



توسعه روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای مسایل مکانیک جامدات

محمد نیسی پور^۱، هادی افشار^۲، بهروز حسنی^۳، علی رحمانی فیروزجایی^۴

تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی عمران

E-mail: m_naisipour@civileng.iust.ac.ir

خلاصه

در این مقاله روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای مواجهه با مسایل مکانیک جامدات توسعه یافته است. در این روش محدوده مساله بوسیله یک سری نقاط گرهی گسسته‌سازی می‌شود. این نقاط گرهی برای تشکیل توابع شکل با استفاده از درونیاب حداقل مربعات متحرک، به کار می‌روند. علاوه بر نقاط گرهی تعدادی نقاط کمکی به نام نقاط هم مکان که می‌توانند مستقل از نقاط گرهی باشند، برای تشکیل باقیمانده کلی مساله به کار می‌روند. تکنیک حداقل مربعات بوسیله حداقل کردن مجموع باقیمانده‌ها در نقاط هم مکان، منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات گسسته می‌شود. ماتریس ضرایب این دستگاه، متقارن بوده و در نتیجه با روش‌های کارا و سریع قابل حل می‌باشد. همچنین، شرایط مرزی به راحتی با روش پناستی اعمال می‌شوند. از آنجاییکه این روش هیچ نیازی به شبکه‌بندی ندارد، می‌توان گفت که به طور کامل یک روش بدون شبکه است. مسایل حل شده در این بررسی نشان می‌دهند که روش حداقل مربعات گسسته، پایدار بوده و از کارایی و دقت بالایی برخوردار است.

کلمات کلیدی: بدون شبکه، روش حداقل مربعات متحرک، روش حداقل مربعات گسسته، مکانیک جامدات

مقدمه

هم اکنون روش‌های بدون شبکه به ابزاری مهم در انجام محاسبات مکانیک جامدات تبدیل شده‌اند. این روش‌ها به دنبال راهی برای حذف شبکه و پیوستگی درجه بالای توابع شکل می‌باشند. تلاش‌های پژوهشی و عملی بسیاری در توسعه روش‌های بدون شبکه صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به مواردی همچون هیدرودینامیک ذره هموار (SPH) [۱]، روش گالرکین بدون جزء (EFG) [۲ و ۳]، روش ذره کرنل بازتولید کننده (RKP) [۴]، روش نقطه محدود (FP) [۵]، روش ابرهای hp [۶]، روش Petrov-Galerkin موضعی بدون شبکه (MLPG) [۷-۱۰]، روش بدون شبکه حداقل مربعات (LSCM) [۱۱]، و روش حداقل مربعات نقطه وزنی (PWLS) [۱۲] اشاره کرد.

در زمینه روش‌های بدون شبکه برای حل مسایل مکانیک جامدات، Krysl و Belytschko [۱۳] روش گالرکین بدون جزء (EFGM) را برای تحلیل صفحات نازک به کار گرفتند؛ و همکاران Onate [۱۴] یک تکنیک پایداری را با معرفی پارامترهای جدید در معادلات حاکم و شرایط مرزی کششی پیشنهاد کردند؛ و همکاران Kwon [۱۵] یک روش بدون شبکه حداقل مربعات را برای حل مسایل الاستیک خطی ارائه کردند؛ و همکاران Zhang [۱۶] یک روش بدون شبکه حداقل مربعات وزنی (MWLS) را برای حل مسایل الاستو-استاتیک پیشنهاد کردند؛ و همکاران Alturi و همکاران Petrov-Galerkin موضعی بدون شبکه (MLPG) [۷]، روش نقاط هم مکان ترکیبی MLPG [۹] و روش تفاضل محدود ترکیبی MLPG را برای مکانیک جامدات پیشنهاد کردند.

