

همایش ملی مهندسی مکانیک

NATIONAL CONFERENCE ON MECHANICAL ENGINEERING

۱۳۹۱ اسفندماه

کوایی ارائه مقاله



پذیرش کوایی می شود مقاله نوینده (کان)

نوشین نبی زاده، ناصر خیریت مقدم، سیروس نصیری‌ای، بهروز حسni، احمد رضا نوروزی

با عنوان

تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات خمی با استفاده از تئوری میدلین و روش ایزوژنومیک

در همایش ملی مهندسی مکانیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق پذیرفته و ارائه شده است.

کمیته برکناری کترانس از شرکت و ارائه مقاله توسط نوینده (کان) قادرانی نموده و آرزوه مند توفيق و سرمهندی

روز افرون ایشان می باشد.

دکتر حسین اشار

دکتر امیر رفایی اسکونی

دیپارتمانی همایش

دیپارتمانی همایش

تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات خمشی با استفاده از تئوری میندلین و روش ایزوژئومتریک

نوشین نسبی زاده^{۱*}، ناصر ظرفی مقدم^۲، سیروس نصیرابی^۳، بهروز حسنی^۴، احمد رضا نوروزی^۵

^۱دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، noushin_nasabizadeh@yahoo.com

^۲عضو هیئت علمی گروه عمران، دانشکده فنی و حرفه ای شهید محمد منتظری، nasser_zarif@yahoo.com

^۳عضو هیئت علمی گروه عمران ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، c.nasirai@mshdiau.ac.ir

^۴عضو هیئت علمی گروه مکانیک ، دانشگاه فردوسی مشهد، b_hassani@iust.ac.ir

^۵دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، a.r.norozi@mshdiau.ac.ir

گفت که توسعه این روش در سال های گذشته و وجود نرم افزارهای متعدد تجاری سبب کاربرد وسیع این روش در علوم مختلف از جمله در علوم سازه و مکانیک شده است. اما، باید دانست که برتری های مهمی مانند سازمان یافته بودن روش اجزای محدود در یافتن توابع تقریب زننده، مدل سازی شکل های پیچیده، تبدیل به الگوریتم ها و برنامه های رایانه ای و نیز پیشرفت سریع رایانه ها، از علل فراگیر شدن استفاده از این روش می باشد. روش اجزای محدود دارای کاستی هایی نیز می باشد. مثلاً با این که این روش توانایی مدل سازی اشکال پیچیده را دارا می باشد ولی برای بالا رفتن دقت لازم است که تعداد معادلات حاکم شده و گاه حل مسایل ناممکن و یا بسیار سخت و زمان بر می شود. تولید شبکه اجزای محدود نیز از مشکلات دیگر روش مذکور است که تاکنون وقت زیادی را از پژوهشگران برای تولید روش های پایدار و کارآمد تولید شبکه گرفته است. به طور میانگین برای حل یک مساله اجزای محدود حدود هشتاد درصد زمان حل مساله صرف تولید شبکه اجزای محدود می شود^[۱]. روش عددی حل مسایل با استفاده از اسپلین ها روشی جدید است که مفاهیم آن در سال ۲۰۰۵ برای اولین بار توسط هیو^[۱] و همکارانش، در دانشگاه تکنیک و در قالب یک مقاله با نام روش ایزوژئومتریک معرفی گردید. این روش بر پایه درک هندسی از مساله و تولید جواب های آن با استفاده از بی اسپلین ها و نوع توانمندتر آن یعنی نریز^[۱] باشد. روش ایزوژئومتریک علاوه بر داشتن مزایای روش اجزای محدود، شماری از کاستی های آن را نیز چیره شده است. در واقع مدل سازی دقیق تر شکل مساله و شرایط تکیه گاهی در مقایسه با روش اجزای محدود، که شرایط تکیه گاهی فقط در محل گره قابل اعمال است، عدم نیاز به تولید شبکه و کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات از مزایای روش ایزوژئومتریک می باشد^[۱].

چکیده
در این مقاله، استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک در حل مسائل ارتعاشات آزاد صفحات خمشی با استفاده از تئوری میندلین مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا فرمول بندي روابط ایزوژئومتریک ارتعاشات آزاد صفحات خمشی میندلینی استخراج و سپس کد کامپیوتری مربوطه تهیه شده است. نهایتاً چند مساله توسط برنامه مذکور حل و دقت و کیفیت جواب های روش ایزوژئومتریک در مقایسه با دیگر روش های متدالو عددي مورد مقایسه و بحث قرار گرفته است.

واژه های کلیدی

تحلیل ایزوژئومتریک، تکنیک نریز، ارتعاشات آزاد، تئوری میندلین

مقدمه

امروزه برای حل مسایل پیش رو، مهندسین و پژوهشگران، ناگزیر به حل معادلاتی می شوند که اغلب به شکل دیفرانسیل می باشند. در واقع با حل این معادلات دیفرانسیل مساله تحلیل شده و به جواب مورد نظر دست می یابند. اما چون تعداد محدودی از این معادلات را می توان به صورت تحلیلی حل نمود، لذا روش های حل دیگری که آن ها را با عنوان روش های عددی می شناسیم توسعه یافته اند. امروزه به کمک رایانه ها و روش های عددی موجود قادر به حل معادلات بسیار پیچیده در حوزه های متنوع علوم می باشیم. برخی از روش های عددی معروف عبارتند از تفاضلات محدود^۱، اجزای محدود^۲، نقاط محدود^۳ و روش های جدیدتر مانند روش ایزوژئومتریک^۴. این روش ها هر یک در پی دیگری آمده و دو هدف اصلی را دنبال کرده اند. این اهداف عبارتند از نخست ایجاد کارایی، دقت و سرعت بالاتر و سپس ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسایل و رفع مشکلات روش های قبلی. استفاده از روش اجزای محدود در تحلیل سازه های پیچیده و مکانیک محاسباتی به امری معمول تبدیل شده است. شاید بتوان

