

تعیین ضریب تمرکز تنش مود کششی شکستگی‌های سنگ با استفاده از روش بدون مش گالرکین و برون‌یابی جابجائی

حسین میرزائی نصیرآباد^۱، رضا کاکائی^۲، بهروز حسنی^۳

۱- دانشجوی دکتری معدن، دانشکده مهندسی معدن و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، hm_nasr@yahoo.com

۲- استادیار دانشکده مهندسی معدن و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود،

۳- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود،

چکیده

در تحلیل مسائل مکانیک شکست تعیین ضریب تمرکز تنش امری ضروری بوده و عموماً با استفاده از یک روش عددی محاسبه می‌شود. در این مقاله با استفاده از روش عددی بدون مش گالرکین و در محدوده رفتار ارتجاعی خطی، ضریب تمرکز تنش مود کششی شکستگی‌های سنگ با استفاده از روش برون‌یابی جابجائی تعیین شده است. برای مدلسازی درزه‌ها با استفاده از روش بدون مش گالرکین، از معیار قابلیت دید و برای اعمال شرایط مرزی از ضرایب لاگرانژ استفاده گردید. برای ارزیابی روش بدون مش گالرکین و روش برون‌یابی جابجائی، ضریب تمرکز تنش در نمونه حاوی درزه افقی تحت بارگذاری کششی محاسبه و مورد بحث قرار گرفت. جواب روش برون‌یابی جابجائی با ۲/۶٪ اختلاف نسبت به روش تحلیلی از دقت بسیار خوبی برخوردار است. مقایسه نتایج روش بدون مش گالرکین با روش تحلیلی و روش المان محدود مبین اینست که این روش از دقت بالایی برخوردار بوده و می‌تواند به عنوان یک ابزار کلیدی در حوزه مکانیک شکست سنگ بکار گرفته شود.

کلمات کلیدی: روش بدون مش گالرکین، ضریب تمرکز تنش، برون‌یابی جابجائی، مکانیک شکست سنگ، مود کششی

Determination the Tension Mode Stress Intensity Factor in Jointed Rock Medium Using Element Free Galerkin and Displacement Extrapolation Methods

Hossein Mirzaei, Reza Kakaie, Behroz Hassani

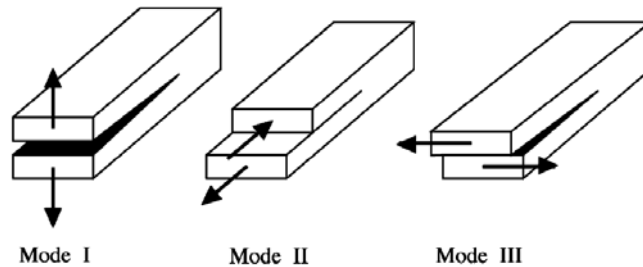
Abstract

in fracture mechanics studies, determination of stress intensity factor is the essential work. This factor is commonly calculated by a numerical method. in this paper the Element Free Galerkin method based on the linear elastic fracture mechanics was used to determine tension-mode stress intensity factor in jointed rock medium using displacement extrapolation method. The visibility criterion was applied to model the rock fractures and Lagrange multipliers method was employed to enforce the boundary conditions. to verify the computational capability and accuracy of the method, an example of jointed sample including horizontal joint was considered under tension load and the stress intensity factor was determined and evaluated. The displacement extrapolation method with %2.6 difference in comparison with analytical method has high precision. Comparison of the results indicates that element free Galerkin method is accurate and can be used as a key tool in rock fracture.

Keywords: Element Free Galerkin method, Stress intensity factor, displacement extrapolation method, Rock fracture mechanics.

