

## دینامیک ناهم‌خوانی کوانتومی یک سامانه XY هایزنبرگ در حضور میدان مغناطیسی ناهمگن و برهمکنش اسپین-مدار: حالت مجانبی

محمدی، حمیدرضا<sup>۱,۲</sup>؛ نساچ پور، وحید<sup>۱</sup>؛ اخترشناس، سید جواد<sup>۱,۲,۳</sup>

<sup>۱</sup>گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

<sup>۲</sup>گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

<sup>۳</sup>گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

### چکیده

دینامیک ناهم‌خوانی کوانتومی برای یک سامانه اسپینی دوتایی که هر یک از اسپین‌ها با یک حمام گرمایی مستقل در دمای متفاوت در تعادل است، در حضور میدان مغناطیسی ناهمگن و برهمکنش اسپین-مدار، برای حالت ایستا، بررسی شده است. به روش عددی راستای بهینه اندازه‌گیری را می‌یابیم و نشان می‌دهیم که با انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای محیط می‌توان به میزان قابل توجهی از همبستگی‌های کوانتومی در حالت مجانبی دست یافت.

## Quantum discord dynamics of a two-qubit Heisenberg XY system in the presence of an inhomogeneous magnetic field and spin-orbit interaction: asymptotic state

Mohammadi, Hamidreza<sup>۱,۲</sup>; Nassajpour, Vahid<sup>۱</sup>; Akhtarshenas, S. Javad<sup>۱,۲,۳</sup>

<sup>۱</sup>Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

<sup>۲</sup>Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan

<sup>۳</sup>Department of Physics, University of Mashhad, Mashhad

### Abstract

Dynamics of quantum discord of a pair of coupled spins, each of which is in contact with an independent thermal bath at different temperature and in the presence of inhomogeneous field and spin-orbit interaction, is investigated. The effects of system and environment parameters on the amounts of quantum discord are investigated for the large asymptotic times. The results show that the asymptotic discord can be controlled by choosing suitable set of system and environment parameters.

PACS No. ۰۳.۶۷.-a, ۰۳.۶۵.Ta, ۰۳.۶۵.Ud

### مقدمه

اندازه‌گیری، حالت‌های جداپذیر هم ممکن است حاوی همبستگی-های کوانتومی باشند. بنابراین درهم‌تنیدگی نمی‌تواند همه همبستگی‌های کوانتومی را آشکار کند. «ناهم‌خوانی کوانتومی» که اولین بار بیور و زورک [۱] و همزمان ودرال و هندرسون [۲] آن را معرفی کردند، به خوبی حضور همبستگی‌های کوانتومی را در هر حالتی آشکار می‌کند.

یک سامانه کوانتومی غیر ایده‌آل با محیط اطرافش برهمکنش دارد و این برهمکنش باعث از بین رفتن همبستگی‌های کوانتومی

همبستگی‌های بین بخش‌های مختلف یک سامانه مرکب کوانتومی را می‌توان به دو دسته کلاسیکی و کوانتومی تقسیم کرد. همبستگی‌های کوانتومی برای سرعت‌بخشیدن به محاسبات کوانتومی و اطلاع‌رسانی کوانتومی بسیار حائز اهمیت هستند. درهم‌تنیدگی کوانتومی که یک پدیده غیرمحلی مکانیک کوانتومی است، نوعی از همبستگی‌های کوانتومی است که در حالت‌هایی که جداپذیر نباشند دیده می‌شود. به خاطر ویژگی‌های غیر کلاسیکی

سامانه دو کیوبیتی که هر یک بایک حمام گرمایی بطور جداگانه در تعادل است، هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ عملی، حائز اهمیت می‌باشد. به عنوان مثالی از این نوع سامانه ها می توان به دو اسپین الکترون حبس شده در دو نقطه کوانتومی جفت شده، اشاره نمود. به دلیل حرکت مداری الکترون‌ها درون نقاط کوانتومی جمله برهمکنش اسپین مدار اهمیت پیدا می‌کند و توسط ارتفاع سد بین دو نقطه کوانتومی قابل تنظیم است [۳].

