چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

استنباط آماری برروی پارامترهای توزیع گاما سه پارامتری براساس داده های کامل و داده های سانسور فزاینده نوع دو

حمیده سیدموسوی * و آرزو حبیبی راد

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
hsm1360@yahoo.com
ahabibi@um.ac.ir

چکیده. هدف این مقاله برآورد پارامترهای توزیع گاما سه پارامتری بر اساس داده های کامل و داده های سانسور فزاینده نوع دو با کمک روش درستنمایی ماکزیمم می باشد. با توجه به اینکه معادلات درستنمایی جواب صریح ندارند،باید از روش های عددی برای حل معادلات درستنمایی کمک گرفت.

۱. پیش‌گفتار

توزیع گاما به طور گسترده در موضوعات قابلیت اعتماد_طول عمر، بیمه، هواشناسی، اقلیم شناسی و بسیاری از تحقیقات فیزیکی مورد استفاده قرار می گیرد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 62F10; Secondary 62G30.
واژگان کلیدی. توزیع گاما سه پارامتری، برآورد درستنمایی ماکزیمم، سانسور فزاینده نوع دو.

* سخنران

تابع چگالی احتمال این توزیع در حالت سه پارامتری به صورت زیر می باشد

$$f(x;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{۱}{\gamma\Gamma(\beta)}(\frac{x-\alpha}{\gamma})^{\beta-۱}$$
$$\exp\{-(\frac{x-\alpha}{\gamma})\} \qquad (x>\alpha, \beta>۰, \gamma>۰). \quad (۱.۱)$$

که در آن α ، β و γ به ترتیب پارامترهای مکان، شکل و مقیاس هستند.

۲. استنباط درستنمایی در توزیع گاما سه پارامتری با داده های کامل

یک روش موفق برای استنباط درستنمایی در توزیع گاما سه پارامتری، استفاده از تغییر پارامتر می باشد. طرح پیشنهاد شده تقریبا همیشه می تواند وجود برآوردهای درستنمایی ماکزیمم را نشان دهد که از نظر عملی ارزش زیادی دارد. این روش نشان می دهد که استفاده از توزیع گاما تغییر پارامتر یافته نسبت به توزیع اصلی خود برای پیدا کردن برآوردهای درستنمایی ماکزیمم موضعی، بهتر است. در ادامه مطالعات شبیه سازی مونت کارلو نیز اثربخشی روش ارائه شده را نشان می دهد.

۱.۲. برآورد پارامترها با استفاده از روش تغییر پارامتر. تغییر پارامتر ها را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\beta=\lambda^{-۲}, \qquad \gamma=\delta|\lambda| \qquad \alpha=\mu-\delta\lambda^{-۱} \qquad (۱.۲)$$

آنگاه با اعمال آن در (۱.۱) خواهیم داشت :

$$f(x;\sigma,\mu,\lambda) = \frac{۱}{\sigma\lambda\Gamma(\lambda^{-۲})}[\lambda^{-۲}\{۱+\lambda(\frac{x-\mu}{\sigma})\}]^{\lambda^{-۲}-۱} \qquad (۲.۲)$$
$$\times\exp[-\lambda^{-۲}\{۱+\lambda(\frac{x-\mu}{\sigma})\}] \qquad (\sigma>۰, \lambda\neq۰) \qquad (۳.۲)$$

که μ,σ,λ به ترتیب پارامترهای مکان، مقیاس و شکل هستند.
معادلات درستنمایی برای(۲.۲) به شرح ذیل می باشند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\log L}{\partial\sigma} &= -\dfrac{۱}{\sigma}\sum_{i=۱}^{n}\dfrac{۱-z_i^۲}{۱+\lambda z_i}=۰ \\ \dfrac{\partial\log L}{\partial\mu} &= \dfrac{۱}{\sigma}\sum_{i=۱}^{n}\dfrac{\lambda+z_i}{۱+\lambda z_i}=۰ \\ \dfrac{\partial\log L}{\partial\lambda} &= n\{\dfrac{۲}{\lambda^۳}\psi(\dfrac{۱}{\lambda^۲})+۲\log\lambda\}+\sum\{-\dfrac{۲}{\lambda^۳}\log(۱+\lambda z_i) \\ & \quad +\dfrac{\lambda(۱+z_i^۲)+۲z_i}{\lambda^۲(۱+\lambda z_i)} \end{cases}$$