۱- مقدمه

در مقیاس مهندسی توده سنگ از مجموعه ماده سنگ و انواع ناپیوستگی‌ها نظیر درزه‌ها، صفحات لایه‌بندی، ریزترک‌ها و... تشکیل شده است که در مکانیک شکست سنگ به ناپیوستگی‌های مذکور، شکستگی اطلاق می‌شود. پایداری یک محیط سنگی درزه‌دار تحت انواع بارگذاری‌ها به انتشار یا عدم انتشار شکستگی‌های آن بستگی دارد. بسته به نوع بارگذاری و هندسه شکستگی‌های سنگ، یک شکستگی به صورت یکی از سه مود اصلی و یا ترکیبی از آنها گسترش می‌یابد. مود اول، مود بازشدگی یا کششی است که سطوح ترک یا شکستگی در راستای عمود بر صفحه آن جدا می‌شوند؛ مود دوم، مود لغزشی یا برشی است که سطوح ترک نسبت به هم در جهت عمود بر خط نوک ترک می‌لغزند و مود سوم، مود پارگی است که سطوح ترک در جهتی به موازات خط پروفیل آن می‌لغزند. در شکل (۱) سه مود انتشار ترک نشان داده شده است [۱]. وقتی محیط سنگی درزه‌دار تحت بارگذاری قرار می‌گیرد، در نوک شکستگی‌های آن تمرکز تنش بوجود آمده و بسته به میزان تمرکز تنش و میزان استحکام شکست سنگ، ممکن است شکستگی‌ها در مودهای مختلف گسترش یافته و با اتصال آن‌ها محیط سنگی گسیخته شود. تمرکز تنش در نوک درزه با ضریب تمرکز تنش بیان می‌شود. ضریب تمرکز تنش یکی از مهمترین پارامترهای مکانیک شکست بوده و قادر است میدان و توزیع تنش را در حوالی نوک ترک برحسب بار اعمالی و اندازه و شکل ترک بیان نماید. روش‌های موجود برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش به سه دسته: روش‌های تجربی، روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی تقسیم می‌شوند. روش‌های تجربی مثل فتوالاستیسیته و کالیبراسیون نرمی معمولاً پر هزینه و زمان‌بر بوده و فقط به نمونه‌های ساده از نظر هندسی و بارگذاری قابل اعمال است. روش‌های تحلیلی نیز فقط در مدل‌هایی با هندسه و بارگذاری ساده توسعه داده شده‌اند [۳،۲]. بنابراین در مدل‌های با هندسه و بارگذاری پیچیده عمدتاً از روش‌های عددی نظیر روش المان محدود و المان مرزی استفاده می‌شود [۵،۴]. روش‌های المان محدود و المان مرزی در برخورد با مسائل مکانیک شکست با مشکلاتی درگیر هستند که به ماهیت مش‌بندی آن مربوط می‌شود. در مدل‌سازی انتشار ترک با مرزهای متحرک در صورت استفاده از این روش‌ها به



شکل ۱- سه مود اصلی انتشار ترک [۱]

خاطر تغییرات ژئومتری، مش‌بندی مکرر لازم است که هم هزینه محاسباتی خیلی بالایی دارد و هم در انتقال متغیرهای حالت از مش قدیم به مش جدید مشکلات عدیده بوجود می‌آید. برای غلبه بر این مشکلات، روش‌های بدون مش متعددی نظیر هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده^۱، روش ذره‌ای تولید مجدد کرنل^۲، روش بدون مش گالرکین^۳، روش بدون مش محلی پترو گالرکین^۴ و... توسعه داده شده است [۷،۶]. جنبه مشترک همه روش‌های بدون مش این است که متغیرهای میدان را بطور داخلی بر مبنای تعدادی از گره‌های گسسته ارزیابی می‌کنند و به اتصالات از پیش تعریف شده گره‌ها نیاز ندارند. برای محاسبه ضریب تمرکز تنش با یک روش عددی، ابتدا میدان تنش‌ها و جابجائی‌ها در حوالی نوک ترک تعیین شده و ضریب تمرکز تنش

^۱Smooth Particle Hydrodynamic^۲Reproducing Kernel Particle Method^۳Element Free Galerkin Method (EFGM)^۴Meshless Local Petrov-Galerkin

محاسبه می‌گردد. برای محاسبه ضریب تمرکز تنش از روش‌های مستقیم نظیر برون‌یابی تنش و برون‌یابی جابجایی و روش‌های غیر مستقیم نظیر انتگرال L ، انرژی گریفیت و مشتق سختی استفاده می‌شود [۱،۴]. در این مقاله با استفاده از روش بدون مش گالرکین و با روش برون‌یابی جابجایی، ضریب تمرکز تنش مود کششی شکستگی‌های سنگ محاسبه می‌گردد. سپس با در نظر گرفتن یک مثال، نتایج روش بدون مش گالرکین و برون‌یابی جابجایی با نتایج روش تحلیلی و روش المان محدود مقایسه می‌گردد.

