

International Congress of Recent Advances in Engineering

شماره: ۷۲۱
تاریخ: ۱۳۹۱/۱۲/۱۵



Islamic Azad University Khomeinshahr Branch

۱۳۹۱ اسفندماه ۱۵-۱۷

5 - 7 March 2013

کنگره بین‌المللی پژوهش‌های نوین در مهندسی



ضمن مشکروقدرتانی از کارخانه‌گان ارجمند:

سیروس نصیری‌ایی - نوشین نسبی زاده - ناصر ظریف مقدم - بهروز حسنی

حتم ارائه مقاله:

تحلیل صفحات خمی با استفاده از تئوری میندلین و روش اینزوژنومتریک

گواهی می‌گردد این مقاله از سوی کمیته علمی کنگره بین‌المللی پژوهش‌های نوین در مهندسی، برای ارائه مورد پذیرش قرار گرفت.

امید است که حضور شما در این کنگره

کام‌بندی در عرصه توآوری و حلنگ‌سازی پیشرفت کشور عزیزان ایران اسلامی باشد.

دکتر سعید رسولی

معاون پژوهش و فناوری دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر





تحلیل صفحات خمیشی با استفاده از تئوری میندلین و روش ایزوژئومتریک

ناصر ظریف مقدم

عضو هیئت علمی - دانشکده فنی و حرفه‌ای
شهید محمد منتظری مشهد
nasser_zarif@yahoo.com

نوشین نسبی زاده^۱

دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک- دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد مشهد
noushin_nasabizadeh@yahoo.com

سیروس نصیرایی

استادیار- دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد
c.nasirai@mshdiau.ac.ir

بهروز حسنی

دانشیار- دانشگاه فردوسی مشهد
b_hassani@iust.ac.ir

چکیده

استفاده از روش ایزوژئومتریک در تحلیل صفحات خمیشی با استفاده از تئوری میندلین در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. روش ایزوژئومتریک برای اولین بار در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش بر مبنای ترکیب روش‌های عددی تولید هندسه به کمک کامپیوتر و روش اجزای محدود معرفی گردید. استفاده از اسپلاین‌ها برای تولید هندسه و تقریب حل و همچنین حذف فرآیند تولید شبکه سبب ایجاد مزایایی برای این روش در مقایسه با روش شناخته شده اجزای محدود شده است. در این پژوهش پس از بیان روابط ایزوژئومتریک صفحات خمیشی و تهیی برنامه رایانه‌ای مربوطه اقدام به حل چند مثال شده است و دقت و توانمندی روش مورد استفاده در مقایسه با جواب‌های تحلیلی و روش اجزای محدود مورد مقایسه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک، صفحات خمیشی، تئوری میندلین، اسپلاین‌ها.



از مشکلات شیوه‌های فوق می‌باشد. در تحلیل ایزوژئومتریک، به دلیل استفاده از توابع نریز و تکه‌ای بودن و پیوستگی بالای این توابع، برای تعریف شکل هندسی این مشکل وجود ندارد و تعداد متغیرهای طراحی مسأله کاهش می‌یابد و همگرایی مسأله سریع‌تر و دقیق‌تر باشید. علاوه بر آن در مراحل سازه محاسبه شده، بیشتر می‌شود. علاوه بر آن در مراحل سازه نیز، پیوستگی برقرار می‌شود.

در چند سال اخیر، شیوه ایزوژئومتریک به سرعت در زمینه‌های مختلفی گسترش پیدا کرده است که می‌توان به کاربرد آن در دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و الکترومغناطیس اشاره نمود.^[۱]

با توجه به کاربرد گسترده صفحات خمشی در صنایع تکنولوژی مدرن از قبیل صنایع مکانیکی، هواپیما، الکتریکی، دریایی، صنایع اپتیک، صنایع هسته‌ای و مهندسی سازه، آگاهی از رفتار آن‌ها در طراحی‌ها بسیار حائز اهمیت است.