یک روش کاملاً بدون شبکه بر اساس راهکار حداقل مربعات، روش حداقل مربعات گسسته نقاط هم مکان (CDLS)، برای حل معادله پواسون پیشنهاد شد [۱۷] که برای برآورد خطا و نظریه تطبیقی (adaptive refinement) [۱۸] ارائه شده بود. در روش CDLS حاضر، میدان محاسباتی مساله توسط نقاط گرهی پراکنده، گسسته سازی شده است. نقاط گرهی برای ایجاد باقیمانده‌های کل مساله به کار رفته‌اند. تکنیک حداقل مربعات برای حل مساله توسط به حداقل رساندن مجموع باقیمانده‌ها برای نقاط هم مکان به کار رفته است. به دلیل به کارگیری تکنیک حداقل مربعات و تعداد نقاط هم مکان بیشتری نسبت به نقاط گرهی، روش CDLS دچار مشکل ناپایداری نخواهد شد.

در این مقاله، روش CDLS برای حل مسایل الاستیسیته مکانیک جامدات به کار رفته است. به این منظور در ابتدا شیوه ایجاد توابع شکل حداقل مربعات میانگین توضیح داده شده است. سپس شیوه گسسته‌سازی معادلات تعادلی در مسایل الاستیسیته با استفاده از روش CDLS معرفی شده است. در ادامه پس از ارائه مثال‌های عددی به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری نهایی پرداخته شده است.

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران تلفن: ۰۹۱۶-۶۰۱۲۹۷۶

^۲ استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران

^۳ دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران

^۴ کارشناس ارشد سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

**مدل ریاضی**

به علت پیوستگی، کامل بودن و توانایی بالای روش حداقل مربعات متحرک (MLS) که آن را به یکی از مناسب‌ترین روش‌های درونیایی بین داده‌های تصادفی با دقت مناسب تبدیل کرده است، به طور عموم بر دیگر طرح‌های تقریب بدون شبکه برتری داده می‌شود [۹، ۲۰].

توابع شکل حداقل مربعات متحرک

تابع نامعلوم ϕ توسط درونیایی MLS به صورت زیر تخمین شده می‌شود:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = P^T(x) a(x) \quad (1)$$

که در آن $P(x)$ یک چند جمله‌ای پایه در مولفه‌های فضای مساله، و m تعداد کل پارامترهای موجود در پایه می‌باشد. برای یک مساله دو بعدی می‌توان $P = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]$ را برای $m=6$ مشخص کرد. $a(x)$ بردار ضرایب می‌باشد و با استفاده از به حداقل رساندن یک نرم L_2 گسسته‌سازی وزنی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$J = \sum_{j=1}^n w_j (X - X_j) (P^T(X_j) a(X) - u_j^h)^2 \quad (2)$$

که در آن $w_j(X - X_j)$ معمولاً طوری ساخته می‌شود که در نزدیکی نقطه j که قرار است تابع و مشتق‌های آن محاسبه شوند دارای مقدار واحد بوده و در خارج از یک ناحیه Ω_j که نقطه X_j را احاطه کرده است از بین می‌رود. در این مقاله، تابع وزنی اسپلاین مرتبه سه به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(X - X_j) = w(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \text{for } \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

که در آن $\bar{d} = \|X - X_j\| / d_w$ و d_w اندازه حوزه تاثیر نقطه X_j می‌باشد.

به حداقل رساندن معادله (۲) به معادله زیر منجر می‌شود:

$$\phi(X) = P^T(X) A^{-1}(X) B(X) \phi^h \quad (4)$$

که در آن:

$$A(X) = \sum_{j=1}^n w_j (X - X_j) P(X_j) P^T(X_j) \quad (5)$$

$$B(X) = [w_1(X - X_1) P(X_1), w_2(X - X_2) P(X_2), \dots, w_n(X - X_n) P(X_n)] \quad (6)$$

با مقایسه معادله (۴) با معادله (۷)، معادله (۸) حاصل خواهد شد:

$$\phi(X) = N^T(X) \phi^h \quad (7)$$

$$N^T(X) = P^T(X) A^{-1}(X) B(X) \quad (8)$$

که در آن $N^T(X)$ شامل توابع شکل گره‌ها در نقطه (X) می‌باشد که توابع شکل حداقل مربعات متحرک نامیده می‌شوند.