۲- روش بدون مش EFGM

روش EFG یکی از متداول‌ترین روش‌های بدون مش است. این روش اساساً دو جنبه دارد: ساختن تقریب بدون مش با استفاده از تکنیک حداقل مربعات متحرک (MLS) و تقریب عددی معادلات حاکم با فرمول بندی مرتبه پائین گالرکین. فرمول بندی روش EFG بر اساس فرمول بندی بلیچکو و همکارانش [۸] بصورت زیر است:

۲-۱- تقریب MLS

اگر $u(x)$ متغیر میدان در حوزه Ω و u^h تقریب محلی آن باشد، طبق مطالعات لنکستر و همکارانش [۸]، تقریب محلی u^h به صورت ضرب داخلی بردار چند جمله‌ای پایه $P(x)$ و بردار ضرایب $a(x)$ بیان می‌شود:

$$u^h = P^T(x).a(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x)a_j(x) \quad (1)$$

m تعداد جمله‌ها در توابع پایه چند جمله‌ای است. در مسائل دو بعدی عموماً توابع پایه خطی $P^T = (1, x, y)$ استفاده می‌شود. اگر مقادیر $x_i, i = 1, \dots, n$ در مجموعه‌ای از گره‌ها معلوم باشد، بردار $a(x)$ را با مینیمم کردن نرم خطای L_2 گسسته و وزن‌دار می‌توان بدست آورد. نرم خطای L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) [u^h(x_i) - u_i]^2 \quad (2)$$

که $w(x - x_i)$ تابع وزن است که در حوزه تاثیر گره i تعریف می‌شود، u_i مقدار گرهی در نقطه x_i و n تعداد گره‌ها در حوزه تاثیر نقطه x است. تابع وزن نقش تاثیر گرهی را دارد و در تقریب MLS نقش مهمی بازی می‌کند. یکی از توابع وزنی که در مطالعات استفاده می‌شود، تابع cubic spline می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود [۹].

$$w(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{for } s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{for } \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & \text{for } s \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

که پارامتر وزن S فاصله نرمالیزه شده است: $s = \frac{|x - x_i|}{r_0}$ (r_0 شعاع حوزه تاثیر است). ثابت بودن J نسبت به $a(x)$ به حل $a(x)$ می‌انجامد:

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)u \quad (4)$$

$$[A(x)]_{IJ} = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) p_I(x_i) p_J(x_i), \quad I, J = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$[B(x)]_{IJ} = w(x, x_j) p_I(x_j), \quad J = 1, 2, \dots, n, \quad I = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (7)$$

A معمولاً ماتریس ممان نامیده می‌شود. با جایگزینی $a(x)$ در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (8)$$

تابع شکل $\phi_i(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} \quad (9)$$

توجه شود که تابع شکل بدست آمده شرایط دلتای کرونگر را تامین نمی‌کند ($\phi_i(x_j) \neq 0$ و $\phi_i(x_i) \neq 1$).

۲-۲- فرم مرتبه پائین گالرکین برای مسائل الاستوستاتیک

معادلات حاکم بر مسائل الاستوستاتیک در دامنه Ω که با مرز Γ محدود شده است، به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

با شرایط مرزی:

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (11)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (12)$$

که σ تانسور تنش، b نیروهای حجمی، \bar{u} جابجائی داده شده در مرز Γ_u ، \bar{t} نیروی سطحی داده شده در مرز Γ_t و n بردار نرمال رو به بیرون مرز مسئله است.

با اعمال شرایط مرزی اساسی با استفاده از ضرایب لاگرانژ $[\lambda]$ ، فرم مرتبه پائین معادله تعادل به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s v^T) : \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta v^T \cdot b \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v^T \cdot \bar{t} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta v^T \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta v^T \cdot \lambda \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta v \in H^1, \delta \lambda \in H^0 \quad (13)$$

که δv تابع آزمون، λ ضرایب لاگرانژ، H^1 و H^0 به ترتیب فضای هیلبرت مرتبه صفر و یک هستند. معادله فوق معادله تعادل (۱۰) و شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) را اقتناع می‌کند.