اکثر کارهای منتشر شده در این زمینه، بر اساس تئوری صفحات نازک کیرشهف^[۱] می‌باشد. از جمله بارزترین این کارها، کار لیزا^[۱۱] در سال ۱۹۶۹^[۵] و مقالات وی می‌باشد. در تئوری صفحات نازک با وجود این که کرنش‌های برشی و اینرسی چرخشی در تعیین فرکانس‌های ارتعاشی بسیار مهم می‌باشند، از این دو اثر چشم‌پوشی می‌شود که با افزایش ضخامت صفحه، این تئوری با خطأ همراه می‌باشد. فعالیت‌های میندلین^[۱۲] و همکارانش در خلال سال‌های ۱۹۵۱ تا ۱۹۵۶^[۶] منجر به تدوین تئوری میندلین شد که به صورت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای ورق‌های نسبتاً ضخیم با در نظر گرفتن اثرات اینرسی چرخشی و تنش‌های برشی در راستای ضخامت ورق و در حقیقت گسترش یافته تئوری تیموشنکو برای تیرها در خمی است.

در بررسی رفتار صفحات خمشی، هنگامی که ضخامت صفحه کوچک می‌شود، می‌توان از اثرات اینرسی چرخشی و تغییر شکل‌های برشی صرف نظر کرد و تئوری میندلین با تئوری کیرشهف سازگاری خوبی دارد. اما، در شیوه‌های عددی، مانند اجزای محدود با انتخاب توابعی از درجات

۱- مقدمه

در دهه‌های گذشته شیوه‌های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی ارایه شده است که برخی از مشهورترین آن‌ها شیوه تفضیلات محدود^[۱]، اجزای محدود^[۲] و دسته‌ای دیگر با عنوان شیوه‌های بدون شبکه^[۳] می‌باشند. گرچه این شیوه‌ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و برطرف نمودن مشکلات روش‌های پیش از خود ارایه شده‌اند، اما هنوز هم نمی‌توان شیوه‌ای را یافت که بتوان آن را کامل و بدون کاستی نامید. از جمله این کاستی‌ها می‌توان به ضعف در تولید شکل مسائل دارای هندسه پیچیده، عدم انطباق مدل هندسی و محاسباتی و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه اجزا اشاره کرد. به طور میانگین برای حل یک مسأله اجزای محدود، حدود هشتاد درصد زمان حل مسأله صرف تولید شبکه اجزا می‌شود.^[۱]

برای غلبه بر این مشکلات و بهبود شیوه‌های موجود، استفاده از توابع پایه اسپلاین به جای توابع شکل متداول در تحلیل مسائل مهندسی، اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان^[۴] و هولیگ^[۵] معرفی شد.^[۲-۴] در سال ۲۰۰۵ فکر استفاده از توابع نریز(بی)-اسپلاین‌های کسری غیر یکنواخت^[۶] که از توسعه توابع اسپلاین به دست می‌آید توسط هیوز^[۷] و همکارانش در یک مقاله با نام شیوه تحلیل ایزوژئومتریک^[۸] معرفی گردید. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه^[۹] و پیشرفتهای اخیر در زمینه گرافیک رایانه‌ای تشکیل می‌دهد.

در این شیوه، ضمن استفاده از خواص توابع اسپلاین و نریز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام همانند توابع شکل در شیوه اجزای محدود، از آن‌ها جهت درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود.^[۱]

در تمام روش‌های قبلی، با چشم‌پوشی کامل از مدل هندسی، تنها بر روی مدل محاسباتی کار می‌شود که یکی

Finite Difference^[۱]

Finite Element Method^[۲]

Finite Point or Meshless Method^[۳]

Kagan^[۴]

Hollig^[۵]

NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)^[۶]

T.J.R Hughes^[۷]

Isogeometric Method^[۸]

CAD (Computer Aided Design)^[۹]



$$N_{i,0}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta_i \leq \zeta < \zeta_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