در این مدل، هامیلتونی سامانه-محیط به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{B1} + \hat{H}_{B2} + \hat{H}_{SB1} + \hat{H}_{SB2} \quad (7)$$

که  $\hat{H}_S$  هامیلتونی سامانه،  $\hat{H}_{B1}$  ( $\hat{H}_{B2}$ ) هامیلتونی حمام اول (دوم) و  $\hat{H}_{SB1}$  ( $\hat{H}_{SB2}$ ) هامیلتونی برهمکنش کیوبیت اول (دوم) با حمام اول (دوم) می‌باشد.

هامیلتونی سامانه در حضور میدان ناهمگن و برهمکنش اسپین-مدار به صورت:

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2} \left( J_x \sigma_1^x \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \sigma_2^y + B_1 \sigma_1 + B_2 \sigma_2 + D \cdot (\sigma_1 \times \sigma_2) \right), \quad (8)$$

است که  $\sigma_j = \sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z$  بردار ماتریس های پاولی و  $\mathbf{B}_j$  میدان مغناطیسی در محل کیوبیت  $j$ ام،  $J_x$  و  $J_y$  ضرایب جفتیدگی و  $\mathbf{D}$  بردار «ژالوشینسکی-موریا» است [۷ و ۶ و ۵]. میدان  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{D}$  را در راستای  $Z$  فرض می‌کنیم و:  $B_1 = B + b$  و  $B_2 = B - b$  ویژه‌بردارها و ویژه‌مقادیر هامیلتونی سامانه را می‌توان به راحتی بر حسب  $B, D, b$  و پارامترهای  $J = \frac{J_x + J_y}{2}$  و

$$\chi = \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y} \quad \text{محاسبه کرد [۳].}$$

هامیلتونی حمام  $j$ ام نیز به صورت زیر است:

$$H_{Bj} = \sum_n \omega_n \hat{b}_{nj}^\dagger \hat{b}_{nj} \quad (9)$$

که  $(\hat{b}_{nj}^\dagger, \hat{b}_{nj})$  عملگرهای خلق (فنا) بوزونی حمام هستند.

هامیلتونی برهمکنش هر کیوبیت با حمام خودش در تقریب موج چرخان به صورت زیر نوشته می‌شود [۳]:

$$H_{SBj} = \sigma_j^+ \sum_n g_n^{(j)} \hat{b}_{nj} + \sigma_j^- \sum_n g_n^{*(j)} \hat{b}_{nj}^\dagger, \quad (10)$$

در اینجا برهمکنش بین سامانه و محیط، فقط بصورت اتلافی در نظر گرفته شده است و از اثرات وافازی چشم‌پوشی شده است.

می‌شود. بنابراین مطالعه دینامیک یک سامانه کوانتومی از جهت اینکه بتوان با کنترل پارامترهایی از محیط که در اختیار ماست آهنگ از بین رفتن همبستگی‌های کوانتومی را کاهش داد و یا حتی تا مرز توقف آن پیش رفت، ضروری می‌باشد.

دینامیک درهم‌تنیدگی یک سامانه اسپینی دوتایی که هر یک از دو اسپین آن با یک حمام گرمایی مستقل در تعادل است، در حضور میدان مغناطیسی ناهمگن و برهمکنش اسپین-مدار، قبلاً در [۳] مطالعه شده، و ما در این مقاله به بررسی ناهم‌خوانی کوانتومی خواهیم پرداخت.