* نویسنده مسئول مکاتبات

^۱ Spline

^۲ T.J.R Hughes

^۳ B-spline

^۴ (NURBS)Non Uniform Rational B-spline

^۱ Finite Difference Method

^۲ Finite Element Method

^۳ Finite Point or Meshless Method

^۴ Isogeometric Method

در این پژوهش، ضمن معرفی روش ایزوژئومتریک و فرمول بندی ارتعاشات آزاد صفحات خمی، ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی و دایروی با شرایط مرزی گوناگون و ضخامت‌های مختلف بررسی شده است.

بی‌اسپلاین و نربز

بی‌اسپلاین‌ها در واقع ابزاری ریاضی هستند که می‌توانند با استفاده از اطلاعاتی اندک، منحنی‌ها و سطوح پیچیده را به صورت عددی الگو نمایند^[۶]. توابع بی‌اسپلاین چندجمله‌ای‌های پارامتری هستند که امکان الگوسازی پروفایل‌های پیچیده توسط چندجمله‌ای‌هایی با درجه پایین را امکان‌پذیر می‌سازند.

برای تولید یک منحنی بی‌اسپلاین در حالت کلی بایستی با برخی از تعاریف و مفاهیم آشنا بود که به اختصار در ادامه آمده است.

بردار گره

بردار $\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m\} = \mathbf{U}$ که شامل مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است در نظر گرفته شود. بردار \mathbf{U} بردار گره و u_i ها مقادیر گرهی نامیده می‌شوند. بازه بین گره‌ها، دهانه نام دارد که طول آن می‌تواند صفر باشد. اگر فاصله بین گره‌ها مساوی باشد، بردار گره یکنواخت نامیده می‌شود. در غیر اینصورت، این بردار غیر یکنواخت خواهد بود. چنانچه یک گره مانند u_i ، بار ظاهر شود k بار گره مضاعف با تعداد تکرار k است. اگر u_i فقط یک بار ظاهر شود یک گره ساده خواهد بود^[۶].

توابع پایه بی‌اسپلاین

درجه این تابع را با p نشان داده و با رابطه زیر تعریف می‌کنند^[۴].

$$N_{i,0}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_{i+p} - \zeta_i} N_{i,p-1}(\zeta) + \frac{\zeta_{i+p+1} - \zeta}{\zeta_{i+p+1} - \zeta_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\zeta) \quad (1)$$

در محاسبه (ζ) ، $N_{i,p} > 0$ می‌باشد.

ویژگی‌های مهم تابع بی‌اسپلاین به شرح زیر می‌باشد:

- ۱- $N_{i,p}$ یک چندجمله‌ای درجه p غیرمنفی از ζ است.
- ۲- $N_{i,p}$ یک چندجمله‌ای غیرصفر در (u_i, u_{i+p+1}) می‌باشد.
- يعني در $p+1$ فاصله گرهی با نقاط متصل‌کننده در گره‌های بین $[u_i, u_{i+p+1}]$ غیر صفر می‌باشد.

-۳- در هر فاصله گرهای (u_i, u_{i+1}) حداقل $p+1$ تابع پایه درجه p غیر صفراند. به عنوان مثال: $(\zeta), N_{i,p}, \dots, (\zeta), N_{i-p+1,p}$ (ζ) $N_{i-p,p}$ (خاصیت تاثیر محلی).

-۴- حاصل جمع همه تابع درجه p غیر صفر در فاصله (u_i, u_{i+p+1}) مساوی یک است.

صفحات در صنایع تکنولوژی مدرن از قبیل صنایع مکانیکی، هواپیما، الکتریکی، دریایی، صنایع اپتیک، صنایع هسته‌ای و مهندسی سازه کاربرد زیادی دارند بنابراین آگاهی از رفتار ارتعاشی آنها در طراحی‌ها بسیار حائز اهمیت است

اکثر کارهای منتشر شده در این زمینه، بر اساس تئوری کلاسیک کیرشهف^۹ می‌باشد. از جمله بارزترین این کارها، کار لیزا^{۱۰} در سال ۱۹۶۹ [۲] و مقالات وی می‌باشد. این تئوری که برای صفحات نازک به کار می‌رود، با وجود این که کرنش‌های برشی و اینرسی چرخشی در تعیین فرکانس‌های ارتعاشی بسیار مهم می‌باشند، از این اثرات چشم‌پوشی می‌کند. با افزایش ضخامت صفحه، تئوری کیرشهف به خاطر فرضیات مذکور با خطأ همراه می‌باشد. فعالیت‌های میندلین^{۱۱} و همکارانش در خلال سال‌های ۱۹۵۱ [۳] تا ۱۹۵۶ [۴] منجر به تدوین تئوری میندلین شد که به صورت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، برای ورق‌های نسبتاً ضخیم با در نظر گرفتن اثرات اینرسی چرخشی و تنش‌های برشی در راستای ضخامت ورق می‌باشد.