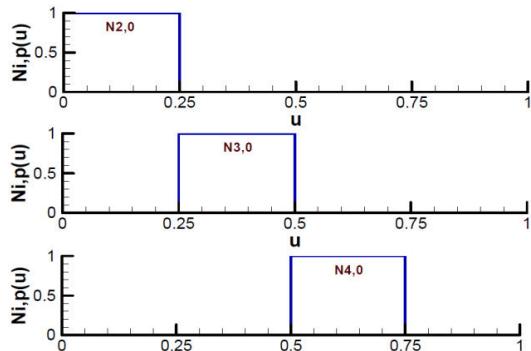
$$N_{i,p}(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_{i+p} - \zeta_i} N_{i,p-1}(\zeta) + \frac{\zeta_{i+p+1} - \zeta}{\zeta_{i+p+1} - \zeta_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\zeta)$$

(۳)

تابع پایه (ζ) در یک گره با k بار تکرار، دارای پیوستگی C^{p-k} است. بنابراین، تکرار باعث کاهش در پیوستگی و افزایش درجه باعث افزایش پیوستگی می‌شود [۷].

اگر تعداد گرهها $m+1$ ، درجه توابع p و تعداد نقاط کنترل، $n+1$ باشد، رابطه $m = n + p + 1$ برقرار است.

برای نمونه در شکل ۱، توابع پایه درجه صفر با بردار گره $\{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\} = U$ ، به نمایش درآمداند.



شکل ۱: توابع پایه (ζ) در بازه $[0, 1]$ با $k = 3$ در ابتدا و انتهای بازه

با استفاده از تعریف (۳) منحنی بی-اسپلین با درجه p به فرم (۴) تعریف می‌شود:

$$C(\zeta) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\zeta) P_i \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (4)$$

منحنی فوق، یک چندجمله‌ای تکه‌ای می‌باشد، که در آن P_i ها نقاط کنترل^۶ در مختصات فیزیکی می‌باشند. از آنجا که منحنی‌های بی-اسپلین چندجمله‌ای هستند، نمی‌توانند در منحنی‌های ساده کسری، به عنوان مثال دایره‌ها و بیضی‌ها مفید باشند. برای رفع این مشکل، بی-اسپلین‌ها به منحنی‌های کسری تعمیم داده می‌شوند. یک منحنی نربز با رابطه زیر بیان می‌شود:

control point⁶

پایین، فقدان همگرایی در جواب‌ها حاصل می‌شود و پدیده قفل برشی^۱ رخ می‌دهد. در شیوه ایزوژئومتریک، می‌توان بر این مشکل چیره شد و دیگر نیاز به استفاده از راهکارهای متفاوت برطرف نمودن قفل برشی مانند انتگرال کاهش یافته نمی‌باشد.

در این پژوهش، ضمن معرفی شوه ایزوژئومتریک، تحلیل صفحات خمی بر پایه تئوری میندلین با هندسه و شرایط مرزی گوناگون و ضخامت‌های متفاوت انجام گرفته است

۲- بی-اسپلین و نربز

نربزها از بی-اسپلین ساخته شده‌اند. بی-اسپلین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه^۲) تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه مدل‌سازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی^۳ در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\Xi = \left\{ \zeta_{n+p+1}, \zeta_{n+p}, \dots, \zeta_2, \zeta_1 \right\}, \quad i = 1 : n + p + 1 \quad (1)$$

در اینجا ζ_i ، i امین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و ζ تعداد توابع تشکیل دهنده بی-اسپلین می‌باشد. انواع مختلفی از بردارهای گرهی وجود دارد، ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گرهی به نام بردارهای گره نامتناوب^۴ (یا باز^۵) استفاده می‌شود. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \zeta_{p+1}, \dots, \zeta_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

در بیشتر مسائل و نیز در این پژوهش $a = 0$ و $b = 1$ در نظر گرفته می‌شود.

i امین تابع پایه بی-اسپلین از درجه صفر و نیز درجه $0 < p$ که با (ζ) نشان داده می‌شود عبارت است:

Shear_Locking^۱
patch²
Knot vector^۳
Nonperiodic knot vector^۴
open^۵



۴- مجھولات با استفاده از مفهوم ایزوپارامتریک و با همان توابع پایه‌ای که برای هندسه استفاده شده است، محاسبه می‌شوند [۸].