## ناهم‌خوانی کوانتومی

ناهم‌خوانی کوانتومی به صورت اختلاف بین دو تعریف هم-ارز کلاسیکی برای اطلاعات متقابل تعریف می‌شود. آنتروپی متقابل یک سامانه دو جزئی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) \quad (1)$$

که  $\rho^A$  ( $\rho^B$ ) ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به زیرسامانه

$A$  ( $B$ ) و  $\rho^{AB}$  ماتریس چگالی سامانه کل و  $S \rho = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$  آنتروپی فون‌نویمان است. همبستگی کلاسیکی با استفاده از [۱]:

$$C_B(\rho^{AB}) = \sup \{ S(\rho^A) - S(\rho^A | \{ \Pi_k^B \}) \}, \quad (2)$$

به دست می‌آید. عمل بیشینه‌یابی بر روی تمام اندازه‌گیری‌های

برافکنشی روی سامانه  $B$  انجام می‌شود و در اینجا

$$S(\rho^A | \{ \Pi_k^B \}) = \sum_k P_k S(\rho_k^A), \quad (3)$$

آنتروپی شرطی ماتریس چگالی  $A$  مشروط به اندازه‌گیری روی  $B$  و حصول خروجی  $k$ ام می‌باشد [۱]. حالت پس از اندازه‌گیری و

احتمال حصول خروجی  $k$ ام عبارتند از:

$$\rho_k^A = \frac{\text{Tr}_B ((I \otimes \Pi_k^B) \rho^{AB} (I \otimes \Pi_k^B))}{P_k}; \quad (4)$$

$$P_k = \text{Tr} (\rho^{AB} (I \otimes \Pi_k^B)). \quad (5)$$

نهایتاً ناهم‌خوانی کوانتومی طبق معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$D_B(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - C_B(\rho^{AB}). \quad (6)$$

## مدل و هامیلتونی

این حالت را می‌توان با تبدیل یکانی محلی  $e^{-i\sigma_z\phi/2} \otimes e^{-i\sigma_z\phi/2}$  (تحت این نوع از تبدیل‌ها همبستگی‌های کوانتومی ناوردا هستند) بصورت یک حالت با درایه‌های حقیقی نوشت.

### محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی

آنتروپی شرطی سامانه پس از اندازه‌گیری برابر است با [۸]:

$$S(\rho^A | \{\Pi_k^B\}) = h_4(\bar{w}) - h_2(p_0, p_1);$$

$$p_k = \frac{1}{2}(I + \bar{y}'\hat{n}_k), w_{1,2} = \frac{2p_0 \pm |\bar{x} + T\hat{n}|}{4}, w_{3,4} = \frac{2p_1 \pm |\bar{x} - T\hat{n}|}{4}, \quad (16)$$

در اینجا  $h_n$  آنتروپی شانون  $n$  تایی،  $T$  ماتریس همبستگی سامانه کل،  $(\bar{y})\bar{x}$  بردار همدوس سامانه اول (دوم) و  $\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$  راستای اندازه‌گیری است. به روش بهینه‌سازی در [۸] می‌توان ثابت کرد که راستای بهینه باید حداقل در یکی از صفحات  $X-Z$ ،  $Y-Z$ ،  $X-Y$  باشد. ما با استفاده از روابطی که در [۸] آمده، راستای بهینه را به روش عددی بدست آورده‌ایم. نتایج نشان می‌دهند که برای محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی حالت مجانبی، اندازه‌گیری در راستای  $X$ ، اندازه‌گیری مطلوب است که این با نتایج مرجع [۹] در توافق کامل است.

### نتایج

ناهم‌خوانی کوانتومی به عنوان تابعی از  $b$  (متغیر ناهمگنی میدان مغناطیسی) در شکل ۱ برای مقادیر ثابت  $D$ ،  $B$ ،  $D$ ،  $D$ ،  $D$ ،  $D$ ، میانگین حمام‌ها ( $T_M$ ) و اختلاف دمای حمام‌ها ( $\Delta T$ ) که در این شکل مثبت فرض شده است (یعنی اندازه‌گیری روی سامانه با دمای کمتر اعمال شده است) رسم شده است. مشاهده می‌شود که در اطراف نقطه  $b=0$  بیشترین میزان ناهم‌خوانی را داریم. همچنین با کاهش اختلاف دمای حمام‌ها میزان ناهم‌خوانی افزایش می‌یابد. کاهش دمای میانگین نیز همانطور که انتظار داریم باعث افزایش ناهم‌خوانی می‌شود (شکل ۲). اگر  $\Delta T$  را منفی انتخاب کنیم (یعنی اندازه‌گیری روی سامانه با دمای بیشتر صورت گیرد) تفاوت زیادی مشاهده نمی‌کنیم (شکل ۳).

