پانزدهمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها FD2013
دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ۲۶- ۲۸ آذر ۱۳۹۲
15th Conference On Fluid Dynamics, fd2013, December, 18-20
The University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran

حل عددی پایدار و گذرای جریان در کانال با انبساط ناگهانی به روش SIMPLE

مهدی پوررمضان
دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
gmail.comme.pourramezan@

محمد باقر آیانی
استادیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
mbayani@um.ac.ir

چکیده

در این بررسی، جریان دوبعدی غیر قابل تراکم آرام در داخل یک کانال متقارن با انبساط ناگهانی در نظر گرفته شده است. در ابتدا این‌گونه به نظر می‌رسد که جریان همواره متقارن بوده و گردابه‌ای در آن وجود ندارد. اما مطالعات گسترده در این مورد نشان می‌دهند که اساسا جریان تا جایی پایدار و متقارن می‌ماند که عدد رینولدز از مقدار بحرانی آن کمتر باشد. هدف تحقیق حاضر، حل عددی این مسئله در حالت پایدار (دائم) و گذرا، بررسی اثرات میزان ضریب انبساط بر پایداری جریان و یافتن عدد رینولدز بحرانی برای چند ضریب انبساط مشخص می‌باشد. در این بررسی نشان داده شده که اساسا دو حل صحیح برای این مسئله وجود داشته که یکی قرینه (تصویر آینه‌ای) دیگری است. دیده شد که در تمامی ضرایب انبساط، پس از عبور از عدد رینولدز بحرانی و آغاز جدایش و نامتقارن شدن جریان، ابتدا تنها دو گردابه بزرگ در جریان وجود داشته و با زیادتر شدن عدد رینولدز، گردابه سوم نیز پدیدار می‌گردد. همچنین با انجام بررسی‌های بیشتر مشاهده شد که افزایش ضریب انبساط و استفاده از پروفیل سرعت سهمی به جای پروفیل سرعت یکنواخت در ورودی، موجب ناپایداری جریان و کاهش عدد رینولدز بحرانی می شود.

کلمات کلیدی: حل عددی، انبساط ناگهانی، گردابه، حالت پایدار (دائم)، حالت گذرا، عدد رینولدز بحرانی، ضریب انبساط

پانزدهمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها FD2013
بندرعباس، دانشگاه هرمزگان، ۲۷- ۲۹ آذر ۱۳۹۲

حل عددی پایدار و گذرای جریان در کانال با انبساط ناگهانی به روش SIMPLE[1]

مهدی پوررمضان
دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی،
دانشگاه فردوسی مشهد
me.pourramezan@gmail.com

محمد باقر آیانی
استادیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی،
دانشگاه فردوسی مشهد
mbayani@um.ac.ir

چکیده

در این بررسی، جریان دوبعدی غیر قابل تراکم آرام در داخل یک کانال متقارن با انبساط ناگهانی در نظر گرفته شده است. در ابتدا این‌گونه به نظر می‌رسد که جریان همواره متقارن بوده و گردابه‌ای در آن وجود ندارد. اما مطالعات گسترده در این مورد نشان می‌دهند که اساسا جریان تا جایی پایدار و متقارن می‌ماند که عدد رینولدز از مقدار بحرانی آن کمتر باشد. هدف تحقیق حاضر، حل عددی این مسئله در حالت پایدار (دائم) و گذرا، بررسی اثرات میزان ضریب انبساط بر پایداری جریان و یافتن عدد رینولدز بحرانی برای چند ضریب انبساط مشخص می‌باشد. در این بررسی نشان داده شده که اساسا دو حل صحیح برای این مسئله وجود داشته که یکی قرینه (تصویر آینه‌ای) دیگری است. دیده شد که در تمامی ضرایب انبساط، پس از عبور از عدد رینولدز بحرانی و آغاز جدایش و نامتقارن شدن جریان، ابتدا تنها دو گردابه بزرگ در جریان وجود داشته و با زیادتر شدن عدد رینولدز، گردابه سوم نیز پدیدار می‌گردد. همچنین با انجام بررسی‌های بیشتر مشاهده شد که افزایش ضریب انبساط و استفاده از پروفیل سرعت سهمی به جای پروفیل سرعت یکنواخت در ورودی، موجب ناپایداری جریان و کاهش عدد رینولدز بحرانی می شود.