روش حداقل مربعات گسسته هم‌مکان

معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$A(\phi) + f = 0 \text{ in } \Omega \quad (9)$$

که دارای شرایط مرزی درچله و نیومن مناسب به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \text{ on } \Gamma_u \quad (10)$$

$$B(\phi) - t = 0 \text{ on } \Gamma_t \quad (11)$$

که در آن A و B عملگرهای دیفرانسیل جزئی می‌باشند و f بیانگر نیروهای خارجی یا پارامتر منبع در حوزه مساله می‌باشد. با گسسته‌سازی حوزه مساله و مرزهای آن با استفاده از معادله (۷) که برای باقیمانده معادله دیفرانسیل جزئی در یک نقطه هم‌مکان k تعیین شده است، خواهیم داشت:



$$R_{\Omega}(x_k) = A(\phi(x_k)) + f(x_k) = \sum_{j=1}^n A(N_j(x_k))\phi_j + f(x_k), k = 1, \dots, M \quad (12)$$

باقیمانده شرط مرزی نیومن در نقطه هم مکان k در شرط نیومن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$R_t(x_k) = B(\phi(x_k)) - \bar{t}(x_k) = \sum_{j=1}^n B(N_j(x_k))\phi_j - \bar{t}(x_k), k = 1, \dots, M_t \quad (13)$$

و در نهایت باقیمانده شرط مرزی در پیچله در گره‌ها در مرز در پیچله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$R_u(x_k) = \phi_n - \bar{\phi}(x_k) = \sum_{j=1}^n N_j(x_k)\phi_j - \bar{\phi}(x_k), k = 1, \dots, M_u \quad (14)$$

که در آن n تعداد کل نقاط گرهی، M_{Ω} نقاط هم مکان درونی، M_t نقاط هم مکان روی مرز نیومن، M_u نقاط هم مکان روی مرز در پیچله و M تعداد کل نقاط هم مکان می‌باشند. از یک روش پنالتی به منظور ایجاد باقیمانده کل مساله به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$I = \sum_{k=1}^M (R_{\Omega}^2(x_k)) + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} (R_t^2(x_k)) + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} (R_u^2(x_k)) \quad (15)$$

$$I = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^n [A(N_j(x_k))\phi_j + f(x_k)]^2 + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{j=1}^n [B(N_j(x_k))\phi_j - \bar{t}(x_k)]^2 + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} \sum_{j=1}^n [N_j(x_k)\phi_j - \bar{\phi}(x_k)]^2 \quad (16)$$

که در آن α_u و α_t به ترتیب ضرایب پنالتی برای شرط مرزی نیومن و در پیچله می‌باشند که در مدل حاضر برابر با 10^4 در نظر گرفته شده‌اند. به حداقل رساندن تابع با توجه به پارامترهای گرهی ($\phi_i, i = 1, 2, \dots, n$) به دستگاه معادلات زیر منجر می‌شود:

$$K\phi = F \quad (17)$$

که در آن:

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^M A(N_i(x_k))A(N_j(x_k)) + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} B(N_i(x_k))B(N_j(x_k)) + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} N_i(x_k)N_j(x_k) \quad (18)$$

$$F_i = \sum_{k=1}^M A(N_i(x_k))f(x_k) + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} B(N_i(x_k))\bar{t}(x_k) + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} N_i(x_k)\bar{\phi}(x_k) \quad (19)$$

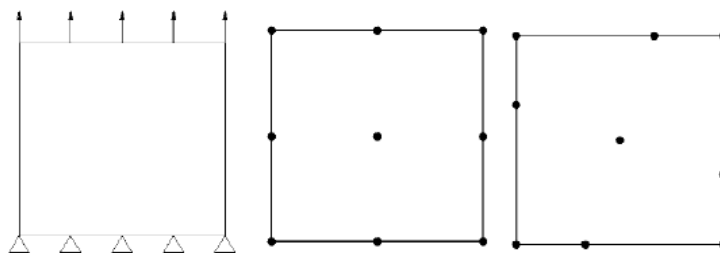
ماتریس سختی K در معادله (۱۷) در مربعی ($N \times N$) و متقارن است. از اینرو، دستگاه معادلات نهایی را می‌توان توسط روش‌های مناسب حل کرد.