برای بدست آوردن معادلات گسسته از معادله مرتبه پائین (۱۳)، راه حل تقریبی u و تابع آزمون δv طبق معادله (۸) ساخته شده و به همراه توابع درونیاب لاگرانژ در معادله (۱۳) جایگزین می‌شوند. معادلات گسسته نهایی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ماتریس‌ها و بردارها در معادله فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[K]_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j \, d\Omega \quad (15)$$

$$G_{ik} = - \int_{\Gamma_u} \phi_i N_k \, d\Gamma \quad (16)$$

$$f = \int_{\Omega} \Phi_t b \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi_t \bar{t} \, d\Gamma \quad (17)$$

$$q = - \int_{\Gamma_u} N_k \bar{u} \, d\Gamma \quad (18)$$

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$N_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \text{for plane stress} \quad (21)$$

که E و ν بترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مواد مورد نظر هستند. با حل معادله (۱۴)، بردار u (مقادیر جابجایی در گره‌ها) بدست می‌آید و با استفاده از مقادیر جابجایی‌ها مولفه‌های تنش محاسبه می‌شوند.

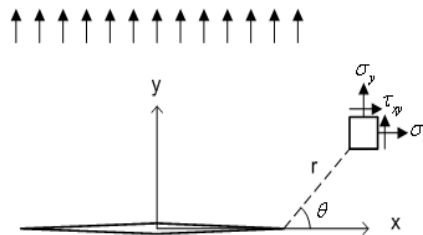
۳- تعیین ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی جابجایی

در روش برون‌یابی جابجایی، ضریب تمرکز تنش (K_I) با برون‌یابی مولفه قائم جابجایی در صفحه پشت ترک بدست می‌آید. بعنوان مثال صفحه کششی حاوی ترک مرکزی (شکل ۵) در نظر گرفته شده و نحوه بکارگیری روش برون‌یابی جابجایی توضیح داده می‌شود. در نمونه نشان داده شده در شکل و در المانی بفاصله r و با زاویه θ نسبت به صفحه ترک، مولفه‌های جابجایی را می‌توان از روابط تحلیلی زیر بدست آورد [۱۰].

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$
(۲۲)

در روابط بالا r و θ مختصات قطبی المان، u و v مولفه‌های جابجایی، σ بار کششی اعمال شده، a نصف طول ترک، μ ضریب ارتجاعی برشی و ν ضریب پواسون می‌باشد.



شکل ۲: ترک در یک صفحه به ابعاد بی‌نهایت تحت بار کششی یکنواخت [۱۰].

در $\theta = \pi$ یعنی خط پشت ترک، مولفه قائم جابجایی (v) به صورت زیر خواهد بود:

$$v(r) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (2 - 2\nu)$$
(۲۳)

در نتیجه خواهیم داشت:

$$K_I^* = v(r) \cdot \left(\frac{\mu}{2 - 2\nu} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{r}}$$
(۲۴)

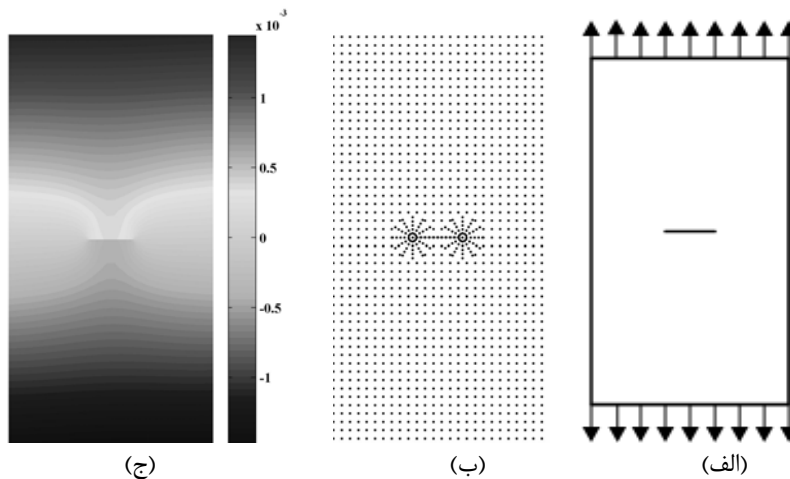
اکنون اگر جابجایی v در خط پشت ترک یعنی $\theta = \pi$ معلوم باشد، می‌توان با استفاده از معادله (۲۴) ضریب تمرکز تنش را با برون‌یابی منحنی تغییرات K_I^* برحسب r در نقطه $r=0$ محاسبه نمود.