کلمات کلیدی: حل عددی، انبساط ناگهانی، گردابه، حالت پایدار (دائم)، حالت گذرا، عدد رینولدز بحرانی، ضریب انبساط

۱. مقدمه

جدایش، پدیده ای است که به کرات در مسائل مربوط به جریان سیالات با آن مواجه می‌شویم. به عنوان مثال می‌توان به جریان لزج و غیر لزج بر روی ایرفویل‌ها، جریان بر روی اجسام محدب نظیر استوانه و کره و همچنین جریان لزج غیر قابل تراکم در داخل کانال اشاره کرد [1]. جریان غیر قابل تراکم آرام در داخل کانال به خودی خود مسئله‌ای ساده در مکانیک سیالات بوده که حل‌های گوناگونی برای آن ارائه شده است. از این رو مطالعه آزمایشگاهی و عددی جریان و انتقال حرارت در کانال همواره یکی از موارد مورد علاقه دانشمندان بوده که از رهگذر آن می‌توان به درک بهتری از مفاهیم پایداری[2] و گذار[3] دست یافت.

نتایج حاصل از کارهای آزمایشگاهی که توسط افراد بسیار زیادی از جمله کِردرِن [2] و اُیوا [3] ارائه شده است، نشان می‌دهد که جریان در عددهای رینولدز پایین متقارن و پایدار بوده و با افزایش عدد رینولدز، جریان تمایل به ناپایداری و عدم تقارن دارد. شپیرا [4] نیز با بررسی معادلات ناویر-استوکس در نقطه جدایش نشان داده است که این معادلات نیز وجود جدایش را تایید می‌کنند. در این میان، وَهبا [5] با بررسی عددی این پدیده و مقایسه چندین حل‌کننده عددی[4] به این نتیجه رسیده است که روش‌های صریح[5] فقط حل پایدار و متقارن را پوشش داده در حالی که روش‌های ضمنی[6] توانایی پوشش هر دو حل متقارن و

---

[1] . Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations
[2] . Stability
[3] . Transition
[4] . Numerical Solver
[5] . Explicit methods
[6] . Implicit methods

نامتقارن را دارند. او همچنین به وجود دو حل صحیح، که یکی تصویر آیینه‌ای دیگری نسبت به لبه پایینی کانال است، اشاره کرده است.

وابستگی عدد رینولدز بحرانی (که پس از آن جریان نامتقارن می‌شود) به هندسه جریان و میزان ضریب انبساط (نسبت عرض کانال بعد از انبساط به عرض کانال قبل از انبساط) توسط دریکاکیس [6] و آلربرن [7] بررسی شده است و نتایج آنان نشان می‌دهد که با افزایش ضریب انبساط، عدد رینولدز بحرانی کاهش می‌یابد. همچنین لنزرستورفر و همکاران [8] با بررسی همین مسئله برای ضرایب انبساط ۱ تا ۴، اقدام به بررسی رژیم جریان، عوامل ناپایداری آن و طبیعت فیزیکی ناپایداری‌ها با استفاده از آنالیز پایداری خطی سه بعدی نموده است.

لازم به ذکر است که در هیچ کدام از مطالعات انجام شده اشاره ای به حل گذرای این مسئله نشده و به غیر از وَهبا [5]، هیچ‌یک از کارهای اشاره شده اثر نوع پروفیل ورودی بر پایداری جریان را بررسی نکرده‌اند.