۴- تحلیل صفحات خمی

صفحه، سازه‌ای دو بعدی است که پک بعد آن در مقایسه با ابعاد دیگر صفحه کوچک می‌باشد. باز اعمال شده بر صفحه، بر سطح میانی فرض می‌شود و اجزای صفحه می‌توانند در برابر ترکیبی از بارهای برشی و خمی مقاومت کنند.

تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی^۱ میندلین برای صفحات کشسان، شامل اثر تغییر شکل‌های برشی عرضی است. در این تئوری جابجایی‌ها و چرخش‌ها با روابط زیر بیان می‌شوند، که در آن‌ها، z فاصله از سطح میانی می‌باشد [۹].

چرخش‌ها:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \quad (9)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \quad (10)$$

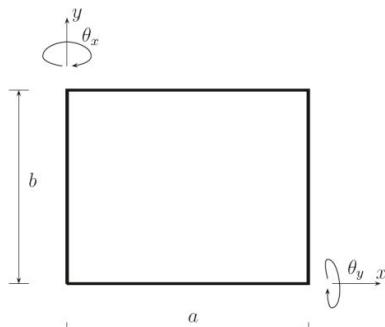
جابجایی‌ها:

$$u = -z \theta_x(x, y) \quad (11)$$

$$v = -z \theta_y(x, y) \quad (12)$$

$$w = w(x, y) \quad (13)$$

چرخش‌ها در یک صفحه میندلینی در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲: چرخش‌ها در یک صفحه میندلین

$$\mathbf{C}(\zeta) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\zeta) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\zeta) w_i} \quad (5)$$

$\mathbf{C}(\zeta)$ منحنی نزیز از درجه p می‌باشد که توسط نقاط کنترل \mathbf{P}_i و وزن‌های w_i تعریف شده است. با افزایش یا کاهش مقدار w_i ، منحنی به سمت نقطه کنترل \mathbf{P}_i کشیده و یا از نقطه کنترل \mathbf{P}_i دور می‌شود. با توجه به رابطه (۵) اگر تمامی وزن‌ها یکسان باشند، یک منحنی نزیز به یک منحنی بی‌اسپلاین تبدیل می‌شود.

در نهایت یک سطح نزیز که در جهت ζ از درجه p و در جهت η از درجه q می‌باشد، با رابطه (۶) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{S}(\zeta, \eta) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (6)$$

در عبارت فوق، $\mathbf{P}_{i,j}$ شبکه‌ای $m \times n$ از نقاط کنترل می‌باشد. همچنین $w_{i,j}$ وزن‌های مربوط به هر نقطه کنترل $\mathbf{P}_{i,j}$ و $N_{i,p}(\zeta)$ و $N_{j,q}(\eta)$ توابع پایه بی‌اسپلاین هستند که به صورت رابطه (۳) بر روی بردارهای گرهای تعریف می‌شوند.

اینک در رابطه (۶) اگر توابع پایه نسبی تکمای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_{i,j}(\eta, \xi) = \frac{N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (7)$$

در نتیجه، خواهیم داشت [۸]:

$$\mathbf{S}(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\zeta, \eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (8)$$

۳- اصول کلی در تحلیل ایزوژئومتریک

چهارچوب کلی استفاده از شیوه ایزوژئومتریک مبتنی بر اصول زیر است:

۱- شبکه اجزا با ضرب بردارهای گرهای حاصل می‌شود.
۲- اجزا از تقسیم دامنه، توسط دهانه‌های گرهی حاصل می‌شوند.

۳- هندسه مسئله با مشارکت نقاط کنترل و توابع پایه نزیز، تولید می‌شود.



