آزمون بوت استراپ فازی روی میانگین با استفاده از فاصله $D_{p,q}$

بهرام صادقپور، صدیقه رحیم پور

چکیده. در این مقاله، مساله آزمون یک فرض ساده درباره میانگین یک متغیر تصادفی فازی بررسی می شود. برای این منظور آماره آزمون را بر حسب فاصله $D_{p,q}$ بین میانگین نمونه و میانگین جامعه در فرض صفر اختیار می کنیم. با استفاده از قضیه حد مرکزی، یک آزمون مجانبی برای میانگین فازی بدست می آید که در آن توزیع مجانبی آماره آزمون، توزیع ω^2 می باشد. این توزیع تنها برای حالات خاصی شناخته شده است به همین دلیل کلاس اعداد فازی LR در نظر گرفته می شود. از آنجایی که در حالت فازی چندین نسخه از قضیه حد مرکزی وجود دارد و بعلاوه در اغلب مواقع قانون حدی به سختی بدست می آید، از این رو به نظر نمی رسد که قضیه حد مرکزی ابزار مفیدی برای استنباط روی میانگین فازی باشد. بنابراین از روش بوت استراپ استفاده می کنیم. در پایان با استفاده از شبیه سازی نشان داده می شود که روش بوت استراپ ابزار مفیدی برای آزمون فرض آماری روی میانگین متغیرهای تصادفی فازی است.

۱. مقدمه

نظریه مجموعه های فازی[۱] برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت[۲] غیر آماری (مبهم بودن و نادقیق بودن) مناسب است. این نظریه توسط پروفسور زاده[۳] در سال ۱۹۶۵ معرفی شد تا عدم قطعیت غیر آماری را شرح دهد. مفهوم متغیرهای تصادفی فازی توسط پوری[۴] و رالسکو[۵] (۱۹۸۶) بعنوان راهی برای بحث در مورد عدم قطعیت به خاطر دو عامل تصادفی بودن برآمدهای آزمایش تصادفی و نادقیق بودن این برآمدها معرفی شد.

یکی از مسائل مهم استنباط آماری، آزمون فرض می باشد. مساله آزمون فرض بر اساس داده های فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران در سال ۱۹۷۹ و در چارچوب نظریه تصمیم فازی مطرح شد. به طور خاص در مطالعات [۱و۲و۳] مساله آزمون فرض درباره میانگین یک متغیر تصادفی فازی بر اساس داده های فازی بررسی شد. بر پایه مفهوم متغیرهای تصادفی فازی و به کمک قضیه حد مرکزی، کورنر [۲] یک آزمون مجانبی برای میانگین یک متغیر تصادفی فازی ارائه داد. روش ارائه شده توسط کورنر از نظر تئوری کاربرد بسیار گسترده ای دارد اما از نظر کاربردی غیر ممکن می باشد، زیرا محاسبات بسیار پیچیده ای داشته و به پارامترهای مجهول جامعه وابسته است و بعلاوه حجم نمونه برای بدست آوردن نتایج مناسب، بزرگ می باشد. با این وجود در حالت کلاسیک راه های دیگری برای تقریب سازگار توزیع یک آماره وجود دارد که می توان آنها را به حالت فازی توسعه داد. یکی از آن روشها، روش بوت استراپ است که توسط افرون[۶] در سال ۱۹۷۹ معرفی شد. جیمنز-گمرو و همکاران [۳]، آزمون بوت استراپ را برای میانگین متغیرهای تصادفی فازی بررسی کردند.

در بخش دوم این مقاله، مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز آورده شده است. بخش بعد به بررسی آزمون فرض درباره میانگین متغیرهای تصادفی فازی می پردازد. در بخش چهارم یک مطالعه شبیه سازی انجام داده و نتایج بدست آمده در آخرین بخش مقاله آورده شده است.

۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲ در نظریه مجموعه های فازی، عضویت اعضای یک مجموعه از طریق تابع عضویت[۷] تعیین می شود. فرض کنید X مجموعه مرجع باشد، آنگاه مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X را با تابع عضویتی که به صورت زیر تعریف می شود، بیان می کنند:

$$\widetilde{A} : X \to [0,1], \tag{۱}$$

که در آن برای هر x از X، مقدار $\widetilde{A}(x)$ درجه عضویت x را در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ نشان می دهد.