حل مساله

در این بخش سه مثال دو بعدی در نظر گرفته شده است که با روش CDLS حاضر حل شده‌اند. این مثال‌ها شامل موارد زیر می‌باشند: (الف) تست patch (ب) یک تیر طره‌ای زیر بار در نقطه نهایی (ج) یک صفحه نامتناهی دارای یک سوراخ گرد که زیر بار تک محوری قرار دارد.

آزمون وصله (patch test)

شکل ۱ یک مستطیل زیر بار یکنواخت کششی را نشان می‌دهد که به عنوان مثال اول حل شده است. در این مثال مقدار مدول یانگ $E = 1000$ ، و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده است. شرط تنش صفحه‌ای فرض شده است و ۹ نقطه گره‌ای به کار رفته است. دو آرایش گره‌ای برای این آزمون مورد استفاده قرار گرفته است: اولی منظم و دیگری غیر منظم می‌باشد. این دو آرایش در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. در لبه پایینی صفحه مستطیلی، قیدهای جابجایی مناسبی قرار داده شده‌اند. جابجایی‌ها و تنش‌های به دست آمده با نتایج به دست آمده از حل دقیق مساله برای دو آرایش در نظر گرفته شده تطابق دارد.



شکل ۱: آزمون وصله: یک مستطیل زیر بار یکنواخت کششی؛ دو آرایش گرهی



تیر طره‌ای

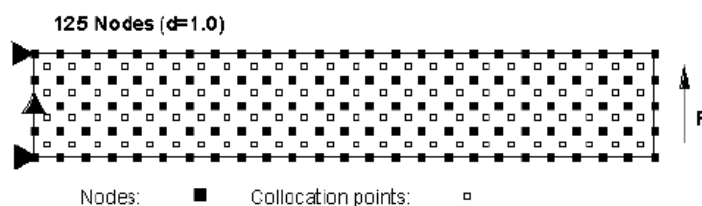
شکل ۲ یک تیر طره‌ای را نشان می‌دهد که زیر بار نقطه‌ای در انتهای آن می‌باشد. برای این مساله، حل دقیق جابجایی و تنش‌ها برای شرط تنش صفحه‌ای در Timoshenko و Goodier [۲۱] به صورت زیر آورده شده است:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{P}{2I}[c^2 - y^2] \end{cases} \quad (20)$$

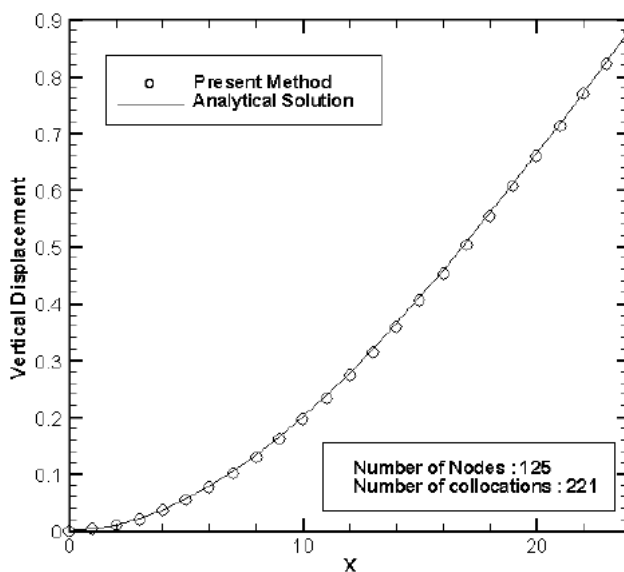
همچنین

$$\begin{cases} u = -\frac{Py}{6EI}[3x(2L-x) + (2+v)(y^2 - c^2)] \\ v = \frac{Py}{6EI}[x^2(3L-x) + 3v(L-x)y^2 + (4+5v)c^2x] \end{cases} \quad (21)$$

