندسی به خاطر وجود قید های تنش مناسب تر می باشد. جواب های مثال های حل شده از نقطه نظر مهندسی نسبت به حالت متداول منطقی تر به نظر می رسند. تعداد تکرارها به خاطر استفاده از الگوریتم مناسب، بسیار کمتر از روش معیار بهینگی است.

۷. قدردانی

از جناب پروفسور K.Svanberg به خاطر در اختیار قرار دادن کد بهینه سازی، کمال تشکر را دارم.

۸. مراجع

۱. Bendsoe, M.P. & Kikuchi, N. (۱۹۸۸). "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* ۷۱(۲): ۱۹۷-۲۲٤.

۲. Bendsoe, M. P. (۱۹۸۹). "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem," *Structural Optimization* ۱: ۱۹۳-۲۰۲.

۳. Rozvany, G. I. N., Zhou, M. Sigmund, O. (۱۹۹٤). "Topology Optimization in Structural Design", in H.Adeli (ed.), *Advances in Design Optimization*, Chapman and Hall, London, chapter ۱۰, pp. ۳٤۰-۳۹۹.

٤. Yang, R. j. & Chuang, C.-H. (۱۹۹٤). "Optimal Topology Design Using Linear Programming", *Computer and Structures* ٥۲(۲): ۲٦٥-۲۷٦.

٥. Rozvany, G. I. N. (۱۹۸۹). "*Structural Design via Optimality Criteria",* Khwer Academic Publishers Group, Dordrecht. Boston. London.

٦. Svanberg, K. (۱۹۸۷). The Method of Moving Asymtote – A New Method for Structural Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ۲٤: ۳٥۹-۳۷۳.

۷. Bendsoe, M. P. & Sigmound, O. (۲۰۰۳) "*Topology Optimization – Theory, Methods and Applications*", New York Berlin Heidelberg.

۸. Zuzuki, K. & Kikuchi, N. (۱۹۹۱). "Generalized Layout Optimization of Three Dimensional Shell Structures, in *Geometric Aspects of Industrial Design*, edited by Komkov V. SIAM.

۹. Hassani, B. & Hinton, E. (۱۹۹۹). *"Homogenization and Structural Topology Optimization – Theory, Practice and Software"*, Springer, New York Berlin Heidelberg.

۱۰. Duysinx, P. & Sigmound, O. (۱۹۹۸). "New Development in Handling Stress Constraints in Optimal Material Distributions", ۷th *Symposium on Multidiciplinary Analysis and Optimization,* AIAA/USAF/NASA/ISSMO, AIAA-۹۸-٤۹۰٦, pp. ۱٥۰۱-۱٥۰۹.