---

[۱] Fuzzy Sets
[۲] Uncertainty
[۳] Zadeh
[۴] Puri
[۵] Ralescu
[۶] Efron
[۷] Membership Function

واژه های کلیدی بوت استراپ، متغیر تصادفی فازی، فاصله $D_{p,q}$، اعداد فازی LR.

تعریف ۲.۲ برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ مجموعه α-برش[۸]، A_α، از عناصری تشکیل می شود که درجه عضویت آنها در $\widetilde{A}$ کمتر از α نباشد.

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}. \tag{۲}$$

تعریف ۳.۲ مجموعه $\widetilde{A}$ از $\Re$ را یک عدد فازی گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\widetilde{A}$ نرمال باشد. یعنی $\exists\, x_0 \in \Re\,;\ \widetilde{A}(x_0) = 1$

۲. $\widetilde{A}$ محدب باشد. یعنی برای هر $x_1, x_2 \in \Re$ و هر $\lambda \in [0,1]$

$$\tilde{A}(\lambda\, x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \min\,(\ \tilde{A}\,(x_1), \tilde{A}\,(x_2)),$$

۳. $\widetilde{A}$ نیمه پیوسته بالایی با تکیه گاه فشرده باشد.

بر اساس تعریف بالا مجموعه α-برش یک عدد فازی، فاصله ای بسته می باشد که به صورت $A_\alpha = [A_\alpha^-, A_\alpha^+]$ نشان داده می شود که در آن

$$A_\alpha^- = \inf\{x \in \Re\,;\ \tilde{A}(x) \geq \alpha\}\ ,\ \ A_\alpha^+ = sup\{x \in \Re\,;\ \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}. \tag{۳}$$

مجوعه همه اعداد فازی را با $F(\Re)$ نشان می دهند. بنابر اصل توسیع[۹] برای هر $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in F(\Re)$ و هر $\lambda \in \Re$ می توان نوشت:

$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B})_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = \{a + b | a \in A_\alpha, b \in B_\alpha\}, \tag{۴}$$

$$(\lambda \odot \widetilde{A})_\alpha = \lambda\,.\,A_\alpha = \{\lambda\, a + b | a \in A_\alpha\}. \tag{۵}$$

تعریف ۴.۲ فاصله $D_{p,q}$ بین دو عدد فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ با پارامترهای $1 \leq p \leq \infty$ و $0 \leq q \leq 1$، تابعی نامنفی روی $F(\Re) \times F(\Re)$ بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_{p,q}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \begin{cases} \left[(1-q)\int_0^1 |A_\alpha^- - B_\alpha^-|^p\, d\alpha + q\int_0^1 |A_\alpha^+ - B_\alpha^+|^p d\alpha\right]^{1/p} & p < \infty \\ (1-q)\sup_{0<\alpha\leq 1}(|A_\alpha^- - B_\alpha^-|) + q\inf_{0<\alpha\leq 1}(|A_\alpha^+ - B_\alpha^+|) & p = \infty. \end{cases} \tag{۶}$$

تعریف ۵.۲ نگاشت $\widetilde{X} : \Omega \to F(\Re)$، را یک متغیر تصادفی فازی گویند اگر و تنها اگر

$$\{(\omega, x): x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},$$

که در آن $\mathcal{B}$، σ-فیلد مجموعه بورل $\Re$ است.

تعریف ۶.۲ اگر $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی باشد، مقدار مورد انتظار $\widetilde{X}$ یک زیر مجموعه فازی یکتا از $\Re$ است که (در صورت وجود) با $\widetilde{E}(\widetilde{X})$ نشان می دهند، به طوری که برای هر $\alpha \in [0,1]$ می توان نوشت:

$$(E(\widetilde{X}))_\alpha = E(X_\alpha) = [E(X_\alpha^-), E(X_\alpha^+)]. \tag{۷}$$

تعریف ۷.۲ اگر $E\left(sup_{x\in\chi_0}|x|^2\right) < \infty$ باشد، آنگاه واریانس $\widetilde{X}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$DVar(\widetilde{X}) = E(\left[D_{2,q}\left(\widetilde{X}, \widetilde{E}(\widetilde{X})\right)\right]^2), \tag{۸}$$

که در آن χ_0 بستار مجموعه α-برش می باشد.