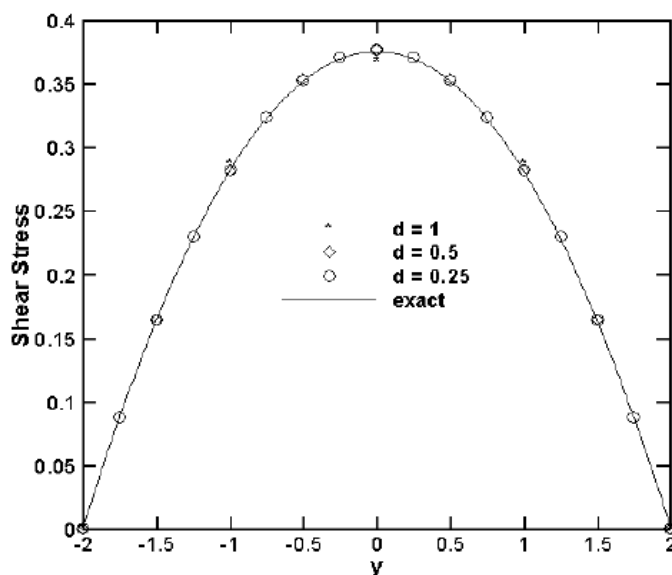
که در آن ممان اینرسی یک تیر طره‌ای با مقطع مستطیلی و ضخامت واحد به صورت $I = 2c^3/3$ محاسبه می‌شود. در اینجا مساله با در نظر گرفتن ثابت‌های زیر حل شده‌اند: $P = 1$ ، $E = 1000$ ، $c = 2$ ، $L = 24$ و $v = 0.3$. آرایش‌های گرهی یکنواخت منظم با فواصل گرهی $d = 1/10$ ، $d = 0.5$ و $d = 0.25$ به کار رفته‌اند. همچنین تعداد گره‌های نظیر به ترتیب ۱۲۵، ۴۴۱ و ۱۶۴۹ و تعداد نقاط هم مکان نظیر به ترتیب ۲۲۱، ۸۲۵ و ۳۱۸۵ می‌باشد. آرایش گرهی برای $d = 1/10$ در شکل ۲ نشان داده شده است. برای حل مساله، تقریب MLS همراه با چند جمله‌ای درجه دوم به کار رفته است.

شکل ۲: آرایش نقاط گرهی تیر طره‌ای به ازای $d = 1/10$

در شکل ۳ جابجایی عمودی در راستای خط مرکزی تیر برای آرایش گرهی با $d = 1/10$ در نظر گرفته شده است. همان طور مشاهده می‌شود، نتایج عددی به دست آمده در تطابق کامل با نتایج حل تحلیلی می‌باشند.



شکل ۳: نتایج مربوط به جابجایی عمودی تیر طره‌ای زیر بار نقطه‌ای واقع بر انتهای آن


 شکل ۴: نتایج مربوط به توزیع تنش برشی تیر طره‌ای در $x = L/2$

شکل ۴ توزیع تنش برشی تیر طره‌ای در $x = L/2$ را برای سه آرایش گره‌ای مختلف با فواصل گره‌ای $d = 1/10$ ، $d = 0.5$ و $d = 0.25$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود نتایج عددی تطابق بسیار خوبی با نتایج حاصل از حل تحلیلی مساله دارند.