در دهه‌های گذشته، تحقیقات بسیاری بر روی ارتعاش صفحات خمی انجام شده است. یکی از اولین کارها، توسط دیو^{۱۲} و رافائل^{۱۳} در سال ۱۹۸۰ [۵] بر اساس روش ریلی ریتز به کمک توابع تیر تیموشنکوی اصلاح شده انجام شد. بعد از این تحقیق، کارهای بسیار دیگری، با روش‌هایی همچون اجزای محدود، نوار محدود^{۱۴}، روش‌های برهم نهی^{۱۵} و... انجام شد. در تمام این روش‌ها، با چشم‌پوشی کامل از مدل هندسی، تنها بر روی مدل محاسباتی کار می‌شود. این روش‌ها مستلزم در نظر گرفتن تعداد زیادی از متغیرهای طراحی می‌باشد، که این یکی از مشکلات این روش‌ها می‌باشد. از طرفی دیگر، در مسائل بهینه سازی شکل هندسی، چون حفظ پیوستگی در مزهای سازه ضروری است، در روش ایزوژئومتریک، به دلیل استفاده از سطوح نربز، برای تعریف شکل هندسی این مشکل وجود ندارد و تعداد متغیرهای طراحی مسئله کاهش می‌باشد.

در بررسی رفتار صفحات خمی، هنگامی که ضخامت صفحه کوچک می‌شود، می‌توان از اثرات اینرسی چرخشی و تغییر شکل-های برشی صرف نظر کرد و تئوری میندلین با تئوری کیرشهف سازگاری خوبی دارد، اما در روش‌های عددی، مانند اجزای محدود با انتخاب توابعی از درجات پایین، فقدان همگرایی در جواب‌ها حاصل می‌شود و پدیده قفل برشی^{۱۶} رخ می‌دهد. در روش ایزوژئومتریک، با انتخاب توابعی با پیوستگی بالا می‌توان بر این مشکل چیره شد. علاوه بر آن می‌توان در مزهای سازه، پیوستگی نیز ایجاد کرد.

Kirchhoff theory ⁹
Liessa ¹⁰
Mindlin ¹¹
Dawe ¹²
Roufeil ¹³
Finite strip ¹⁴
Super position ¹⁵
Shear_Locking ¹⁶

از تعریف نریز نتیجه می‌شود که اگر همه وزن‌ها یکسان باشند، یک منحنی نریز به یک منحنی بی-اسپلاین تبدیل می‌شود.

در نهایت یک سطح نریز که درجه p و درجه q از درجه p می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\eta, \zeta) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (4)$$

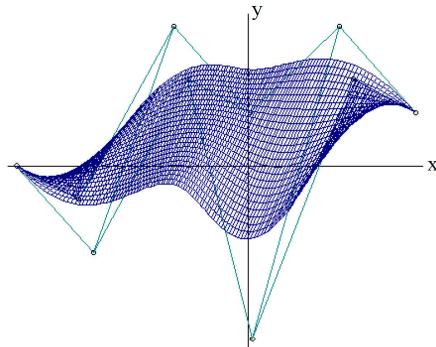
در عبارت فوق، $P_{i,j}$ شبکه‌ای از نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $w_{i,j}$ وزن‌های مربوط به هر نقطه کنترل و $N_{i,p}(\zeta)$ و $N_{j,q}(\eta)$ توابع پایه بی-اسپلاین هستند که به صورت رابطه (۴) بر روی بردارهای گرهای تعریف شده‌اند. در رابطه (۴) اگر تابع پایه نسبی قطعه‌ای را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\zeta, \eta) = \frac{N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\zeta) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (5)$$

خواهیم داشت [۶]:

$$S(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\zeta, \eta) P_{i,j} \quad (6)$$

در شکل ۲ شبکه‌ای از نقاط کنترلی و سطح نریز به دست آمده از آن در دو جهت x و y مشاهده می‌شود.



شکل ۲: شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز مربوط به آن

مقایسه میان روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک
در جدول ۱، می‌توان مقایسه‌ای میان روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک را ملاحظه کرد.

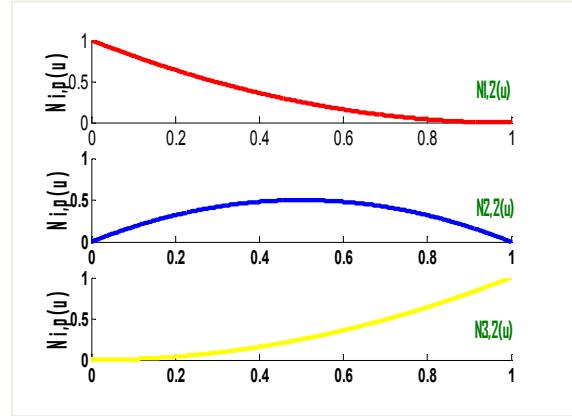
جدول ۱: مقایسه روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک [۷]

روش ایزوژئومتریک	روش اجزای محدود
نقاط کنترلی	نقاط گرهی
متغیرهای گرهی	
گره‌ها در بردارهای گرهی	شبکه اجزای محدود
عدم انجام درون‌بایی نقاط	انجام درون‌بایی نقاط
هنده‌سه دقیق	هنده‌سه تقریبی
توابع پایه نریز	توابع شکل از نوع چندجمله‌ای

۵- اگر تعداد گره‌ها $m+1$ ، درجه توابع p و تعداد نقاط کنترل، $n+1$ باشد، رابطه $m=n+p+1$ برقرار است.

۶- $N_{i,p}^{p-k}$ در یک گره با k بار تکرار، دارای پیوستگی c^{p-k} است. بنابراین تکرار باعث کاهش در پیوستگی می‌شود و افزایش درجه باعث افزایش پیوستگی می‌شود [۶].

برای نمونه، با بردار گره $\mathbf{U}=\{0,0,0,1,1,1\}$ ، توابع پایه درجه دو در شکل ۱ به نمایش درآمده است.