که $z_i = \frac{(x_i - \mu)}{\sigma}$ و ψ تابع دو گامایی نامیده می شود. L تابع درستنمایی و n اندازه نمونه است. از مجموع اولین و دومین معادله $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$ به دست می آید. بدین ترتیب برآورد درستنمایی پارامتر ها به صورت زیر است:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

و با قرار دادن $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0$ و $\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = 0$ برآوردهای درستنمایی ماکزیمم برای σ و μ را بدست آوریم.
از دیگر مزایای مدل تغییر پارامتر یافته این است که پیدا کردن نقطه شروع در طرح تکرار ی آسان است و σ خیلی از نقطه بهینه $\hat{\sigma}(\mu)$ به ازای λ های مختلف دور نیست .

۳. استنباط درستنمایی تابع گاما سه پارامتری تحت سانسور فزاینده نوع دو

اگر تابع چگالی احتمال توزیع گاما سه پارامتری را به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$f(y;\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}(y-\gamma)^{\alpha-1}\exp^{\frac{y-\gamma}{\beta}} \qquad \gamma < y < \infty, \beta > 0, \alpha > 0$$

آنگاه تابع لگاریتم درستنمایی ماکزیمم تحت سانسور فزاینده نوع دو برابر:

$$\begin{aligned}\log L(\theta) = \quad & const. - m\log\Gamma(\alpha) - m\alpha\log\beta - \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\gamma) \\ + \quad & (\alpha-1)\sum_{j=1}^{m}\log(y_j-\gamma) + \sum_{j=1}^{m}R_j\log[1-F(y_j)]\end{aligned}$$

که در آن

$$F(y_j) = \int_{\gamma}^{y_j} f(y)dy$$

سه معادله درستنمایی که باید به طور همزمان برای بدست آوردن برآورد درستنمایی ماکزیمم حل شوند به شرح ذیل می باشند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L}{\partial \gamma} = \dfrac{m}{\beta} - (\alpha - ۱)\sum_{j=۱}^{m} \dfrac{۱}{y_j - \gamma} + \dfrac{۱}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=۱}^{m} R_j L_j = ۰ \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \beta} = \dfrac{m\alpha}{\beta} + \dfrac{۱}{\beta^۲} \sum_{j=۱}^{m} (y_j - \gamma) + \dfrac{۱}{\sqrt{\alpha\beta^۲}} \sum_{j=۱}^{m} R_j (y_j - \gamma) L_j = ۰ \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \alpha} = -m\psi(\alpha) - m\log\beta + \sum_{j=۱}^{m} \log(y_j - \gamma) \\ \qquad + \dfrac{۱}{۲\alpha\sqrt{\alpha}\beta} \sum_{j=۱}^{m} R_j (y_j - \gamma + \alpha\beta) L_j = ۰ \end{cases}$$

که در آن $\psi(\alpha) = \dfrac{\partial \log \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}$ تابع دی گاما و $L_j = \dfrac{g(z_j)}{۱ - G(z_j)}$ تابع خطر است.

$z_j = \dfrac{y_j - \mu_y}{\sigma_y} = \dfrac{y_j - \gamma - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha}\beta}$ که تبدیل استاندارد هست و $g(z_j)$ تابع چگالی احتمال استاندارد توزیع گاماست با میانگین صفر و واریانس یک و پارامتر شکل α و $G(z_j)$ تابع توزیع تجمعی است که بصورت زیر نشان داده می شود

$$G(z_j) = \int_{-\sqrt{\alpha}}^{Z_j} g(u)du.$$

با توجه به اینکه حل معادلات فوق به طور همزمان و با وجود $\psi(\alpha)$ تابع دو گامایی بسیار مشکل می باشد از این رو حل این معادلات را با روش های عددی از جمله نیوتن رافسون انجام می دهیم.

مراجع

1. H. Hirose, *Maximum likelihood parameter estimation in the three parameter gamma distribution*(1995), 343–354.
2. Indrani basak, N.balakrishnan, *Estimation for the three parameter gamma distribution based on progressively censored data*, (2012), 305–319.
3. N.balakrishnan,A.C Cohen, *Order statistics and Inference :Estimation Methods*,Academic Press,San Digo ,1991.