۲. معادلات حاکم

در این بررسی هدف، حل جریان دو بعدی غیر قابل تراکم لزج با خواص ثابت می باشد که با توجه به این فرضیات، معادلات ناویر-استوکس با استفاده از ساده سازی هایی به صورت معادله عمومی انتقال[۷] در می‌آید [9] :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\emptyset) + div(\rho\vec{u}\emptyset) = div(\Gamma_\emptyset\, grad\emptyset) + S_\emptyset \qquad (۱)$$

معادله (۱)، رابطه‌ای کلی است که با استفاده از آن و بسته به تعریف $\emptyset$ ، $\Gamma_\emptyset$ و $S_\emptyset$ ، می‌توان معادلات مومنتوم و انرژی را تعریف کرد. اجزای این معادله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\emptyset)$	:	نرخ افزایش $\emptyset$ در المان سیال
$div(\rho\vec{u}\emptyset)$	:	نرخ خالص جریان $\emptyset$ از المان سیال
$div(\Gamma_\emptyset\, grad\emptyset)$	:	نرخ خالص افزایش $\emptyset$ در اثر نفوذ
$S_\emptyset$	:	نرخ افزایش $\emptyset$ در اثر چشمه

معادله دیگر حاکم بر این جریان، معادله پیوستگی یا همان بقای جرم است:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0 \qquad (۲)$$

همان طور که می‌دانیم، معادله (۲) در روش سیمپل، با استفاده از یک سری فرضیات، به یک معادله تصحیح فشار[۸] تبدیل می‌شود که با استفاده از حل آن، میزان تصحیح فشار به‌دست می آید [9].

لازم به ذکر است، در این بررسی برای گسسته سازی معادلات بالا از روش حجم محدود[۹] با بسط مشتق‌های مرتبه اول برای ترم دیفیوژن استفاده شده و کد نوشته شده قابلیت حل این جریان را با چهار طرح مختلف اعم از تفاضل مرکزی[۱۰]، طرح بالادستی[۱۱]، طرح پیوندی[۱۲] و طرح قانون توانی[۱۳] داراست.

---

7 . General Transport Equation
8 . Pressure correction
9 . Finite volume
10 . Central difference
11 . Upwind
12 . Hybrid
13 . Power law

البته سابِی و مولین [10]، با مقایسه دو طرح تفاضل مرکزی و طرح بالادستی گزارش داده‌اند که در جریان داخل کانال با انبساط ناگهانی، با توجه به داده‌های تجربی، طرح تفاضل مرکزی نتایج نزدیک‌تری را به داده‌های تجربی ارائه می‌دهد.

۳. نتایج

برای حل جریان بین دو صفحه موازی با انبساط ناگهانی، شبکه‌ای[۱۴] به صورت کانالی مستطیلی با ابعاد 0.2×2.5 متر در نظر گرفته شد. البته چون در این بررسی از طرح پیوندی برای حل معادلات گسسته استفاده شده، لذا محدودیتی از نظر انتخاب ابعاد شبکه و پکلت عددی[۱۵] وجود نداشت. همچنین برای ایجاد انبساط ناگهانی در کانال با دو روش مواجه بودیم:

۱. اعمال انبساط در خود شبکه. به این معنی که شبکه را ذاتا به صورت کانالی باریک که سپس منبسط می‌شود در نظر بگیریم.

۲. تغییر ترم چشمه. به این صورت که کانال را به صورت یک‌پارچه و بدون پله در نظر گرفته سپس با تخصیص یک عدد منفی بسیار بزرگ (-10^{30}) به ترم چشمه در نواحی که دو پله بالا و پایین را می‌سازند، عملا این نواحی را از حل خارج کنیم [9].