شکل ۱: توابع پایه $N_{i,2}(u)$ در بازه $[0,1]$ با $i=2$ در ابتدا و انتهای بازه

منحنی بی-اسپلاین

منحنی بی-اسپلاین با درجه p با (ζ) نشان داده می‌شود: [۶]

$$C(\zeta) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\zeta) P_i \quad a \leq \zeta \leq b \quad (2)$$

P_i ها نقاط کنترل^{۱۷} می‌باشند.
در اکثر مسائل و نیز در این پژوهش، $a=0$ و $b=1$ با
بار تکرار در ابتدا و انتهای بردار گرهی در نظر گرفته می‌شود.

منحنی و سطوح نریز

از آن جا که منحنی‌های بی-اسپلاین چندجمله‌ای هستند، نمی‌توانند در منحنی‌های ساده کسری، به عنوان مثال دایره‌ها و بیضی‌ها مفید باشند. بنابراین یک تعمیم منحنی‌های بی-اسپلاین، مورد نیاز است. برای بررسی این مشکل، بی-اسپلاین‌ها به منحنی‌های کسری تعمیم داده می‌شوند. یک منحنی نریز با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$C(\zeta) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\zeta) w_i P_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\zeta) w_i} \quad (3)$$

$C(\zeta)$ منحنی نریز از درجه p است که توسط نقاط کنترل P_1, \dots, P_n و بردار گره $\mathbf{U}=\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ و وزن‌های w_0, w_1, \dots, w_n تعریف شده است. با افزایش و یا کاهش مقدار وزن w_i ، منحنی به سمت نقاط کنترل P_i کشیده و یا دور می‌شود.

هارمونیک برای سیستم، فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاش با حل معادله مقدار ویژه زیر به دست می‌آیند.

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{X} = 0 \quad (13)$$

فرکانس طبیعی سیستم و \mathbf{X} مود ارتعاش سیستم است. با استفاده از انرژی جنبشی صفحه (رابطه ۱۴) و گسسته‌سازی محیط پیوسته، ماتریس جرم یک المان از صفحه را می‌توان با رابطه ۱۵ محاسبه نمود.

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho \left[t w^2 + \frac{t^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{t^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right] dA \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_A \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \end{bmatrix} \mathbf{R} dA \quad (15)$$

و با انرژی کرنشی صفحه (رابطه ۱۶) و گسسته سازی محیط پیوسته

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\epsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\epsilon}_b d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_A \boldsymbol{\epsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\epsilon}_s d\Omega \quad (16)$$

ماتریس سختی صفحه را می‌توان با رابطه زیر محاسبه نمود.

$$\mathbf{K} = \frac{t^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega \mathbf{d} + \mu t \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega \mathbf{d} \quad (17)$$

برای گسسته سازی یک محیط پیوسته در تحلیل ایزوژئومتریک از نقاط کنترلی نزیب استفاده می‌گردد. همان‌طور که اشاره شد برخلاف روش‌های کلاسیک اجزای محدود، که برای تعریف هندسه و فضای پارامتری تحلیل از دو محیط متفاوت استفاده می‌کنند، در روش ایزوژئومتریک تعریف هندسه و فضای پارامتری مورد نیاز تحلیل هر دو در محیط نزیب صورت می‌گیرد. که این نکته یکی از مزایای مهم این روش نسبت به اجزای محدود می‌باشد [۱].

با توجه به خاصیت تاثیر بازه محلی، توابع نزیب، که برای هر η و ζ فقط تعداد محدودی از این توابع غیرصفر می‌باشند [۶]، به طوری که اگر فرض کنیم η و ζ به ترتیب در دهانه‌های گره ای i و j قرار دارند (یعنی (η_i, η_{i+1}) و (ζ_i, ζ_{i+1}) به درجه توابع پایه p و q در جهت بردار گره‌ای \mathbf{H} ، باشند، آن‌گاه فقط حداکثر $(q+1)(p+1)$ تابع پایه غیر صفر وجود داشت.

در نتیجه، برای هر المان، ماتریس توابع پایه‌ای نزیب، به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\mathbf{R}}^e = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q} & 0 & 0 & \dots & R_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q} & 0 & \dots & 0 & R_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q} & \dots & 0 & 0 & R_{i,j} \end{bmatrix} \quad (18)$$

فرمول بندی تحلیل ایزوژئومتریک در مسایل صفحات خمشی صفحات جزء سازه‌های جدار نازک می‌باشند. صفحات سطوحی تخت هستند که به علت کوچک بودن بعد ضخامت t ، در مقایسه با ابعاد دیگر صفحه (a, b) ، می‌توان آن‌ها را تنها به کمک دو محور از سه محور x ، y و z بیان نمود. تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی میندلین برای صفحات الاستیک، شامل اثر تغییر شکل‌های برشی عرضی است. این تئوری بسط تئوری تیموشنکو برای تیرها در خمش است و تفاوت اصلی آن با تئوری‌هایی از نوع کیرشهف برای مقاطع نازک در این است که در تئوری میندلین خطوط عمود بر سطح میانی بعد از تغییر شکل، دیگر عمود باقی نمی‌ماند. شکل ۳ نشان دهنده این مطلب می‌باشد [۸].