۴- ارزیابی روش بدون مش گالرکین

برای ارزیابی مدلسازی محیط‌های درزه‌دار با روش بدون مش گالرکین و محاسبه ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی جابجایی، نمونه حاوی درزه افقی تحت بارگذاری کششی قرار داده شد و ضریب تمرکز تنش در نوک درزه با برون‌یابی جابجایی محاسبه و نتایج آن با نتایج روش تحلیلی و مدل المان محدود مقایسه گردید. برای انجام محاسبات مورد نیاز در محیط MATLAB برنامه‌های لازم تهیه و استفاده شدند. در این مثال نمونه‌ای سنگی به ابعاد 200×100 میلی‌متر مربع که در مرکز آن درزه‌ای افقی به طول ۲۴ میلی‌متر قرار دارد، مطابق شکل (۳- الف) در نظر گرفته شد و از دو طرف تحت تنش کششی ۱ مگاپاسکال قرار گرفت. ضریب الاستیسیته و پواسون این نمونه بترتیب برابر $72/4$ گیگاپاسکال و $0/3$ می‌باشد.

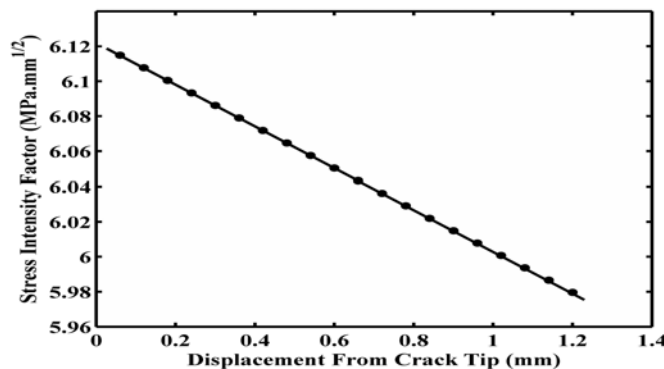
۴-۱- محاسبه ضریب تمرکز تنش با استفاده از روش برون‌یابی جابجایی

برای تعیین ضریب تمرکز تنش با روش بدون مش گالرکین، ۱۴۲۶ گره در دامنه مسئله توزیع شد (شکل ۳- ب). همانطور که توضیح داده شد برای تعیین ضریب تمرکز تنش بایستی مولفه قائم جابجایی (۷) در دامنه مسئله تعیین گردد. با استفاده از مدل بدون مش گالرکین این مولفه تعیین و در شکل (۳- ج) نشان داده شده است.



شکل ۳- (الف) هندسه نمونه حاوی درزه افقی مرکزی که تحت کشش قرار گرفته است. (ب) نحوه توزیع گره‌ها در دامنه مسئله (ج) مولفه قائم جابجایی (۷) در دامنه مسئله

همانطور که اشاره شد برای محاسبه ضریب تمرکز تنش مود I، نتایج مدل بدون مش گالرکین (K_I^*) به صورت تابعی از فاصله از نوک ترک در خط پشت ترک تعیین شده و با استفاده از رگرسیون خطی بهترین خط بر این داده‌ها رسم می‌گردد. از تقاطع این خط با محور قائم مختصات ضریب تمرکز تنش بدست می‌آید. شکل (۴) روش برون‌یابی جابجایی را نشان می‌دهد. با استفاده از این روش ضریب تمرکز تنش برابر با $6.124 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ بدست می‌آید.



شکل ۴- تعیین ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی جابجایی

۲-۴- محاسبه ضریب تمرکز تنش با استفاده از روش تحلیلی و روش المان محدود با استفاده از رابطه تحلیلی موجود برای صفحه تحت کشش با ترک مرکزی، مقدار ضریب تمرکز تنش (K_I) را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود [۱۰]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2} \quad (25)$$

$$K_I = (1) \sqrt{12\pi} \left(\frac{100}{12\pi} \tan \frac{12\pi}{100} \right)^{1/2} = 6.29 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$$

جاوید راد با استفاده از مدل المان محدود و با دو روش برون‌یابی جابجائی‌ها و برون‌یابی تنش‌ها این مثال را حل کرده است [۱۰]. مقدار ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی مولفه تنش σ_y ، عددی حدود ۶ و با برون‌یابی مولفه قائم جابجائی حدود ۶/۶ بدست آمده است.