در رژیم برهمکنش ضعیف و در تقریب بورن-مارکوف معادله مادر مربوط به دینامیک سامانه به صورت زیر است:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[H_S, \hat{\rho}] + \Gamma_1(\hat{\rho}) + \Gamma_2(\hat{\rho}). \quad (11)$$

که  $\hat{\rho}$   $\Gamma_j$ ها جملات اتلاف هستند. به علاوه فرض می‌کنیم که هر حمام سامانه بوزونی متشکل از بی نهایت نوسانگر هماهنگ باشد که با قدرت  $\gamma$  با سامانه جفت شده است. در ادامه فقط به پاسخ‌های مجانبی معادله (۱۱) یعنی جایی که شرایط ایستا برقرار است می‌پردازیم:

**حالت ایستا:** در شرایط ایستا جمله اول معادله (۱۱) که مربوط به تحول یکانی سامانه است اتلاف ناشی از جملات بعدی را جبران می‌کند و بنابراین داریم:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (12)$$

در این صورت ماتریس چگالی اولیه هر چه باشد، در زمان‌های مجانبی بزرگ به یک حالت قطری (در پایه های انرژی) به صورت زیر تبدیل می‌شود [۳]:

$$\rho = \frac{1}{X Y_1} \text{diag}\{X_1^+ Y_2^+, X_1 Y_2^-, X_1 Y_2^+, X_1^+ Y_2^-\}, \quad (13)$$

که در آن

$$X_\mu^\pm = \frac{1}{\xi\eta} \sum_{j=1,2} J^j (\mp\omega_\mu) (\xi\eta + J^2\chi + (-1)^j Bb);$$

$$Y_\mu^\pm = \frac{1}{\xi\eta} \sum_{j=1,2} J^j (\mp\omega_\mu) (\xi\eta + J^2\chi + (-1)^j Bb);$$

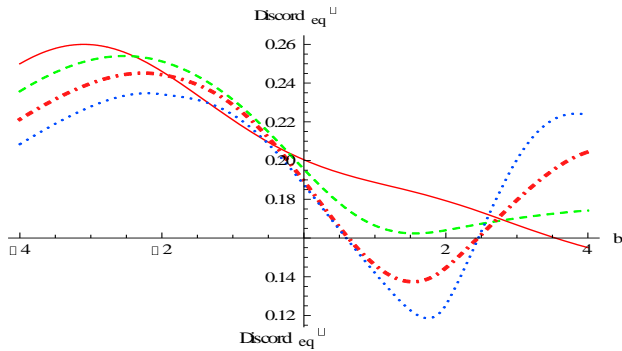
$$J^j(\omega_\mu) = \gamma_j(\omega_\mu) \left( e^{\frac{\omega_\mu}{T_j}} - 1 \right)^{-1}; \quad J^j(-\omega_\mu) = e^{\frac{\omega_\mu}{T_j}} J^j(\omega_\mu);$$

$$\omega_1 = -\omega_4 = \xi - \eta; \quad \omega_2 = -\omega_3 = \xi + \eta;$$

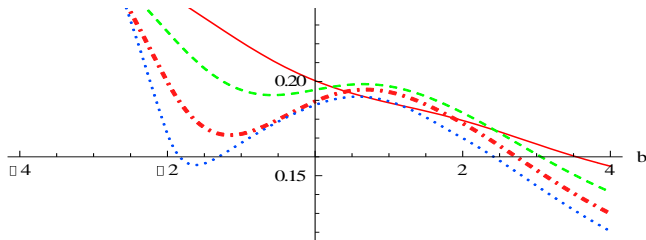
$$X_\mu = X_\mu^+ + X_\mu^-; \quad Y_\mu = Y_\mu^+ + Y_\mu^-. \quad (14)$$