بر طبق این تئوری جابجایی‌ها و چرخش‌ها به صورت زیر بیان می‌شوند، که در این روابط z فاصله از سطح میانی می‌باشد [۸]:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \quad (7)$$

چرخش سطح میانی حول محور x :

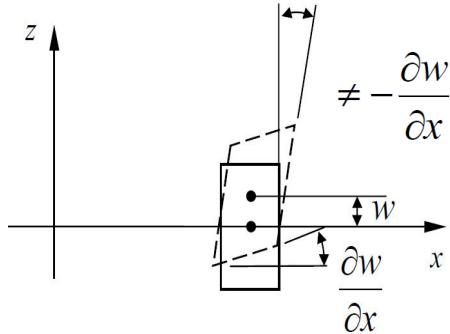
$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \quad (8)$$

جابجایی‌ها در صفحه:

$$u = -z\theta_x(x, y) \quad (9)$$

$$v = -z\theta_y(x, y) \quad (10)$$

$$w = w(x, y) \quad (11)$$



شکل ۳: عمود نماندن خطوط عمود بر سطح میانی بعد از تغییر شکل [۸]

با استفاده از اصل همیلتون [۹]، معادله حرکت صفحه را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (12)$$

که \mathbf{K} ، \mathbf{M} و \mathbf{f} به ترتیب ماتریس‌های جرم، سختی و بردار نیروهای سیستم، \mathbf{u} جابجایی‌ها و \mathbf{f} شتاب‌ها می‌باشند. با فرض حرکت

این نقاط در دستگاه مختصات نرمال یا سرندپیتی مشخص شده است، بنابراین برای این که بتوانیم از این نقاط ارائه شده بهره ببریم، بایستی از یک نگاشت استفاده کنیم. به طوری که این نگاشت مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندپیتی اجزا i ام را به دستگاه مختصات زیر دامنه نریز (ζ, η) منتقل می‌کند.

$$\zeta = \frac{1}{2}[(\zeta_{i+1} - \zeta_i)r + (\zeta_{i+1} - \zeta_i)] \quad (26)$$

$$\eta = \frac{1}{2}[(\eta_{i+1} - \eta_i)r + (\eta_{i+1} - \eta_i)] \quad (27)$$

که در روابط فوق r, s مولفه‌های مختصات نقاط در دستگاه سرندپیتی اجزا i و ζ, η مولفه‌های مختصات در دستگاه نرمال زیر دامنه نریز می‌باشد.

این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ژاکوبین به صورت زیر

می‌شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (28)$$

که

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{\partial R}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$d\zeta d\eta = \det(\mathbf{J}_2) dr ds \quad (30)$$

بنابراین می‌توان رابطه ۱۵ و ۱۷ را برای ماتریس جرم و سختی هر المان، به فرم‌های نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندپیتی اجزا نوشت:

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{R}^T(r, s) \mathbf{m} \mathbf{R}(r, s) \det(\mathbf{J}_1) \det(\mathbf{J}_2) dr ds \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e = & \frac{t^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T(r, s) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(r, s) \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 dr ds \\ & + \mu t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T(r, s) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(r, s) \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 dr ds \end{aligned} \quad (32)$$

μ ضریب تصحیح برشی می‌باشد.

در رابطه ۳۰، ماتریس \mathbf{m} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \end{bmatrix} \quad (33)$$

و در نهایت انتگرال ماتریس‌های جرم و سختی به روش گاووس، به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\mathbf{M}^e = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{R}^T(r, s) \mathbf{m} \mathbf{R}(r, s) \det(\mathbf{J}_1) \det(\mathbf{J}_2) w_i w_j$$

ماتریس کرنش سختی قسمت خمشی و برشی هر المان، به ترتیب با روابط زیر حساب می‌شوند:

$$\mathbf{B}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-p, j-q, x} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{R}_{i, j, x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{i-p, j-q, y} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{R}_{i, j, y} & 0 \\ \mathbf{R}_{i-p, j-q, y} & \mathbf{R}_{i-p, j-q, x} & 0 & \dots & \mathbf{R}_{i, j, y} & \mathbf{R}_{i, j, x} & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{B}_s^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-p, j-q} & 0 & \mathbf{R}_{i-p, j-q, x} & \dots & \mathbf{R}_{i, j} & 0 & \mathbf{R}_{i, j, x} \\ 0 & \mathbf{R}_{i-p, j-q} & \mathbf{R}_{i-p, j-q, y} & \dots & 0 & \mathbf{R}_{i, j} & \mathbf{R}_{i, j, y} \end{bmatrix} \quad (35)$$

ماتریس خواص ماده قسمت خمشی و برشی با روابط زیر حساب می‌شوند:

$$\mathbf{D}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{E}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

برای حل انتگرال ماتریس سختی و جرم، احتیاج به مشتقات \mathbf{R} نسبت به x و y در دستگاه مختصات کلی داریم. بدین منظور، برای ارتباط میان دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نریز، ژاکوبین زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (38)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (39)$$

و

$$dx dy = \det(\mathbf{J}_1) d\zeta d\eta \quad (40)$$

که در آن $\frac{\partial R}{\partial \zeta}$ و $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه‌ای نریز می‌باشند.

همچنین با توجه به این که همه پارامترهای انتگرال ماتریس سختی بر حسب مختصات فضایی پارامتری نریز می‌باشد؛ ساده‌ترین راه برای انتگرال‌گیری استفاده از همین فضایی پارامتری می‌باشد. این عمل باعث ایجاد $\det(\mathbf{J}_1)$ در انتگرال ماتریس سختی می‌شود.

در انتگرال‌گیری گاووس باستی مقدارتابع داخل انتگرال، در نقاط گاووس محاسبه شود؛ ضمن این که نقاط گاووس نقاطی از پیش تعیین شده است، که برای المان‌های مختلف از جمله المان‌های چهارضلعی ضلعی در اجزای محدود محاسبه شده است. در المان‌های چهارضلعی

ضریب سختی خمی نام دارد.

