تعیین میدان تنش ها و جابجائی ها در محیط اطراف سازه های زیرزمینی با استفاده از روش بدون مش گالرکین

حسین میرزائی نصیرآباد*، رضا خالوکاکائی**، بهروز حسنی***، نادر فردین****

چکیده

از منظر ریاضی در طبیعت بر هر پدیده ای یک معادله دیفرانسیل حاکم است. بر رفتار مکانیکی محیط اطراف فضاهای زیر زمینی نیز یک معادله دیفرانسیل حاکم است. با حل این معادله، میدان جابجائی ها و تنش ها در هر یک از نقاط توده سنگ اطراف فضای زیر زمینی محاسبه شده و برای تحلیل پایداری سازه مورد استفاده قرار می گیرد. در این مقاله نحوه فرمول بندی و حل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار الاستو استاتیک توده سنگ و محاسبه جابجائی ها و تنش ها در نقاط مختلف محیط سازه با استفاده از روش بدون مش گالرکین توضیح داده شده است. سپس برای ارزیابی روش بدون مش گالرکین با در نظر گرفتن یک مثال و با استفاده از برنامه کامپیوتری تهیه شده بر مبنای روش فوق الذکر، میدان تنش ها و جابجائی ها محاسبه شده و نتایج حاصل با روش المان محدود مقایسه شده است. نتایج حاصل از دو روش خیلی به هم نزدیک می باشد و بیانگر این است که روش بدون مش گالرکین علاوه بر مزایای خاص خود از دقت خیلی بالائی نیز برخوردار است.

واژه های کلیدی: روش بدون مش گالرکین، روش المان محدود، توزیع تنش ها، تونل

۱- مقدمه

انواع سازه های زیر زمینی با کاربری های متفاوت بایستی از نظر پایداری تحلیل شده و در صورت ناپایداری، با توجه به فاکتور اطمینان مورد نظر و با کمترین هزینه سیستم نگهداری مناسب طراحی گردد. برای تحلیل پایداری سازه های زیر زمینی معیارهای شکست مختلفی ارائه شده است. یک معیار شکست در واقع بیانگر یک رابطه ریاضی بین عوامل مخرب و عوامل مقاومتی توده سنگ است. مولفه های تانسور تنش از مهمترین پارامترهایی است که در تمامی معیارهای شکست ظاهر می شوند.

* دانشجوی دکتری استخراج معدن، دانشگاه صنعتی شاهرود، hmirzaii@Shahroodut.ac.ir .
** استادیار دانشکده مهندسی معدن و ژئوفیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود
*** دانشیار دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شاهرود
**** استادیار دانشکده معدن دانشگاه تهران

بنابراین برای تحلیل پایداری یک فضای زیر زمینی لازم است میدان تنش ها در محیط اطراف آن محاسبه گردد. اگر چنانچه هندسه سازه و نوع بارگذاری ساده باشد، با استفاده از روش های تحلیلی میدان جابجائی ها و تنش ها در محیط اطراف سازه بطور دقیق محاسبه می گردد. ولی در صورتی که ژئومتری مسئله پیچیده باشد، برای تعیین جابجائی ها و تنش ها ناگزیر باید از روش های عددی استفاده شود.

روش المان محدود (FEM) بعنوان پر کاربردترین روش عددی در مدلسازی و حل مسائل محیط های پیوسته، با آنکه در طیف وسیعی از کاربردهای مهندسی موفقیت های بزرگی داشته است ولی در برخورد با مسائلی که شامل تغییر شکل های خیلی زیادی هستند و یا در مسائل انتشار ترک با مشکلاتی درگیر است که به ماهیت مش بندی آن مربوط می شود. برای غلبه بر این مشکلات، روش های بدون مش متعددی نظیر هیدرودینامیک ذره ای نرم شده (SPH)، روش ذره ای تولید مجدد کرنل (PKPM)، روش بدون مش گالرکین (EFGM)، روش بدون مش محلی پترو گالرکین (MLPG) و... توسعه داده شده است[۳,۲,۱]. جنبه مشترک همه روش های بدون مش اینست که متغیرهای میدان را بطور داخلی بر مبنای تعدادی از گره های گسسته ارزیابی می کنند و به اتصالات از پیش تعریف شده گره ها نیاز ندارند. از آنجائیکه گره ها در دامنه مسئله بدون ساختار هستند، بنابراین می توانند حرکت کنند، اضافه شوند و یا بطور آزاد حذف شوند. بنابراین در روش های بدون مش مشکلات مربوط به روش المان محدود برطرف می شود. در این مقاله نحوه محاسبه جابجائی ها و تنش ها در محیط اطراف سازه با استفاده از روش بدون مش گالرکین تشریح شده است.