که  $\omega$ ها فرکانس گذارهای درون سامانه،  $T_j$  دمای حمام  $j$ ام و  $\xi$  و  $\eta$  ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه هستند که  $\xi = (b^2 + J^2 + (D)^2)^{1/2}$  و  $\eta = (b^2 + (J\chi)^2)^{1/2}$  همچنین بطور تقریبی فرض می‌کنیم:  $\gamma_j(\omega_\mu) = \gamma_j$ . در نهایت با انجام یک تبدیل یکانی ماتریس چگالی در پایه‌های استاندارد بدست خواهد آمد که بصورت زیر است:

$$\rho^{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & \rho_{23} e^{-i\phi} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (15)$$



شکل ۴. نمودار ناهمخوانی به عنوان تابعی از  $b$ . همه چیز مشابه شکل ۱ هست جز اینکه:  $B=2$  و  $D=3$ .



شکل ۵. نمودار ناهمخوانی به عنوان تابعی از  $b$ . همه چیز مشابه شکل ۴ هست جز اینکه:  $\Delta T \rightarrow -\Delta T$ .

### نتیجه گیری

یک سامانه اسپینی دوتایی را که هر اسپین آن با یک حمام گرمایی مستقل و دمای متفاوت در تماس است، بررسی کردیم و ناهم-خوانی کوانتومی آن را در حالت ایستا محاسبه کردیم. نشان دادیم که با مقادیر کوچک  $B$  و  $b$ ، مقادیر بزرگ  $D$  و در دماهای پایین میزان قابل توجهی ناهمخوانی کوانتومی خواهیم داشت. کوچک کردن  $D$  و بالا بردن  $B$  همانند افزایش دما از میزان همبستگی‌های کوانتومی کم می‌کند.

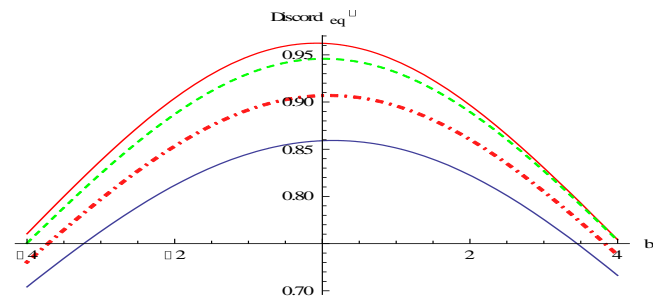
### سپاسگزاری

نویسندگان از تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان سپاس‌گزاری می‌کنند.

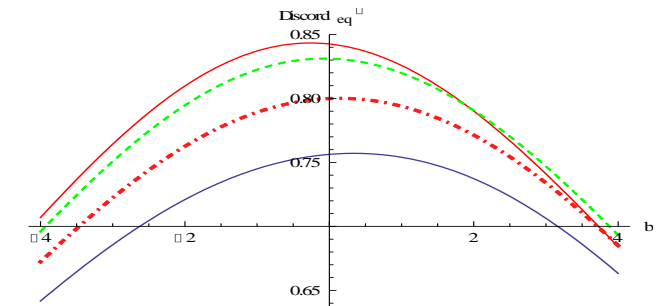
### مراجع

- [۱] Harold Olliver and Wojciech H. Zurek; "Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlation"; PHYSICAL REVIEW LETTERS ۸۸ (۲۰۰۱) ۰۱۷۹۰۱.
- [۲] L. Henderson and V. Vedral; "Classical, quantum and total correlations"; J. Phys. A ۳۴ (۲۰۰۱) ۶۸۹۹.
- [۳] F. Kheirandish, S. J. Ahhtarshenas and H. Mohammadi; "Non-equilibrium entanglement dynamics of a two-qubit Heisenberg XY system in the presence of an inhomogeneous magnetic field and spin-orbit interaction"; Eur. Phys. J. D ۵۷ (۲۰۱۰) ۱۲۹-۱۴۰.