جدول ۲، شش فرکانس طبیعی بدون بعد اولیه صفحه cccc با پارامتر $t/a=0.1$ را با تعداد نقاط کنترل متفاوت در مقایسه با جواب دقیق نشان می‌دهد. جداول ۳ و ۴ نیز به ترتیب شش فرکانس طبیعی بدون بعد اولیه صفحه ssss با $t/a=0.1$ را با تعداد نقاط کنترل متفاوت در مقایسه با جواب حقیقی و حل دیگر نشان می‌دهد. همگرایی فرکانس‌های طبیعی بدون بعد به دست آمده از این روش و نیز تزدیکی آن‌ها به جواب دقیق و حل‌های دیگر، در این جداول مشاهده می‌شود.

جدول ۲: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی cccc با $t/a=0.1$

$\bar{\omega}$	Exact[12]	6×6	7×7	8×8
1	5.71	5.754	5.722	5.717
2	7.88	5.864	5.872	7.884
3	7.88	5.864	5.782	7.883
4	9.33	9.256	9.331	9.338
5	10.13	10.181	10.161	10.142
6	10.18	10.181	10.173	10.19

جدول ۳: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی ssss با $t/a=0.1$

$\bar{\omega}$	Exact[12]	6×6	7×7	8×8
1	4.37	4.559	4.348	4.372
2	6.74	7.277	7.011	6.746
3	6.74	7.275	7.011	6.746
4	8.35	9.238	8.778	8.355
5	9.22	10.087	9.887	9.226
6	9.22	10.087	9.887	9.226

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی ssss در مقایسه با حل دقیق و روش دیگر

$\bar{\omega}$	Exact[12]	HOE[12]	LOE[12]	Present
1	4.37	4.37	4.440	4.372
2	6.74	6.77	6.94	6.746
3	6.74	6.77	6.94	6.746
4	8.35	8.41	8.59	8.355
5	9.22	8.41	9.84	9.226
6	9.22	9.40	9.84	9.226

قفل برشی

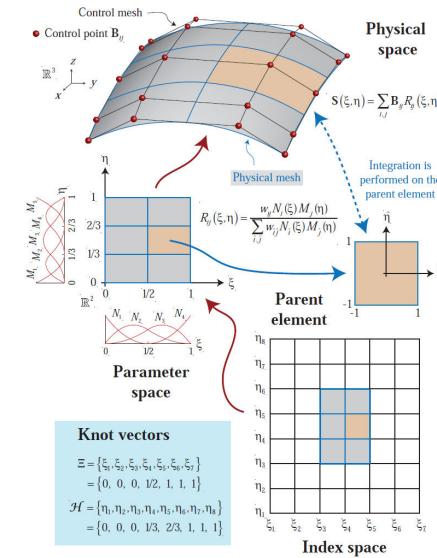
گاهی موقع امکان دارد که تنش‌ها و کرنش‌ها در یک نقطه مشخص صحیح محاسبه نگردند. علت این است که رفتار سازه، ناگهان سخت می‌شود و پدیده قفل شوندگی روی می‌دهد. در صفحات خمی، هنگامی که ضخامت کوچک می‌شود انرژی در مقایسه با انرژی خمی مهمتر و مقدارش بیشتر می‌گردد.

$$D_t \quad (33)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{t^3}{12} \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{n_1} \mathbf{B}_b^T(r,s) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(r,s) \det(\mathbf{J}_1) \det(\mathbf{J}_2) w_i w_j \quad (34)$$

$$+ \mu t \sum_{i=0}^{m_2} \sum_{j=0}^{n_2} \mathbf{B}_s^T(r,s) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(r,s) \det(\mathbf{J}_1) \det(\mathbf{J}_2) w_i w_j$$

در شکل ۴، فضای فیزیکی و پارامتری مربوط به آن و همچنین فضای انتگرال‌گیری عددی یک المان نزبز، ترسیم شده است [۱].



شکل ۴: فضای فیزیکی، پارامتری و فضای انتگرال‌گیری عددی یک المان نزبز [۱]

ارائه مثال‌ها

دو مثال صفحات مربعی و دایروی، با شرایط مرزی و ضخامت متفاوت ارائه شده اند. در تمامی حالات این دو مثال، مدول الاستیسیته $E = 2e11 N/m^2$ ، ضریب پواسون $v = 0.3$ و چگالی $\rho = 8000 Kg/m^3$ در نظر گرفته شده است. درجه توابع نزبز نیز، در هر جهت برابر با دو انتخاب شده است. لازم به ذکر است که اگر مقدار ضریب تصحیح برشی ذکر نشود، برابر با $\mu = 0.8601$ می‌باشد.

صفحات مربعی

صفحه‌های مربعی با شرایط مرزی تکیه گاهی کاملاً گیردار (cccc) و کاملاً ساده (ssss) با طول ضلع $a = 10m$ و ضخامت $t/a = 0.1$ در نظر گرفته شده است. در این مثال، فرکانس بی‌بعد صفحه برای مقایسه با حل دیگر و حل دقیق محاسبه خواهد شد.

فرکانس طبیعی بدون بعد این نوع صفحات، بدین صورت بیان می‌شود [۱] :

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega^2 \rho t a^4}{D_t} \right)^{1/4} \quad (35)$$

$$D_t = \frac{E t^3}{12(1-v^2)} \quad (36)$$

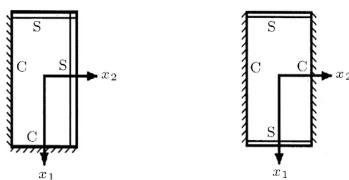
استفاده از ضرایب تصحیح برشی $\mu = 5/6, 0.8601$ به جواب‌های مناسبی دست پیدا می‌کنیم.