همان طور که قبلاً اشاره شد توابع $R_{i,j}$ همان توابع پایه‌ای نزیز می‌باشند. این توابع عملکردی مانند توابع شکل در اجزای محدود دارند. مطابق آنچه در مورد این توابع در فصل دوم اشاره شد این توابع عموماً در دستگاه مختصات نرمالی مانند $1 \leq \zeta, \eta \leq 0$ محاسبه می‌شوند.
بنابراین، هندسه و میدان حل به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\mathbf{x}(\zeta, \eta) = \mathbf{R}\mathbf{P} \quad \zeta, \eta \in \Omega_{patch} \quad (18)$$

$$\mathbf{u}(\zeta, \eta) = \mathbf{R}\mathbf{d} \quad \zeta, \eta \in \Omega_{patch} \quad (19)$$

که

$$\Omega_{patch} = \{(\zeta, \eta) | \zeta \in [\zeta_1, \zeta_{m+p+1}], \eta \in [\eta_1, \eta_{n+q+1}]\}$$

فرم ماتریسی $P_{i,j}$ و $R_{i,j}$ را می‌توان با نگاشت زیر، از زیر نویس‌های i, j به k بدین صورت تغییر داد:

$$k = j + (i-1)n \quad \text{with } k = 1, 2, \dots, m \times n \quad (20)$$

بنابراین نقاط کنترلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{P} = [P_1^x, P_1^y, P_2^x, P_2^y, \dots, P_{m \times n}^y]^T \quad (21)$$

مقادیر میدان حل در نقاط کنترلی، که متغیرهای کنترلی می‌باشند، در این فرمول‌بندی جابجایی‌ها می‌باشند که می‌توان آن‌ها را مانند نقاط کنترلی در فرم برداری به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{d} = [d_1^w, d_1^{\theta_x}, d_1^{\theta_y}, d_2^w, d_2^{\theta_x}, d_2^{\theta_y}, \dots, d_{m \times n}^{\theta_y}]^T \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & \dots & R_{m \times n} & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 & R_2 & 0 & \dots & 0 & R_{m \times n} & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & R_2 & \dots & 0 & 0 & R_{m \times n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

کرنش برشی ϵ_s و کرنش خمی ϵ_b ، به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\epsilon_b = z\mathbf{B}_b\mathbf{d}, \quad \epsilon_s = \mathbf{B}_s\mathbf{d} \quad (24)$$

ماتریس کرنش‌های \mathbf{B}_b و \mathbf{B}_s برای قسمت‌های خمی و برشی با مشتق‌گیری از توابع پایه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & R_{1,x} & 0 & \dots & 0 & R_{m \times n, x} & 0 \\ 0 & 0 & R_{1,y} & \dots & 0 & 0 & R_{m \times n, y} \\ 0 & R_{1,y} & R_{1,x} & \dots & 0 & R_{m \times n, y} & R_{m \times n, x} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} R_{1,x} & R_1 & 0 & \dots & R_{m \times n, x} & R_{m \times n} & 0 \\ R_{1,x} & 0 & R_1 & \dots & R_{m \times n, x} & 0 & R_{m \times n} \end{bmatrix} \quad (26)$$

در تحلیل صفحات همسانگرد با استفاده از تئوری میندلین مرتبه اول، با صرفنظر از توان‌های مرتبه سه و بالاتر گرادیان تغییر مکان، انرژی کرنشی صفحه، به صورت زیر نوشته می‌شود:[۹]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b dV + \frac{\alpha}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s dV \quad (14)$$

کرنش‌های برشی $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ و خمی $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \theta_x + w_{,x} \\ \theta_y + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (15)$$

در اینجا، \mathbf{D}_b و \mathbf{D}_s ماتریس‌های ویژگی مصالح خمی و برشی می‌باشند و عبارتند از:

$$\mathbf{D}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{E}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

در رابطه انرژی کرنشی صفحه، سه متغیر مستقل وجود دارد و با کمینه کردن این انرژی نسبت به این سه متغیر، مجھولات مستقل حاصل گردیده و سایر متغیرهای وابسته نیز قابل محاسبه خواهد بود. در نتیجه لازم می‌باشد که این سه متغیر، با استفاده از گسسته سازی تقریب زده شود. این عمل در ایزوژئومتریک با استفاده از مفهوم سطوح در نزیز صورت می‌گیرد.