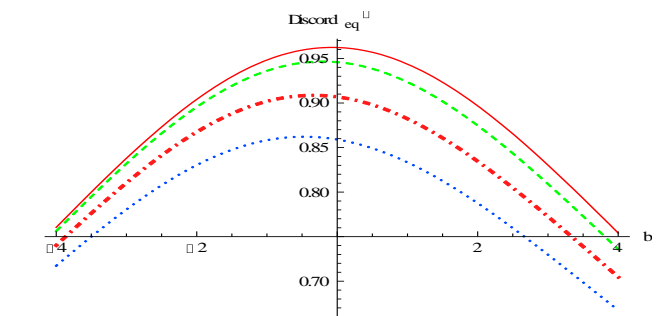
از طرف دیگر افزایش  $B$  و کاهش  $D$  ناهمخوانی را کاهش می‌دهد و علاوه بر این نمودار ناهمخوانی نسبت به  $b$  نامتقارن‌تر خواهد شد. بر خلاف حالت قبلی شاهد تفاوت بیشتری بین نمودار  $\Delta T$  های مثبت و منفی هستیم و به علاوه هم در  $\Delta T$  های مثبت و هم منفی افزایش  $\Delta T$  ممکن است با کاهش یا افزایش ناهم-خوانی همراه باشد (شکل ۵ و ۴).



شکل ۱. نمودار ناهمخوانی به عنوان تابعی از  $b$ . پارامترهای سامانه از این قرارند:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ ,  $\gamma_3 = \gamma_4 = 0.1$ ,  $T_M = 1$ ,  $\Delta T = 1$ ,  $\Delta T = -1$  و  $\Delta T = -6$  و  $\Delta T = 6$  (خط پر)،  $\Delta T = 0.5$  (خط چین)،  $\Delta T = 1$  (نقطه-خط چین) و  $\Delta T = 1.5$  (نقطه‌ای). همه کمیت‌ها بدون بعد هستند.



شکل ۲. نمودار ناهمخوانی به عنوان تابعی از  $b$ . همه چیز مشابه شکل ۱ هست جز اینکه:  $T_M = 2$ .



شکل ۳. نمودار ناهمخوانی به عنوان تابعی از  $b$ . همه چیز مشابه شکل ۱ هست جز اینکه:  $\Delta T \rightarrow -\Delta T$ .

- [۴] I. Dzyaloshinski; "A thermodynamic theory of "weak" ferromagnetism of antiferromagnetics"; J. Phys. Chem. Sol. ۴ (۱۹۵۸) ۲۴۱.
- [۵] T. Moriya; "Theory of Magnetism of NiF<sub>2</sub>"; Phys. Rev. ۱۱۷ (۱۹۶۰) ۶۳۵.
- [۶] T. Moriya; "Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism"; Phys. Rev. ۱۲۰ (۱۹۶۰) ۹۱.
- [۷] T. Moriya; "Theory of Magnetism of NiF<sub>2</sub>"; Phys. Rev. Lett. ۴ (۱۹۶۰) ۲۸۸.
- [۸] S. Javad. Ahktarshenas, Hamidreza. Mohammadi, Fahimeh. S. Mousavi and Vahid Nassajpour; "Quantum Discord of an Arbitrary State of Tow Qubit"; arXiv:quant-ph/۱۳۰۴.۳۹۱۴ (۲۰۱۳)
- [۹] Qing Chen, Chengjie Zhang, Sixia Yu, X.X. Yi and C.H. Oh; "Quantum discord of two-qubit X-states"; Phys. Rev.A. ۸۴ (۲۰۱۱) ۰۴۲۳۱۳.