صفحه نامتناهی دارای یک سوراخ دایروی

شکل ۵ یک صفحه نامتناهی دارای سوراخ دایروی را نشان می‌دهد که تحت اثر یک بار کششی تک محوری P در بی‌نهایت می‌باشد. حل دقیق مربوط به تنش‌ها و جابجایی‌ها برای این مساله به صورت زیر می‌باشند:

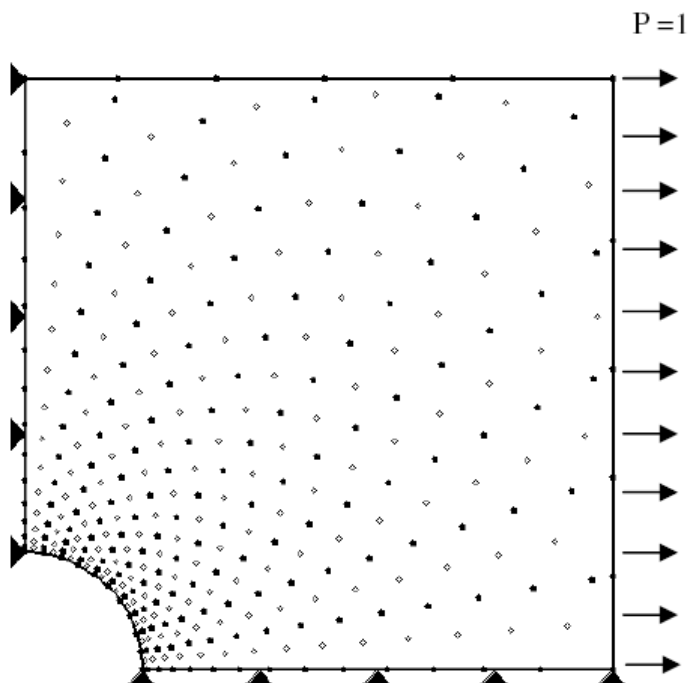
$$\begin{cases} \sigma_x = P \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\} \\ \sigma_y = -P \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\} \\ \tau_{xy} = -P \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right] - \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right\} \end{cases} \quad (22)$$

و همچنین

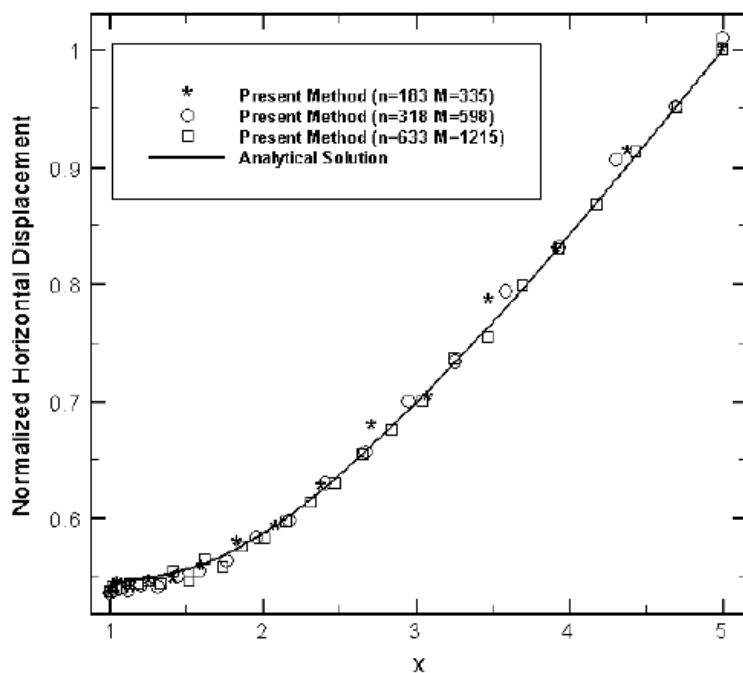
$$\begin{cases} u_r = \frac{P}{4G} \left\{ r \left[\frac{\kappa - 1}{2} + \cos(2\theta) \right] + \frac{a^2}{r} \left[1 + (1 + \kappa) \cos(2\theta) \right] - \frac{a^4}{r^3} \cos(2\theta) \right\} \\ u_\theta = \frac{P}{4G} \left\{ (1 - \kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right\} \sin(2\theta) \end{cases} \quad (23)$$