۲- روش بدون مش EFGM

روش EFG یکی از متداول ترین روش های بدون مش است. این روش اساسا دو جنبه دارد: ساختن تقریب بدون مش با استفاده از تکنیک حداقل مربعات متحرک (MLS) و تقریب عددی معادلات حاکم با فرمول بندی مرتبه پائین گالرکین. فرمول بندی روش EFG بر اساس فرمول بندی بلیچکو و همکارانش[۴] بصورت زیر است:

۲-۱- تقریب MLS

اگر u(x) متغیر میدان در حوزه Ω و u^h تقریب محلی آن باشد، طبق مطالعات لنکستر و همکارانش [۴]، تقریب محلی u^h به صورت ضرب داخلی بردار چند جمله ای پایهP(x) و بردار ضرایب a(x) بیان می شود:

$$u^h = P^T(x).a(x) = \sum_{i=1}^{m} p_j(x)a_j(x) \qquad (۱)$$

m تعداد جمله ها در توابع پایه چند جمله ای است. در مسائل دو بعدی عموما توابع پایه خطی $P^T = (1, x, y)$ استفاده می شود. اگر مقادیر x_i، i = 1 , … , n در مجموعه ای از گره ها معلوم باشد، بردار a(x) را با مینیمم کردن نُرم خطای L_2 گسسته و وزن دار می توان بدست آورد. نرم خطای L_2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$J = \sum_{i=1}^{n} w(x, x_i)[u^h(x_i) - u_i]^2 \qquad (۲)$$

که $w(x-x_i)$ تابع وزن است که در حوزه تاثیر گره i تعریف می شود، u_i مقدار گرهی در نقطه x_i و n تعداد گره ها در حوزه تاثیر نقطه x است. تابع وزن نقش تاثیر گرهی را دارد و در تقریب MLS نقش مهمی بازی می کند. یکی از توابع وزنی که در مطالعات استفاده می شود، تابع cubic spline می باشد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$w(s)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}-4s^2+4s^3 & for \quad s\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{4}{3}-4s+4s^2-\dfrac{4}{3}s^3 & for \quad \dfrac{1}{2}<s<1\\ 0 & for \quad s\ge 1\end{cases} \tag{۳}$$

که پارامتر وزن s فاصله نرمالیزه شده است: $s=\frac{|x-x_i|}{r_0}$ (r_0 شعاع حوزه تاثیر است). ثابت بودن J نسبت به a(x) به حل a(x) می انجامد:

$$a(x)=A^{-1}(x)B(x)u \tag{۴}$$

$$[A(x)]_{IJ}=\sum_{i=1}^{n} w(x,x_i)\,p_I(x_i)\,p_J(x_i),\quad I,J=1,2,...,m, \tag{۵}$$

$$[B(x)]_{IJ}=w(x,x_J)\,p_I(x_J),\quad J=1,2,...,n,\quad I=1,2,...,m. \tag{۶}$$

$$u^T=(u_1,u_2,...,u_n) \tag{۷}$$

A معمولا ماتریس ممان نامیده می شود. با جایگزینی a(x) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\ u_i \tag{۸}$$

تابع شکل $\phi_i(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$\phi_i(x)=\sum_{j=1}^{n}p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} \tag{۹}$$

توجه شود که تابع شکل بدست آمده شرایط دلتای کرونکر را تامین نمی کند ($\phi_i(x_i)\ne 1$ و $\phi_i(x_j)\ne 0$).

۲-۲- فرم مرتبه پائین گالرکین برای مسائل الاستواستاتیک

معادلات حاکم بر مسائل الاستواستاتیک در دامنه Ω که با مرز Γ محدود شده است، به صورت زیر می باشد:

$$\nabla.\sigma+b=0 \quad in \quad \Omega \tag{۱۰}$$

با شرایط مرزی:

$$u=\bar{u} \quad on \quad \Gamma_u\ , \tag{۱۱}$$

$$\sigma.n=\bar{t} \quad on \quad \Gamma_t \tag{۱۲}$$

که σ تانسور تنش، b نیروهای حجمی، $\bar{u}$ جابجائی داده شده در مرز Γ_u، $\bar{t}$ نیروی سطحی داده شده در مرز Γ_t و n بردار نرمال رو به بیرون مرز مسئله است.
با اعمال شرایط مرزی اساسی با استفاده از ضرایب لاگرانژ [۲]، فرم مرتبه پائین معادله تعادل به صورت زیر در می آید:

$$\int_{\Omega}\delta(\nabla_s v^T):\sigma\, d\Omega-\int_{\Omega}\delta v^T\,.\,b d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta v^T\,.\,\bar{t} d\Gamma-\int_{\Gamma_u}\delta^T.(u-\bar{u})d\Gamma-\int_{\Gamma_u}\delta v^T.\lambda d\Gamma=0 \quad \forall\delta v\in H^1,\delta\lambda\in H^0 \tag{۱۳}$$