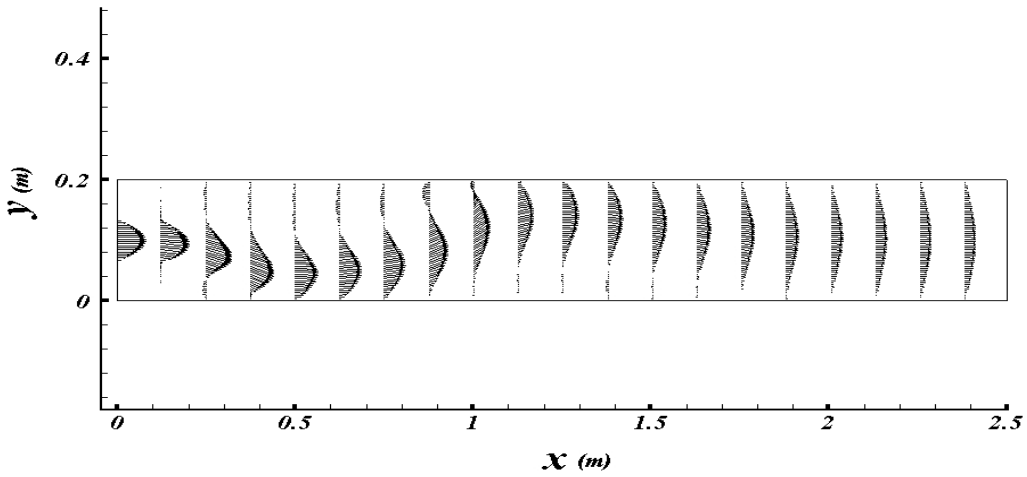
به دلیل سرراست بودن و پیچیدگی کمتری که روش دوم از نظر شبکه بندی و تعیین شمارنده‌ها در کد دارد، در این بررسی از روش دوم برای ایجا انبساط ناگهانی استفاده شده است.

جهت بررسی عدم وابستگی نتایج به ابعاد شبکه، سرعت روی خط مرکزی کانال برای چندین مش با ابعاد مختلف محاسبه و مشاهده شد که با در نظر گرفتن مش 120×400 و یا ریزتر، نتایج مستقل از ابعاد شبکه خواهند بود.

مسئله مهم دیگری که می‌تواند صحت حل را تحت تاثیر قرار دهد، طول حوزه حل است. باید توجه داشت که در این بررسی برای انتهای حوزه حل از شرط خروجی[۱۶] استفاده شده که بیان‌گر توسعه یافته بودن میدان جریان است. بنابراین باید طول کانال را به قدری بزرگ در نظر گرفت که فرض توسعه یافتگی تا حدودی برای آن معقول باشد. در غیر این صورت بر خلاف فیزیک مسئله عمل کرده‌ایم.

لازم به ذکر است که در تمامی حالت‌های ارائه شده در این بررسی حداکثر مقدار باقیمانده‌ها[۱۷] برای معادله پیوستگی از مرتبه 10^{-8} و برای معادلات مومنتوم در جهت x و y از مرتبه 10^{-9} بوده است.