در معادلات بالا G مدول برشی و $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ می‌باشد که در آن ν نسبت پواسون می‌باشد. به علت تقارن فقط یک چهارم سمت بالا و راست صفحه مدل‌سازی شده است (شکل ۵). طول لبه مربع $5a$ و اندازه شعاع سوراخ a می‌باشد. در لبه‌های پایین و چپ شرایط مرزی متقارن وجود داشته و کشش‌های به دست آمده از حل تحلیلی (معادله ۲۳) در لبه‌های بالا و راست به کار می‌روند.

مساله توسط روش CDLS و در شرایط تنش صفحه‌ای و با ثابت‌های زیر حل شده است: $P = 1$ ، $E = 1000$ و $\nu = 0.3$. سه آرایش گره‌ای به ترتیب دارای ۱۸۳، ۳۱۸ و ۶۳۳ نقطه گره‌ای می‌باشند. تعداد نقاط هم‌مکان نظیر به ترتیب ۳۳۵، ۵۹۸ و ۱۲۱۵ می‌باشند. آرایش گره‌ای مربوط به ۱۸۳ نقطه در شکل ۵ نشان داده شده است. در این شبیه‌سازی از MLS با پایه مکعبی استفاده شده است. جابجایی افقی u_x در راستای لبه پایین ($y = 0$) و مولفه تنش σ_x در طول لبه چپ ($x = 0$) به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است. مقایسه نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و عددی مربوط به جابجایی‌ها و تنش‌ها، بیانگر تطابق بسیار خوب آن‌ها می‌باشد.



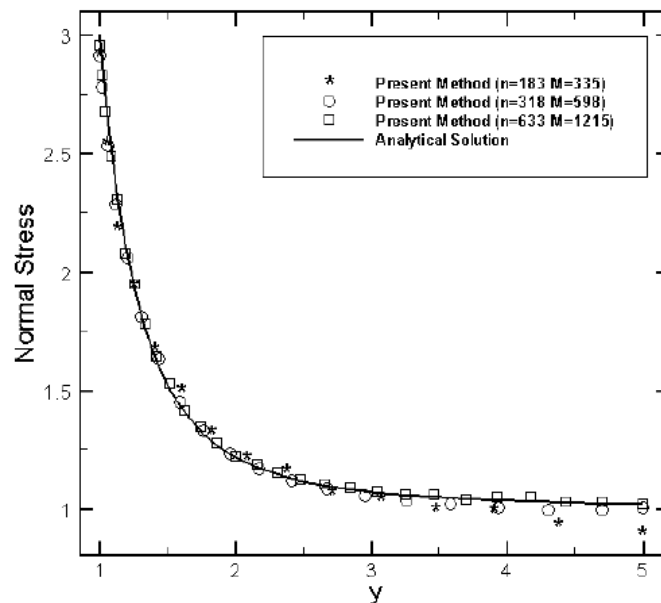
شکل ۵: آرایش‌های گرهی یک صفحه نامتناهی دارای یک سوراخ دایروی با ۱۸۳ گره و ۳۳۵ نقطه هم مکان (دایره‌های توپر نشان دهنده گره‌ها و دایره‌های تو خالی نشان دهنده نقاط هم مکان می‌باشند)



شکل ۶: جابجایی افقی در طول $y = 0$ مربوط به سه آرایش گره‌ای مختلف

نتیجه‌گیری

در این مطالعه عددی یک راهکار کاملاً بدون شبکه، روش حداقل مربعات گسسته هم مکان (CDLS)، برای حل مسایل مربوط به الاستیسیته مکانیک جامدات توسعه داده شده است. در روش CDLS حاضر حوزه محاسباتی مساله توسط نقاط گره‌ای که برای ایجاد توابع شکل به کار می‌روند، گسسته‌سازی شده است. برای ایجاد توابع شکل از درونیاب حداقل مربعات متحرک استفاده شده است. برای به دست آوردن حل مساله از تکنیک