که δv تابع آزمون، λ ضرایب لاگرانژ، H^0 و H^1 به ترتیب فضای هیلبرت مرتبه صفر و یک هستند. معادله فوق معادله تعادل (۱۰) و شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) را اقناع می کند.
برای بدست آوردن معادلات گسسته از معادله مرتبه پائین (۱۳)، راه حل تقریبی u و تابع آزمون δv طبق معادله (۸) ساخته شده و بهمراه توابع درونیاب لاگرانژ در معادله (۱۳)جایگزین می شوند. معادلات گسسته نهایی بصورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{q} \end{Bmatrix} \tag{۱۴}$$

ماتریس ها و بردارها در معادله فوق به صورت زیر تعریف می شوند:

$$[K]_{ij}=\int_{\Omega}B_i^T D B_j d\Omega \tag{۱۵}$$

$$G_{ik}=-\int_{\Gamma_u}\phi_i\, N_k d\Gamma \tag{۱۶}$$

$$\boldsymbol{f}=\int_{\Omega}\Phi_I\,\boldsymbol{b}\, d\Omega+\int_{\Gamma_t}\Phi_I\,\bar{\boldsymbol{t}}\, d\Gamma \tag{۱۷}$$

$$q=-\int_{\Gamma_u}N_k\,\bar{u}\, d\Gamma \tag{۱۸}$$

$$[B]_i=\begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

$$N_k=\begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

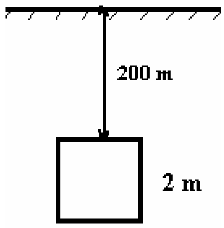
$$D=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\upsilon)/2 \end{bmatrix} \quad \textit{for plane stress} \tag{۲۱}$$

که E و υ بترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مواد مورد نظر هستند.
با حل معادله (۱۴)، بردار u (مقادیر جابجائی در گره ها) بدست می آید و با استفاده از مقادیر جابجائی ها مولفه های تنش محاسبه می شوند.

۳- ارزیابی نتایج روش بدون مش گالرکین

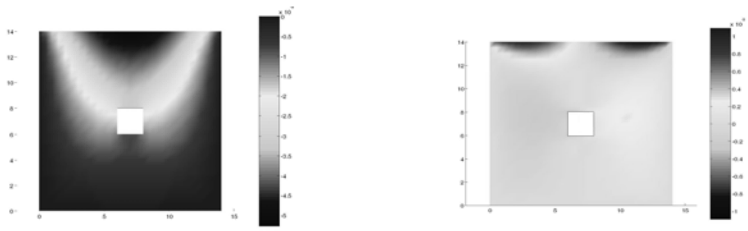
با استفاده از یک مثال نتایج روش بدون مش گالرکین ارزیابی شده و با نتایج روش المان محدود مقایسه می گردد. فرض شده یک تونل با مقطع مربعی شکل و با ابعاد $2\times2\ m^2$ مطابق شکل (۱) در

عمق ۲۰۰ متری سطح زمین در یک محیط پیوسته حفر می شود. دانسیته توده سنگ $2000\,kg/m^3$ و پارامترهای مکانیکی آن $E = 6.4\ GPa\ ,\ \upsilon = 0.3$ در نظر گرفته می شود. با استفاده از برنامه کامپیوتری که بر مبنای روش بدون مش گالرکین در محیط MATLAB تهیه شده است، جابجائی نقاط اطراف تونل و توزیع تنش ها در این نقاط محاسبه شده است.



شکل (۱): شمای یک تونل فرضی با مقطع مربعی شکل در عمق ۲۰۰ متری سطح زمین

مولفه های جابجائی نقاط اطراف تونل در راستای افقی و قائم به ترتیب در اشکال (۲ – الف) و (۲ – ب) نشان داده شده است. بر اساس نتایج بدست آمده حداکثر جابجائی افقی در دیواره های تونل و حداکثر جابجائی قائم در سقف تونل بوجود می آید.