۳. آزمون فرض برای میانگین متغیر تصادفی فازی

فرض کنید $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی باشد بطوری که $E\left(sup_{x\in\chi_0}|x|\right) < \infty$ (انتگرال پذیر و کراندار) و $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n$ نمونه تصادفی از $\widetilde{X}$ باشد، در این صورت میانگین فازی نمونه به صورت $\overline{\widetilde{X}}_n = \frac{\widetilde{X}_1 \oplus \dots \oplus \widetilde{X}_n}{n}$ محاسبه می شود.

قضیه ۱.۳ میانگین نمونه، $\overline{\widetilde{X}}_n$، برآوردگر ناریب و سازگار $\widetilde{E}(\widetilde{X})$ است [۲].

تعریف ۸.۳ عملگر کواریانس C_X از X به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(C_X g) = E\{f(X_\alpha - E(X_\alpha))g(X_\alpha - E(X_\alpha))\}\ ,\ \ f, g\ \in L_2^*(S^{d-1} \times (0,1]), \tag{۹}$$

که در آن $S^{d-1} = \{u \in \Re^d \mid \ \|u\| = 1\}$.

تعریف ۹.۳ فاصله عدد فازی $\widetilde{A}$ با عدد غیر فازی $\{0\}$ به صورت زیر می باشد:

$$\|A\|_2 := D_{2,\frac{1}{2}}(\widetilde{A}, \{0\}). \tag{۱۰}$$

قضیه ۲.۳ فرض کنید $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n$ یک نمونه تصادفی فازی با $E(\|X_1\|_2^2) < \infty$ باشد، آنگاه:

---

[۸] α -level Set

[۹] Extension Principle

$$n\, D^2_{2,\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\overline{X}}_n , \widetilde{E}(\widetilde{X}_1)\right) \xrightarrow{l} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, \xi_k^2, \qquad (۱۱)$$

که در آن ξ_k^2 متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع کای دو با یک درجه آزادی روی $\Re$ هستند [۱].

متغیر تصادفی $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, \xi_k^2$ را یک متغیر با توزیع ω^2 گویند. این توزیع تنها برای حالات خاصی شناخته شده است.

حال با استفاده از قضیه قبل می توان یک آزمون مجانبی برای فرض صفر $H_0 :\ \widetilde{E}(\widetilde{X}_1) = \tilde{\mu}_0$ در برابر فرض $H_1 :\ \widetilde{E}(\widetilde{X}_1) \neq \tilde{\mu}_0$ انجام داد. این فرض ها بر حسب فاصله $D_{p,q}$ به صورت زیر بیان می شوند:

$$H_0 :\ D^2_{2,\frac{1}{2}}(\widetilde{E}(\widetilde{X}_1), \tilde{\mu}_0) = 0 \quad , \ H_1 :\ D^2_{2,\frac{1}{2}}(\widetilde{E}(\widetilde{X}_1), \tilde{\mu}_0) > 0.$$

بنابراین فرض صفر رد می شود هرگاه: $T_n = n\, D^2_{2,\frac{1}{2}}(\widetilde{\overline{X}}_n, \tilde{\mu}_0) > t_{1-\alpha}$ که در آن $t_{1-\alpha}$ چندک $1-\alpha$ ام توزیع ω^2 می باشد.

یا به طور معادل فرض صفر رد می شود هرگاه: $p_{\text{asymp}} \leq \alpha$ که در آن $p_{\text{asymp}} = P(Y \geq t_{obs})$ و t_{obs} مقدار مشاهده شده T_n می باشد.

نکته: از آنجایی که در اغلب مواقع عملگر کواریانس C_X نامعلوم و به پارامترهای مجهول جامعه وابسته است و توزیع ω^2 فقط برای دنباله های خاصی از مقادیر ویژه شناخته شده است، لذا محاسبه $t_{1-\alpha}$ یا (p_{asymp}) کار ساده ای نمی باشد. بنابراین کلاس اعداد فازی LR را در نظر می گیریم.