۳-۴- مقایسه نتایج روش برون‌یابی جابجائی با EFGM با نتایج روش تحلیلی و روش المان محدود در جدول (۱) جواب روش برون‌یابی جابجائی با روش بدون مش گالرکین با جواب روش تحلیلی و روش‌های برون‌یابی جابجائی و برون‌یابی تنش با روش المان محدود مقایسه شده است..

جدول ۱- مقدار ضریب تمرکز تنش بدست آمده از روش‌های مختلف

روش	روش تحلیلی	برون‌یابی جابجائی با روش بدون مش گالرکین	برون‌یابی جابجائی با روش المان محدود	برون‌یابی تنش با روش المان محدود
$K_I (MPa \cdot \sqrt{\text{mm}})$	۶/۲۹	۶/۱۲	۶/۶	۶

جواب برون‌یابی جابجائی با روش بدون مش گالرکین با روش تحلیلی حدود ۲/۶٪ اختلاف دارد. این اختلاف ناچیز نشانگر دقت بالای مدل بدون مش گالرکین و روش برون‌یابی جابجائی است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای تعیین ضریب تمرکز تنش مود کششی شکستگی‌های سنگ تحت بارگذاری محوری، از روش بدون مش گالرکین و برون‌یابی جابجائی استفاده شد. بدین منظور ابتدا بردار جابجائی و تانسورهای تنش و کرنش با مدل بدون مش گالرکین در دامنه مسئله تعیین و سپس روش برون‌یابی جابجائی بکار گرفته شد. از آنجائیکه روش بدون مش گالرکین فقط بر مبنای تعدادی از گره‌های گسسته فرمول‌بندی می‌شود و به اتصالات از پیش تعریف شده گره‌ها نیاز ندارد، لذا در مقایسه با روش المان محدود نسبت به مراحل مدل‌سازی و تغییرات آن از انعطاف بالایی برخوردار است. همانطور که ملاحظه شد برای مدل در نظر گرفته شده در حوالی نوک ترک گره‌ها بصورت شعاعی و در سایر نقاط بصورت شبکه مربعی توزیع شدند. بنابراین مدل‌سازی مسائل مکانیک شکست با روش بدون مش گالرکین نسبت به روش المان محدود به مراتب راحت‌تر می‌باشد. ارزیابی نتایج روش‌های مختلف محاسبه ضریب تمرکز تنش نشان داد که جواب روش برون‌یابی جابجائی با حدود ۲/۶٪ خطا در مقایسه با روش تحلیلی از دقت بالایی برخوردار است مقایسه نتایج روش بدون مش گالرکین با روش تحلیلی و روش المان محدود مبین این است که این روش از دقت بالایی برخوردار بوده و می‌تواند به عنوان یک ابزار کلیدی در حوزه مکانیک شکست سنگ بکار گرفته شود.

۶- مراجع

- [1] Chang, S.H., Lee, C.I., and Jeon, S.; 2002; "*Measurement of rock fracture toughness under modes I and II and mixed-mode conditions by using disc-type specimens*", Engineering Geology, Vol. 66, pp. 79-97.
- [2] Sanford, R. J.; 2003; "*Principle of Fracture Mechanics*", First edition, Prentice Hall, inc., USA.
- [۳] فاجار، رحمت الله؛ (۱۳۸۱)؛ *مقدمه‌ای بر مکانیک شکست*؛ انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی؛ تهران؛ جلد اول.
- [4] Banks-Sills, L., and Sherman, D.; 1986; "*Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements*", international Journal of Fracture, Vol. 32, pp. 127-140.
- [5] Shen, B.; 1993; "*Mechanics of fractures and intervening bridges in hard rock*", Doctoral thesis, Royal institute of Technology, Stockholm, Division of Engineering Geology.
- [6] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P.; 1996; "*Meshless methods: an overview and recent developments*", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 139, pp. 3-47.
- [7] Li, S., and Liu, W. K.; 2002; "*Meshfree and particle methods and their applications*", Appl Mech Rev, Vol. 55, no 1, pp. 1-34.
- [8] Belytschko, T., Lu Y.Y., Gu, L.; 1994; "*Element-free Galerkin methods*", int. J. Numer. Methods Engrg., Vol. 37, pp. 229-256.
- [9] Brighenti, R.; 2005; "*Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture mechanics problems*", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 72, pp. 2808-2820.
- [۱۰] جاویدراد، فرهاد؛ (۱۳۸۳)؛ *مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی*؛ انتشارات صنایع هوا فضا؛ تهران؛ چاپ اول.