در تحلیل ایزوژئومتریک، دامنه مسئله به تعدادی ناحیه و هر ناحیه به تعدادی دهانه گرهی یا المان تقسیم می‌شود. با این وجود خیلی از دامنه‌های پیچیده را می‌توان با یک ناحیه نشان داد. همان‌طور که اشاره شد برخلاف روش‌های کلاسیک اجزای محدود، که برای تعریف هندسه و فضای پارامتری تحلیل از دو محیط متفاوت استفاده می‌کنند، در روش ایزوژئومتریک تعریف هندسه و فضای پارامتری مورد نیاز تحلیل هر دو در محیط نزیز صورت می‌گیرد. که این نکته یکی از مزایای مهم این روش نسبت به اجزای محدود می‌باشد.



تعداد نقاط مورد نیاز برای انتگرال‌گیری به شیوه گاوس، بستگی به مرتبه توابع پایه نربز دارد. ذکر این نکته ضروری است که شبکه فیزیکی تنها یک تصویر از دهانه‌های گرهی در فضای فیزیکی می‌باشد. برای بهبود شبکه^۱ در تحلیل ایزوژئومتریک سه فناوری وجود دارد: بهبود شبکه h یا افزودن به گره‌ها، بهبود شبکه p یا افزایش درجه^۲ و بهبود شبکه k ^۳ که می‌توان برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۷] مراجعه نمود.

۵- مثال‌های عددی
در این پژوهش، یک صفحه میندلین با ضخامت t و شکل‌های مختلف، تحت شرایط مرزی گوناگون در نظر گرفته شده است. تحلیل استاتیکی این صفحه با فرض به کار بردن مصالحی با ضریب ارجاعی $E=2e11N/m^2$ و $\nu=0.3$ انجام شده است. درجه توابع نربز، ضریب پواسون در هر جهت برابر با دو انتخاب شده و مقدار ضریب تصحیح برشی برابر با $\mu=5/6$ می‌باشد.

صفحه مستطیلی
یک صفحه مستطیلی با طول a ، عرض b و ضخامت t ، تحت بار عرضی یکنواخت P با شرایط مرزی متفاوت بررسی شده است. جابجایی عرضی به صورت بدون بعد با رابطه (۲۸) مشخص می‌شود [۱۰]:

$$\bar{w} = \frac{D w_{\max}}{P a^2 b^2} \quad (31)$$

که در آن، D سختی خمشی صفحه مطابق زیر است:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (32)$$

در ابتدا نیاز است که تعداد نقاط کنترل مناسب برای تحلیل عددی مناسب، محاسبه شود. به این منظور روش ایزوژئومتریک با توزیع نقاط کنترل متفاوت پیاده‌سازی شده است.

در جدول ۱، روند همگرایی جابجایی‌های عرضی بدون بعد صفحه‌ای به ابعاد $a=b=10m$ و ضخامت t ، تحت

با جایگذاری روابط فوق در رابطه ۱۴، انرژی کرنشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \iint_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dz d\Omega \mathbf{d} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{d}^T \iint_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dz d\Omega \mathbf{d} \quad (27)$$

در نتیجه ماتریس سختی میندلینی برای یک ناحیه، از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\mathbf{K}_{patch} = \frac{t^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b |\mathbf{J}| d\tilde{\Omega} + \alpha t \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s |\mathbf{J}| d\tilde{\Omega} \quad (28)$$

در رابطه بالا، $\tilde{\Omega}$ فضای پارامتریک و \mathbf{J} ماتریس ژاکوبین است که فضای پارامتریک را به فضای فیزیکی می‌نگارد.

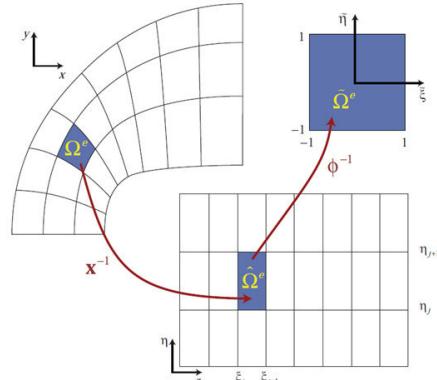
همچنین بردار نیروهای گره‌ای معادل بار اعمالی گستردۀ \mathbf{P} به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{f}_{patch} = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{R}^T \mathbf{P} |\mathbf{J}| d\tilde{\Omega} \quad (29)$$

متغیرهای کنترلی را می‌توان با حل معادله تعادل گسته‌سازی شده زیر به دست آورد:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (30)$$

میدان حل در هر نقطه از فضای فیزیکی، با استفاده از رابطه (۱۹) تقریب زده می‌شود. برای انتگرال‌گیری عددی، از شیوه گاوس در هر المان (دهانه گرهی) استفاده می‌شود.