تعریف ۱۰.۳ اعداد فازی LR تابع عضویتی به فرم زیر دارند:

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{l}\right) & x < m \\ 1 & x = m \\ R\left(\frac{x-m}{r}\right) & x > m, \end{cases} \qquad (۱۲)$$

که در آن L,R توابعی غیر صعودی از $\Re^+$ به [0,1] با L(0)=R(0)=1 می باشند. این اعداد را با نماد $\widetilde{A} = (m, l, r)_{LR}$ نشان می دهیم.

فاصله $D_{p,q}$ بین دو عدد فازی LR $\widetilde{A} = (m_A, l_A, r_A)_{LR}$ و $\widetilde{B} = (m_B, l_B, r_B)_{LR}$ به صورت زیر می باشد:

$$D^2_{2,\frac{1}{2}}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (m_A - m_B)^2 + L_2(l_A - l_B)^2 + R_2(r_A - r_B)^2$$
$$+ 2(m_A - m_B)\big(R_1(r_A - r_B) - L_1(l_A - l_B)\big),$$

که در آن

$$L^{(-1)}(\alpha) = sup\{x \in \Re \ ;\ L(x) \geq \alpha\}\ ,\ \ R^{(-1)}(\alpha) = sup\{x \in \Re\ ;\ R(x) \geq \alpha\},$$
$$L_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 L^{(-1)}(\alpha)\ d\alpha \quad , \quad L_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 (L^{(-1)}(\alpha))^2\ d\alpha.$$

R_1 و R_2 هم به طور مشابه تعریف می شوند.

فرض کنید m, l, r سه متغیر تصادفی حقیقی مقدار با $P(l \geq 0) = P(r \geq 0) = 1$ باشند، یک عدد تصادفی فازی LR به صورت $\widetilde{X} = (m, l, r)_{LR}$ تعریف می شود. برای آنکه $E(\|X\|_2^2) < \infty$ ، باید $E(r^2), E(l^2), E(m^2) < \infty$ و $L_2, R_2 < \infty$ باشند.

قضیه ۳.۳ فرض کنید $\widetilde{X} = (m, l, r)_{LR}$ یک عدد تصادفی فازی LR با $E(\|X\|_2^2) < \infty$ باشد. آنگاه مقادیر ویژه عملگر کواریانس C_X با مقادیر ویژه ماتریس زیر برابر است [۲].

$$K_X = \begin{pmatrix} C_{mm} - L_1 C_{lm} + R_1 C_{rm} & L_2 C_{lm} - L_1 C_{mm} & R_1 C_{mm} + R_2 C_{rm} \\ C_{lm} - L_1 C_{ll} + R_1 C_{rl} & L_2 C_{ll} - L_1 C_{lm} & R_1 C_{lm} + R_2 C_{rl} \\ C_{rm} - L_1 C_{rl} + R_1 C_{rr} & L_2 C_{rl} - L_1 C_{rm} & R_1 C_{rm} + R_2 C_{rr} \end{pmatrix}, \qquad (۱۳)$$

که در آن برای هر $z, y \in \{m, l, r\}$ ، $C_{zy} = E(z - Ez)(y - Ey)$.

برای محاسبه $t_{1-\alpha}$ یا p-مقدار مجانبی باید مراحل زیر طی شود:

۱) ماتریس K_X را از داده ها برآورد می کنیم ($\widehat{K}_X$).

۲) توزیع Y را با $\hat{Y} = \sum_{k=1}^{3} \hat{\lambda}_k\, \xi_k^2$ تقریب می زنیم که $\hat{\lambda}_1 , \hat{\lambda}_2 , \hat{\lambda}_3$ مقادیر ویژه $\widehat{K}_X$ می باشند.