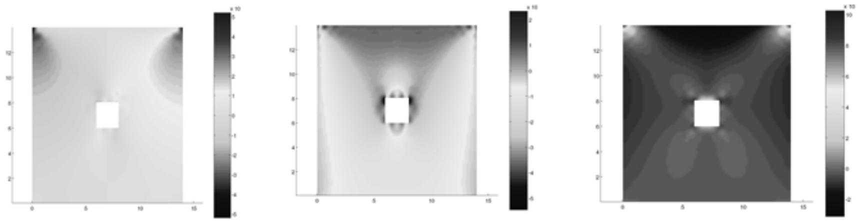
(ب) (الف)

شکل (۲): جابجائی نقاط اطراف تونل در راستای افقی و قائم: الف) جابجائی افقی نقاط اطراف تونل و ب) جابجائی قائم نقاط اطراف تونل.

توزیع تنش های نرمال افقی و قائم و تنش برشی در نقاط اطراف تونل بترتیب در اشکال (۳ – الف) ، (۳ – ب) و (۳ – ج) نشان داده شده است. مطابق شکل (۳) تمرکز تنش در گوشه های تونل واضح است. سقف تونل تحت تنش نرمال افقی کششی و دیواره های آن تحت تنش قائم فشاری است.

مثال فوق با استفاده از روش المان محدود نیز حل شده و جابجائی ها و تنش ها در محیط اطراف تونل محاسبه شده است. برای این منظور از نرم افزار ANSYS استفاده شده است. نتایج دو روش بدون مش گالرکین و المان محدود در جداول (۱) و (۲) مقایسه شده است.

با مقایسه نتایج دو روش بدون مش گالرکین و روش المان محدود مشخص می شود که مقادیر جابجائی ها و تنش های حاصل از دو روش خیلی بهم نزدیک بوده و تطابق خیلی خوبی با هم دارند. بنابراین روش بدون مش گالرکین از دقت خیلی خوبی برخوردار است.



(ج) (ب) (الف)

شکل (۳):توزیع تنش های نرمال افقی و عمودی و تنش برشی در نقاط اطراف تونل: الف) توزیع تنش σ_{xx}، ب) توزیع تنش σ_{yy} و ج) توزیع تنش τ_{xy}

جدول (۱): مقایسه مقادیر جابجائی های حاصل از دو روش بدون مش گالرکین و المان محدود

روش	جابجائی افقی دیواره	جابجائی قائم سقف
روش بدون مش گالرکین	۰/۱۳ mm	۳/۲۲ mm
روش المان محدود	۰/ ۱۶ mm	۳/۲۸ mm

جدول (۲): مقایسه مقادیر تنش های بدست آمده از دو روش بدون مش گالرکین و المان محدود

روش	تنش نرمال افقی در سقف	تنش نرمال عمودی در دیواره	تنش برشی در کنج تونل
روش بدون مش گالرکین	۲/۵۶ MPa	۳/۲ MPa	۱/۶۲ MPa
روش المان محدود	۲/۱۶ MPa	۳/۸ MPa	۱/۴۵ MPa

٤- نتیجه

نتایج حاصل از این مطالعه عبارتند از :

- نتایج روش بدون مش گالرکین با نتایج روش المان محدود مطابقت خیلی زیادی داشته و از دقت خیلی مطلوبی برخوردار است.
- روش بدون مش گالرکین در مقایسه با روش المان محدود نسبت به تغییرات مدلسازی از انعطاف بیشتری برخوردار است.
- روش بدون مش گالرکین بخاطر عدم نیاز به المان بندی بسیاری از مشکلات روش المان محدود را که به ماهیت مش بندی آن مربوط می شود، برطرف می کند.
- در روش بدون مش در هر قسمت از دامنه مسئله در صورت لزوم براحتی می توان گره اضافه و یا حذف کرد.

۵- مراجع

[1] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl, *Meshless methods: an overview and recent developments*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 3–47.
[2] S. Li, W.K. Liu, *Meshfree and particle methods and their applications*, in: American Society of Mechanical Engineers
, 2002.
[3] J. Bonet, B. Hassani, L.-T. Lok, S. Kulasegaram, *Corrected smooth particle hydrodynamics – a reproducing kernel meshless method for computational mechanics*, in: Computational Mechanics in UK – 5th ACME Annual Conference, 1997.
[4] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 37 (1994) 229–256.