جدول ۷: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی cccc، با $t/a=0.1$ و ضرایب تصحیح برشی متفاوت

$\bar{\omega}$	Exact[12]	$\mu = 0.8601$	$\mu = 5/6$	$\mu = 1$
1	5.71	5.717	5.709	5.729
2	7.88	7.884	7.870	7.956
3	7.88	7.883	7.870	7.956
4	9.33	9.338	9.332	9.393
5	10.13	10.142	10.148	10.315
6	10.18	10.19	10.185	10.315

شرط مرزی دیگر

جهت نشان دادن قابلیت این روش در تحلیل صفحات، دو شرط مرزی دیگر نیز بررسی شده‌اند. این دو شرط مرزی، در شکل ۵ نشان داده شده‌اند.



شکل ۵: دو شرط مرزی scsc و sccs در صفحات مربعی

جدول ۸، شش فرکانس طبیعی بی بعد اولیه به دست آمده توسط این روش با دو شرط مرزی دیگر نشان داده شده در شکل ۵ با پارامتر $t/a=0.1$ را در مقایسه با روش بدون المان گلرکین، نشان می‌دهد.

جدول ۸: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی، با $t/a=0.1$ تحت شرایط تکیه گاهی مختلف

type	sesc	scsc	sccs	sccs
$\bar{\omega}$	EFG[11]	Present	EFG[11]	Present
1	5.17	5.17	5.03	5.04
2	6.956	6.996	7.31	7.346
3	7.682	7.662	7.33	7.350
4	8.787	7.784	8.85	8.862
5	9.302	9.298	9.70	9.720
6	10.103	10.097	9.71	9.719

در جدول فوق، نزدیکی فرکانس‌های طبیعی بدون بعد به دست آمده از این روش به روش بدون المان گلرکین، مشاهده می‌شود.

اگر درجه تابع انتخاب شده برای تحلیل مساله، کم باشد همگرایی در پاسخ‌های به دست آمده مشاهده نمی‌شود و قفل برشی اتفاق می‌افتد. این پدیده یکی از مشکلات جدی روش اجزای محدود می‌باشد. در روش ایزوژئومتریک، با انتخاب توابعی با پیوستگی بالا، می‌توان بر این مشکل چیره شد.

جداول ۵ و ۶، فرکانس‌های طبیعی بدون بعد دو صفحه cccc و sccs را با پارامتر $t/a=0.005$ را در مقایسه با جواب دقیق و دو روش بدون المان گلرکین (با تابع شکل‌های مختلف) نشان می‌دهد.

جدول ۵: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی cccc با $t/a=0.005$

$\bar{\omega}$	Exact[12]	S-MK[13]	M-K[13]	Present
1	5.999	5.942	6.687	5.948
2	8.568	8.699	10.009	8.567
3	8.568	8.699	10.009	8.567
4	10.407	10.396	11.979	10.396
5	11.472	11.597	14.152	11.466
6	11.498	11.597	14.170	11.526

جدول ۶: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه مربعی SSSS با $t/a=0.005$

$\bar{\omega}$	Exact[12]	S-MK[13]	M-K[13]	Present
1	4.443	4.446	4.686	4.447
2	7.025	7.102	7.748	7.098
3	7.025	7.102	7.748	7.098
4	8.886	8.897	10.187	8.893
5	9.935	9.977	11.136	9.979
6	9.935	9.977	11.136	9.979

در جداول فوق، نزدیکی فرکانس‌های طبیعی بدون بعد به دست آمده از این روش به جواب دقیق و روش‌های دیگر، مشاهده می‌شود.

تأثیر ضریب تصحیح برشی

در موارد بررسی شده فوق، ضریب تصحیح برشی برابر با $\mu = 0.8601$ در نظر گرفته شده است. ضریب تصحیح برشی، برای تصحیح خطاهای حاصل از فرض ثابت بودن کرنش برشی در طول ضخامت به کار می‌رود. این ضریب، علاوه بر جنس ماده و پارامترهای هندسی، به نحوه بارگذاری و شرایط هندسی مساله نیز بستگی دارد. برای بررسی و تایید این مطلب، جنس ماده و پارامترهای هندسی، مانند مثال‌های قبلی در نظر گرفته شده است و تنها ضریب تصحیح برشی تغییر می‌کند.

جدول ۷، شش فرکانس طبیعی اولیه یک صفحه مربعی cccc با $t/a=0.1$ را، با ضرایب تصحیح برشی مختلف، در مقایسه با جواب حقیقی آن نشان می‌دهد. با بررسی این جدول، مشاهده می‌شود که با

جداول ۹ و ۱۰، شش فرکانس طبیعی اولیه بدون بعد صفحه دایروی با شرایط تکیه‌گاهی بیرونی گیردار با دو حالت مختلف $t / 2r$ را در مقایسه با جواب دقیق و دو حل دیگر نشان می‌دهند.

جدول ۹: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه دایروی با شرایط تکیه‌گاهی بیرونی گیردار و $t / 2r = 0.1$

$\bar{\omega}$	Exact	ANS4a[14]	ANS4b[14]	Present
1	9.24	9.2605	9.2277	9.2574
2	17.834	17.9469	17.8010	17.8756
3	17.834	17.9469	17.8010	17.8970
4	27.214	27.0345	26.6801	27.3433
5	27.214	27.6566	27.2246	27.7653
6	30.211	30.3221	29.8562	30.5832

جدول ۱۰: فرکانس‌های طبیعی بدون بعد برای صفحه دایروی با شرایط تکیه‌گاهی بیرونی گیردار و $t / 2r = 0.01$

\bar{w}	Exact	ANS4a[14]	ANS4b[14]	Present
1	10.2158	10.2572	10.2129	10.1991
2	21.2600	21.4981	21.2311	21.2212
3	21.2600	21.4981	21.2311	21.2212
4	34.8800	35.3941	34.7816	34.7781
5	34.8800	35.3941	34.7915	34.7856
6	39.7710	40.8975	39.6766	39.6718