شکل ۷: تنش عمودی σ_x در طول $x=0$ برای سه آرایش گره‌ای مختلف

حداقل مربعات توسط به حداقل رساندن مجموع باقیمانده‌های نقاط هم مکان استفاده شده است. ماتریس ضرایب نهایی متقارن بوده و توسط روش‌های کارا قابل حل می‌باشد. همچنین، شرایط مرزی به راحتی با روش پنالتی اعمال می‌شوند. روش CDLS حاضر به شبکه احتیاج نداشته، از اینرو یک روش کاملاً بدون شبکه می‌باشد. قابلیت این روش توسط حل مثال‌های عددی بررسی شده است که بیانگر دقت و کارایی بالا و پایدار بودن آن می‌باشد. قابلیت بالای این روش آن را برای حل مسایل کاربردی الاستیسیته توانمند می‌سازد.

مراجع

1. Gingold, R.A. and Moraghan, J.J. (1977) Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **181**, 375-389.
2. Belytschko, T., Lu, Y. and Gu, L. (1994) Element free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229-256.
3. Belytschko, T., Krongauz, Y. and Organ, D. (1996) Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 3-47.
4. Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F. (1995) Reproducing kernel particle methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 1081-1106.
5. O'neate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1996) A finite point method in computational mechanics, Applications to convective transport and fluid flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 3839-3866.
6. Liszka, T.J., Duarte, C.A.M. and Tworzydło, W.W. (1996) hp meshless cloud method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 263-288.
7. Atluri, S.N. and Zhu, T.L. (2000) The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics, *Computational Mechanics*, **25**, 169-179.
8. Atluri, S.N. and Zhu, T. (1998) A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational Mechanics*, **22**, 117-127.
9. Atluri, S.N. Liu, H.T. and Han, Z.D. (2006) Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed collocation method for elasticity problems, *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **14**, 141-152.
10. Atluri, S.N., Liu, H.T. and Han, Z.D. (2006) Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed finite difference method for solid mechanics, *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **15**, 1-16.
11. Zhang, X., Liu, X.H., Song, K.Z. and Lu, M.W. (2001) Least-squares collocation meshless method, *International journal for numerical methods in engineering*, **51**, 1089-1100.
12. Wang, Q.X. Li, H. and Lam, K.Y. (2005) Development of a new meshless-point weighted least-squares (PWLS) method for computational mechanics, *Computational Mechanics*, **35**, 170-181.



13. Belytschko, T. and Krysl, P. (1995) Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method, *Computational Mechanics*, **17**, 26-35.
14. Onate, E., Perazzo, F. and Miquel, J. (2001) A finite point method for elasticity problems, *Computers and Structures*, **79**, 2151-2163.
15. Kwon, K.C., Park, S.H., Jiang, B.N. and Youn, S.K. (2003) The least-squares meshfree method for solving linear elastic problems, *Computational Mechanics*, **30**, 196-211.
16. Zhang, X. Pan, X.F., Hu, W. and Lu, M.W. (2002) Meshless weighted least-square method, *Fifth world congress on computational mechanics*, Vienna, Austria
17. Arzani, H. and Afshar, M.H. (2006) Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, **42**, 23-31.
18. Lashckarbolok, M. and Afshar, M.H. (2007) Collocated discrete least square (CDLS) meshless method: error estimate and adaptive refinement, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Submitted.
19. Lancaster, P. and Salkauskas, K. (1981) Surfaces generated by moving least squares method, *Mathematics of computation*, **37**, 141-158.
20. Atluri, S.N. (2004) The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for domain & boundary discretizations, *Tech Science Press*.
21. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1987) Theory of elasticity, 3rd edition, *McGraw-Hill*, New York.