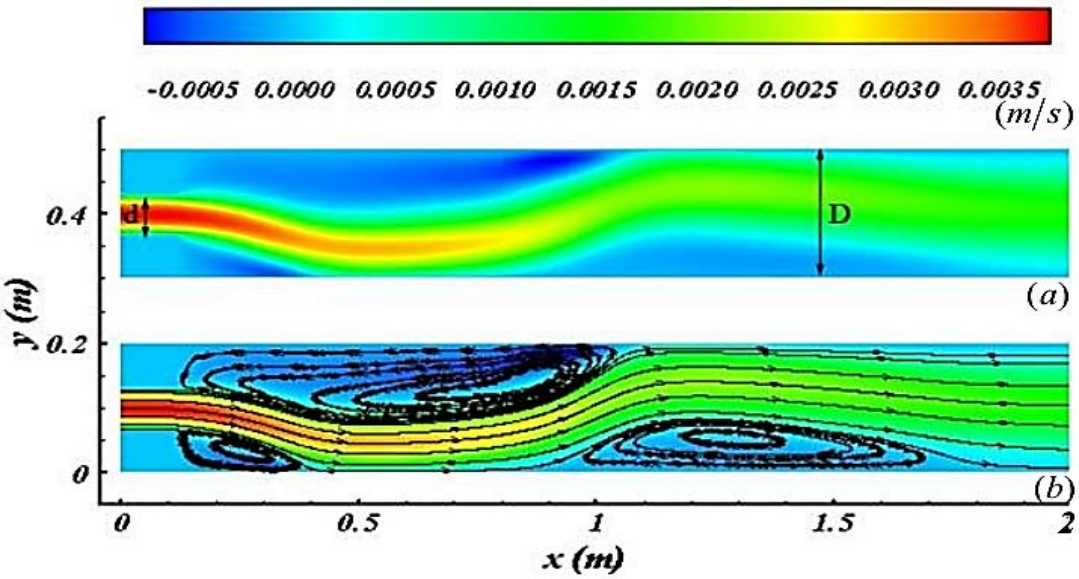
۳-۱. حل حالت پایدار



شکل ۱. بردارهای سرعت با پروفیل ورودی سهمی و *Re=200*

---

[14] . Grid
[15] . Numerical Peclet
[16] . Outlet
[17] . Residuals



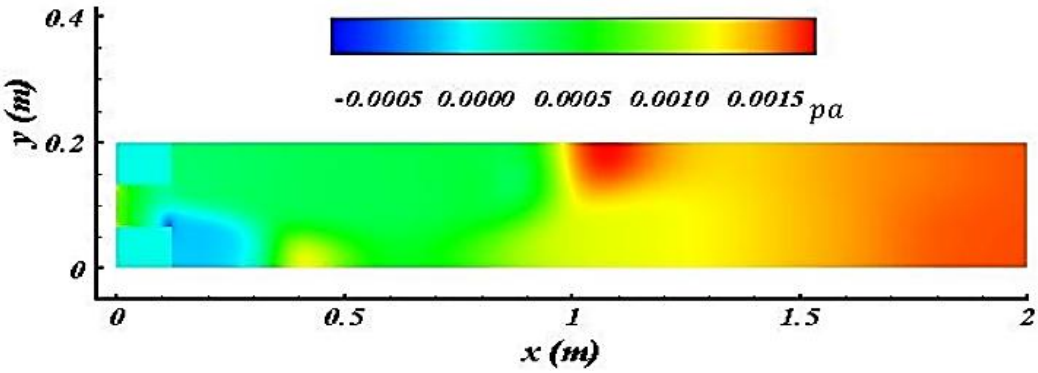
شکل ۲. *a*) توزیع سرعت *b*) *نمایش* خطوط جریان، پروفیل ورودی سهمی و *Re=200*

لازم به ذکر است که عدد رینولدز و ضریب انبساط در این بررسی به صورت زیر در نظر گرفته شده‌است:

$$\mathrm{Re} = \rho U_m d / \mu \qquad (۳)$$

$$E.R = D/d \qquad (۴)$$

که در آن U_m، سرعت متوسط در ورودی، μ لزجت و ρ چگالی سیال می‌باشد. D و d نیز در شکل ۲ قابل ملاحظه‌اند.