شکل ۳: فضای فیزیکی، پارامتری و انتگرال‌گیری یک المان نربز واقع در یک زیردامنه [۱]

Mesh refinement¹
h-refinement or knot insertion²
p-refinement or order elevation³
k-refinement⁴

$$w = -\frac{q}{64D} a^4 \quad (33)$$

رابطه فوق برای هر دو نوع صفحه نازک و ضخیم برقرار است.

برای صفحات با شرایط تکیه‌گاهی ساده جابجایی عرضی بیشینه عبارت است از:

$$w = -\frac{q}{64D} (a^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 + \lambda \right) \quad (34)$$

در اینجا λ عبارت است از:

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{thin} \\ \frac{8}{5} \frac{8+\nu+\nu^2}{1-\nu^2} h^2 & \text{thick} \end{cases} \quad (35)$$

مسأله‌ای که برای بررسی عملکرد ایزوژئومتریک در تحلیل صفحات خمشی دایروی مورد توجه قرار می‌گیرد، صفحه‌ای با شعاع $a=1m$ و ضخامت t تحت بار عرضی $P=1KPa$ می‌باشد که در شرایط مرزی متفاوت قرار خواهد گرفت.

جدول ۲، روند همگرایی جابجایی عرضی بیشینه را در یک صفحه دایروی با ضخامت و شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۲: همگرایی جابجایی عرضی بیشینه در شیوه ایزوژئومتریک در صفحه دایروی میندلینی با شرایط مرزی متفاوت تحت فشار عرضی یکنواخت

t/a	ncp	ssss	ccccc
0.05	81	-2.7902e-5	-6.822e-6
	100	-2.7906e-5	-6.822e-6
	121	-2.7907e-5	-6.823e-6
	169	-2.7907e-5	-6.823e-6
	Exact(mindlin)	-2.8077e-5	-6.825e-6
0.1	Exact(Kirchhoff)	-2.7825e-5	-6.825e-6
	ABAQUS	-2.778e-5	-6.870e-6
	81	-3.6039e-6	-8.508e-7
	100	-3.6039e-6	-8.517e-7
	121	-3.6040e-6	-8.528e-7
	169	-3.6040e-6	-8.528e-7
	Exact mindlin	-3.6040e-6	-8.531e-7
	ABAQUS	-3.902e-6	-8.885e-7

بار عرضی $P=10Pa$ ، با افزایش تعداد نقاط کنترل (ncp) و شرایط مرزی گوناگون، در مقایسه با جواب دقیق، مشاهده می‌شود.

جدول ۱: همگرایی جابجایی عرضی بدون بعد در شیوه ایزوژئومتریک در صفحه مربعی میندلینی با شرایط مرزی

متفاوت تحت فشار عرضی یکنواخت

t/a	ncp	ssss	ccccc
0.1	7x7	0.4192	0.1404
	11x11	0.4270	0.1492
	13x13	0.4270	0.1492
	15x15	0.4272	0.1497
	Exact[11]	0.4273	0.1499
0.001	7x7	0.3893	0.1132
	11x11	0.4057	0.1260
	13x13	0.4057	0.1261
	15x15	0.4058	0.1261
	Exact[11]	0.4062	0.1265