۳) توزیع $\hat{Y}$ را با روش های زیر تقریب می زنیم [۴]:

a) $\hat{\lambda}\, \chi_r^2$ که در آن $r = rank(\widehat{K}_X)$ و $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^{3} \hat{\lambda}_k}{r}$ و χ_r^2 متغیر تصادفی کای دو با r درجه آزادی است.

b) $\hat{\lambda}_{(1)}\, \chi_r^2$ که در آن $\hat{\lambda}_{(1)} \geq \hat{\lambda}_{(2)} \geq \hat{\lambda}_{(3)}$ و r مثل قبل می باشد.

c) $\hat{\lambda}\,(1+\theta^2)\,\chi^2_{\nu}$ که در آن r و $\hat{\lambda}$ مثل قبل بوده و $\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3}(\hat{\lambda}_{(i)}-\hat{\lambda})^2}{r\,\hat{\lambda}}$ و $\nu = \frac{r}{1+\theta^2}$.

۱.۳ آزمون بوت استراپ فازی

فرض کنید که $\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_n$ متغیرهای تصادفی فازی $i.i.d$ باشند. برای $\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,\dots,\widetilde{X}_n$ داده شده، فرض کنید $\underline{\widetilde{X}}^* = (\widetilde{X}_1^*,\dots,\widetilde{X}_n^*)$ یک نمونه بوت استراپ از آن باشد. یعنی $\widetilde{X}_1^*,\dots,\widetilde{X}_n^*$ متغیرهای تصادفی فازی $i.i.d$ هستند به طوری که $P_*(\widetilde{X}_1^* = \widetilde{X}_j) = \frac{1}{n}\ ,\ j=1,2,..,n$

که در آن P_* نشان دهنده احتمال بوت استراپ است. یعنی احتمال شرطی وقتی که نمونه $\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,\dots,\widetilde{X}_n$ داده شده است.

فرض کنید $T_n^* = n\,D^2_{2,\frac{1}{2}}(\overline{\widetilde{X}}_n^*,\overline{\widetilde{X}}_n)$ و $\overline{\widetilde{X}}_n^* = \frac{\widetilde{X}_1^*\oplus\dots\oplus\widetilde{X}_n^*}{n}$. توزیع شرطی T_n^* وقتی $\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,\dots,\widetilde{X}_n$ داده شده باشد را توزیع صفر بوت استراپ T_n می نامند.

فرض صفر را رد می کنیم هرگاه $T_n > t^*_{1-\alpha}$ که در آن $t^*_{1-\alpha}$ چندک $1-\alpha$ ام توزیع صفر بوت استراپ T_n می باشد. یا به طور معادل فرض صفر رد می شود هرگاه $p_{boot} \le \alpha$ که در آن $p_{boot} = P_*(T_n^* \ge t_{obs})$ را p-مقدار بوت استراپ گویند. در حالت کلی مقادیر $t^*_{1-\alpha}$ و p_{boot} نامعلومند اما می توان با شبیه سازی[۱۰] آنها را تقریب زد.

۴. شبیه سازی

برای مقایسه روشهای مطرح شده، یک آزمایش شبیه سازی انجام شد. در این آزمایش، اعداد فازی تصادفی LR بررسی شده و فرض شد که L(x)=R(x)=max(0,1-x) و m, l, r اعدادی تصادفی و مستقل از هم باشند به طوری که $m\sim N(0,1)$ و $l, r\sim U(0,1)$. سپس ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی به حجم n تولید کرده و هر بار مقدار مشاهده شده T_n را برای فرض صفر $H_0:\ \widetilde{E} = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{LR}$ محاسبه می کنیم. برای آزمون بوت استراپ نیز ۱۰۰۰ بار نمونه گیری را تکرار می کنیم. p-مقدارها را همان طور که در آخر بخش ۳ گفته شد تقریب زده و فراوانی نسبی p-مقدارهایی که کمتر یا مساوی α هستند را به عنوان اندازه شبیه سازی شده در نظر می گیریم. میانگین و واریانسp-مقدارها را نیز محاسبه می کنیم. نتایج بدست آمده از شبیه سازی در جدول زیر آمده است:

جدول۱. مقادیر اندازه شبیه سازی شده و میانگین و واریانس p-مقدارها برای n=۵, ۱۰, ۲۰

n	روش				mean	Var
۵	مجانبی دقیق	۰.۰۴۶۷	۰.۰۰۸	۰.۰۹۵۲	۰.۴۹۷۶	۰.۰۸۱۱۸
	بوت استراپ	۰.۰۴۴	۰.۰۰۶۴	۰.۰۸۸۴	۰.۵۰۴۹	۰.۰۷۲۴۴
	مجانبی a	۰.۰۶۱۴	۰.۰۱۱۹	۰.۱۱۷۶	۰.۵۵۱۸	۰.۱۰۷۸۲
	مجانبیb	۰.۰۰۱۱	۰	۰.۰۰۵۷	۰.۷۵۱۹	۰.۰۵۹۲۵
	مجانبی c	۰.۰۵۰۵	۰.۰۰۴۵	۰.۱۲۰۶	۰.۵۰۶۵	۰.۰۹۷۴۸
۱۰	مجانبی دقیق	۰.۰۴۸۷	۰.۰۱۱۱	۰.۰۹۹۴	۰.۴۹۲۷	۰.۰۷۹۸۸
	بوت استراپ	۰.۰۵۵۳	۰.۰۲۳۶	۰.۱۰۴۶	۰.۴۸۱۳	۰.۰۹۴۲
	مجانبی a	۰.۰۸۲۵	۰.۰۲۵۸	۰.۱۳۳۷	۰.۵۸۱۹	۰.۱۱۵۴
	مجانبیb	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۰۱	۰.۰۱	۰.۷۸۹۲	۰.۰۵۶۹۱
	مجانبی c	۰.۰۵۶۵	۰.۰۰۸۴	۰.۱۱۰۷	۰.۵۳۷۳	۰.۱۰۱۹
۲۰	مجانبی دقیق	۰.۰۴۳۹	۰.۰۰۷۳	۰.۰۹۲۴	۰.۵۰۳۸	۰.۰۷۹۳۲
	بوت استراپ	۰.۰۶۴۵	۰.۰۱۹۶	۰.۱۱۵	۰.۴۸۹۶	۰.۰۸۷۷۴
	مجانبی a	۰.۰۹۱۴	۰.۰۳۵۵	۰.۱۳۴۸	۰.۵۹۰۸	۰.۱۱۹۷۹
	مجانبی b	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۸۷	۰.۸۰۳۸	۰.۰۵۴۶
	مجانبی c	۰.۰۶۰۹	۰.۰۱۴۲	۰.۱۱۶۷	۰.۵۴۶۷	۰.۱۰۰۷۸

[۱۰] Simulation

۵. نتیجه گیری

در بخش ۲ نشان دادیم که فرض صفر برای مقادیر بزرگ فاصله بین میانگین نمونه و میانگین مفروض در فرض صفر رد می شود. برای بدست آوردن مقدار بحرانی آزمون باید توزیع صفر آماره را تقریب بزنیم اما برخی مشکلات عملی در ارتباط با تقریب مجانبی در قضیه ۲.۳ وجود دارد. نتایج بدست آمده از شبیه سازی نشان می دهد که روش بوت استراپ بهتر از سایر روشهای تقریبی عمل می کند و از نظر کاربردی بسیار ساده می باشد.

مراجع

[1] Colubi, A. (2007). ***Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy-and real-valued data***, Fuzzy Sets and Systems, doi:1016/j.fss.2007.12.019.

[2] Corner, R. (2000). ***An asymptotic α-tests for the expectation of random fuzzy variables***, J. Statist. Plann. Inference **83**, 331-346.

[3] Jimenez-Gamero, M. D., Pino-Mejias, R. and Rojas-Medar, M. A. (2004***). A bootstrap test for the expectation of fuzzy random variables***, Comput. Statist. Data Anal.

[4] Rao, J. N. K. and Scott, A. J. (1981). ***The analysis of categorical data from complex sample surveys: chi-squared tests for goodness of fit and independence in two-way tables***, J. Amer. Statist. Assoc. **76**, 221-230.

بهرام صادقپور، استادیار گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مازندران
آدرس پست الکترونیکی: **sadeghpour@umz.ac.ir**

صدیقه رحیم پور*، دانشجوی دوره کارشناسی ارشد آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مازندران
آدرس پست الکترونیکی: **rahimpour.s@gmail.com**

* سخنران