نتایج

نتایج عددی برای تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه‌ای محاسبه شده‌اند. همان‌گونه که در جداول نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود، سازگاری خوبی بین روش ایزوفئومتریک و حل دقیق وجود دارد و قفل برشی اتفاق نمی‌افتد. فرکانس‌های طبیعی سیستم با افزایش ضخامت ورق، افزایش پیدا می‌کنند، که این پدیده ناشی از افزایش صلبیت ورق می‌باشد. این امر ناشی از این حقیقت است که انرژی خوشی ورق حساسیت بالایی نسبت به ضخامت دارد. با افزایش فرکانس‌های طبیعی صفحه، فرکانس‌های طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابند. روند کاهش فرکانس‌های طبیعی بدون بعد با افزایش ضخامت، در جداول مشاهده می‌شود. هنگامی که لبه‌های ورق مقیدتر باشند، صلبیت سازه بالاتر می‌رود و در نتیجه مقداربر فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابد.

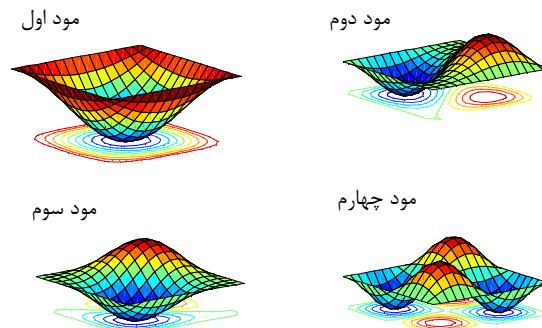
مراجع

- [1] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Comput.Methods, WILEY, USA.
- [2] Leissa, A.J., 1969. Vibration of plates. NASA.
- [3] Mindlin, R.D., 1951. "Influence rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates". Applied Mechanics. 18, pp.1031-1036.
- [4] Mindlin R.D., Schaknow, A., Deresiewicz, H., 1956. Flexural vibration of rectangular plates. Applied Mechanics. 23, pp.430-436.

شكل مودها در شرایط مرزی مختلف

به طور معمول، در تحلیل ارتعاشات صفحات خمشی، برای بررسی صحت فرکانس‌های به دست آمده، رفتار صفحه در شرایط مرزی مختلف، با شکل مودها نشان داده می‌شود.

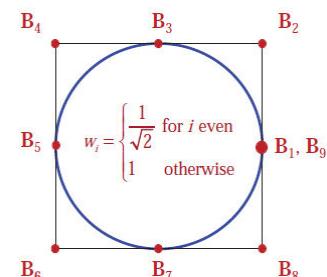
در شکل ۶، مودهای اول تا چهارم به دست آمده با روش ایزوفئومتریک یک صفحه مربعی $cccc$ ، نشان داده شده است.



شکل ۶: چهار مدار ارتعاشی اولیه یک صفحه مربعی $cccc$

صفحات دایروی

در عمل کاربردهای متعدد از صفحات مشاهده می‌شود که در آن شکل ظاهری سیستم به شکل دایره است. استفاده از روش ایزوفئومتریک در حل اشکالی مانند دایره بسیار مناسب می‌باشد. در روشنی مانند اجزای محدود برای تقریب مناسب یک منحنی دایروی، از تعداد زیادی گره استفاده می‌شود. اما روش ایزوفئومتریک، همان گونه که در شکل ۷ مشاهده می‌شود برای رسم دقیق یک منحنی دایروی، از نقاط کنترل کمی به عنوان نمونه ۹ نقطه کنترل استفاده می‌کند، بدون این که در درجه دلخواه منحنی، تغییری ایجاد کند. که این، خود باعث کاهش ابعاد دستگاه معادلات، کاهش زمان حل مساله و انطباق مدل هندسی و محاسباتی می‌شود.



شکل ۷: ترسیم یک دایره در روش ایزوفئومتریک [۱]

فرکانس طبیعی بدون بعد این نوع صفحات، بدین صورت بیان می‌شود [۱۱]:

$$\bar{\omega} = \omega r^2 (\rho t / D_t)^{1/2} \quad (40)$$

در این مثال، صفحه‌ای دایروی با شعاع $r = 5m$ و ضخامت t فرض می‌شود.

- isogeometric analysis". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199, pp.301-313.
- [11] Liu, GR. 2003. Meshfree methods:moving beyond the finite element method. CRC Press, USA.
- [12] Abbassian, F., Dawswell, DJ., and Knowles, NC.,1987. Free vibration benchmarks. NAFEMS, UK.
- [13] Tinh Quoc Bui, Minh Ngoc Nguyen, Chuanzeng Zhang. 2011, "A meshfree model without shear-locking for free vibration analysis of first-order shear deformable plates", *Applied Mechanics*. 33,pp.3364-3380.
- [14] Lee, SJ., 2004. "Free vibration analysis of plates by using a four-node finite element formulated with assumed natural transverse shear strain", *Sound and Vibration*. 278, pp.657–84.
- [5] Dawe, D.J., Roufaeil, O.L., 1980."Railiegh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates". *Journal of Sound and Vibration*. 69, pp.345-359.
- [6] Piegl, L. Tiller, W., 1997. *The NURBS Book* (Monographs in Visual Communication). Springer-Verlag, New York.
- [7] Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., and Hughes, T.J.R., 2006. "Isogeometric analysis of structural vibrations". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195, pp.5257–5296
- [8] Yijun.Liu.1997,Introduction to Finite Element Method.,University of Cincinnati.
- [9] Petyt, M., 1990. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press,England.
- [10] Hughes, T.J.R., Reali, A., Sangalli, G. 2010. "Efficient quadrature for NURBS-based