صفحات دایروی

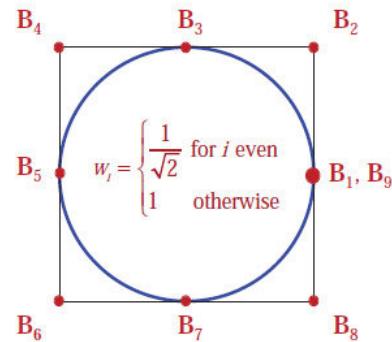
در عمل کاربردهای متعدد از صفحات مشاهده می‌شود که در آن شکل ظاهری سیستم به شکل دایره است. استفاده از شیوه ایزوژئومتریک در حل اشکالی مانند دایره بسیار مناسب می‌باشد. در شیوه‌ای مانند اجزای محدود برای تقریب مناسب یک منحنی دایروی، از تعداد زیادی گره استفاده می‌شود. اما در شیوه ایزوژئومتریک، همان‌گونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود برای رسم دقیق یک منحنی دایروی، می‌توان از نقاط کنترل کمی به عنوان نمونه، نه نقطه کنترل استفاده نمود [۱]، بدون این‌که در درجه دلخواه منحنی، تغییری ایجاد شود، که خود باعث کاهش ابعاد دستگاه معادلات، کاهش زمان حل مسأله و انطباق مدل هندسی و محاسباتی می‌شود.

جابجایی عرضی بیشینه برای صفحات دایروی با توجه به بارگذاری، ضخامت و شرایط تکیه‌گاهی متفاوت می‌باشد [۱۲].

برای صفحات تحت فشار عرضی یکنواخت q و با شرایط تکیه‌گاهی گیردار جابجایی عرضی بیشینه با رابطه زیر به دست می‌آید:

- [2] Kagan P, Fischer A, Bar-Yoseph PZ (1998) New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. *Int. J. numer. Methods Engrg.* 41: 435-458.
- [3] Hollig K, Reif U, Wipper J., 2001. Weighted extended B-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 39(2): 442–462.
- [4] Kagan P, Fischer A, Bar-Yoseph PZ .,2003. Mechanically based models: adaptive refinement for Bspline finite element. *Int. J. numer. Methods Engrg.* 57:1145–1175.
- [5] Leissa, A.J., 1969. *Vibration of plates*. NASA.
- [6] Mindlin R.D., Schaknow, A., Deresiewicz, H., 1956. Flexural vibration of rectangular plates. *Applied Mechanics*. 23, pp.430-436.
- [7] Piegl, L. Tiller, W., 1997. *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)*. Springer- Verlag, New York.
- [8] Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., and Hughes, T.J.R., 2006. “Isogeometric analysis of structural vibrations”. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195, pp.5257–5296
- [9] Yijun.Liu.1997, *Introduction to Finite Element Method*, University of Cincinnati.
- [10] Arthure P.B, Richard J.Schmidt., 2010. *Advanced Mechanics Of Materials*. Wiley.
- [11] Ferreira, A.J.M., 2010. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis Solids and Structures*. Springer.
- [12] Piaras Kelly., 2010. *Solid Mechanics*. On the <http://www.des.auckland.ac.nz/uo/a/piaras-kelly>.

برای بهبود شبکه می‌توان از سه فناوری بهبود شبکه نام برده شده در بخش‌های قبلی استفاده نمود، که در این مثال، افزایش گره به کار برده شده است.



شکل ۴ : ترسیم یک دایره در شیوه ایزوژئومتریک

۶- نتیجه گیری

نتایج عددی در تحلیل استاتیکی صفحات میندلینی ایزوژئومتریک، با شکل و شرایط مرزی متفاوت با استفاده از شیوه ایزوژئومتریک به دست آمداند. همان‌گونه که در جداول نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود، سازگاری خوبی بین شیوه ایزوژئومتریک و حل دقیق و نیز نرم روش اجزای محدود وجود دارد. در شیوه ایزوژئومتریک به دلیل استفاده از توابع بی-اسپلین با پیوستگی بالا قفل برشی اتفاق نمی‌افتد و برخلاف شیوه اجزای محدود، دیگر نیازی به استفاده از انتگرال‌گیری کاهش یافته نمی‌باشد. مدل‌سازی دقیق‌تر هندسه و عدم نیاز به تولید شبکه و کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات و زمان حل مسائل از برتری‌های دیگر شیوه ایزوژئومتریک می‌باشند.

۶- مراجع

- [1] Hughes, T.J.R., Cottrell, JA., Bazilevs, Y., 2005. *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. *Comput. Methods*, WILEY, USA.