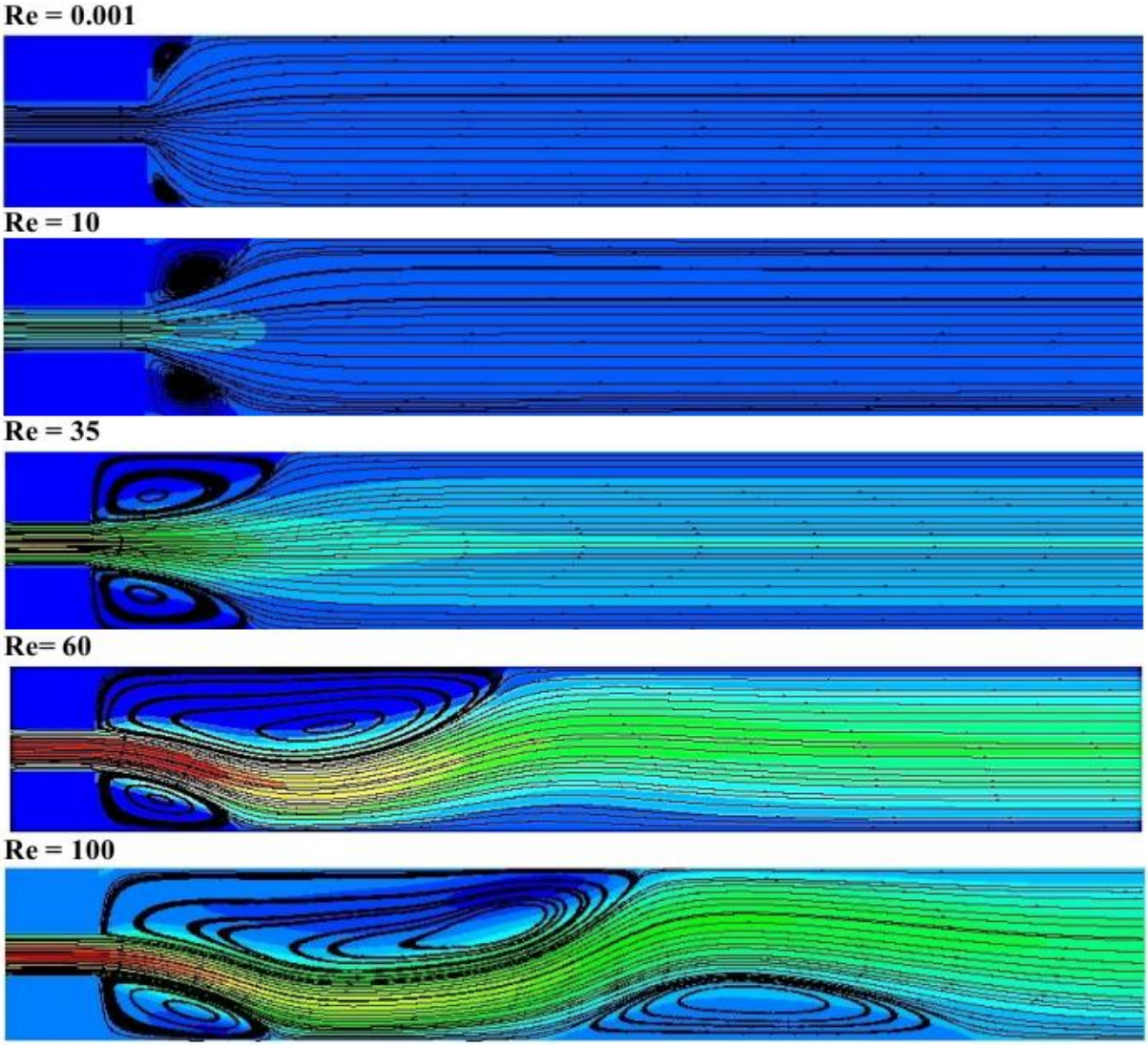
شکل ۳. توزیع فشار برای پروفیل ورودی سهمی و *Re=200*

شکل ۱ بردارهای سرعت برای جریانی با پروفیل سرعت ورودی سهمی و عدد رینولدز 200 را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده شد که سرعت در ورودی به‌صورت کاملا توسعه یافته بوده و در نواحی گردابه‌ها که برگشت جریان داریم، سرعت منفی می‌شود. در انتها نیز واضح است که پروفیل سرعت به‌صورت سهمی و متقارن درآمده که نشان‌دهنده توسعه یافتگی مجدد جریان است.

با توجه به شکل ۲ مشاهده شد که سیال از دیواره‌ها جدا شده، جریان حالت متقارن نداشته و دارای یک گردابه بزرگ در بالا و دو گردابه نسبتا کوچک در پایین است. در بخش‌های بعد به تفصیل این پدیده بررسی شده است.

همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود، توزیع فشار به‌صورت یکنواخت نیست و فشار پس از عبور از گردابه‌ها افزایش می‌یابد. این پدیده با توجه به استهلاک انرژی جریان در گردابه‌ها که موجب افت فشار در داخل گردابه می‌شود، منطقی به‌نظر می‌رسد.

۳-۲. بررسی عدد رینولدز بحرانی



شکل ۴. توزیع سرعت برای ضریب انبساط 4 و اعداد رینولدز مختلف

شکل ۴ توزیع سرعت محوری را برای ضریب انبساط 4 و اعداد رینولدز مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل به وضوح دیده می‌شود، جریان تا قبل از عدد رینولدز 35 تقریبا حالت متقارن داشته و در رینولدز 35 در آستانه ورود به عدم تقارن است. با انجام بررسی‌های بیشتر مشاهده شد که می‌توان عدد رینولدز بحرانی را در این شرایط با تقریب خوبی در حدود 34 در نظر گرفت. البته وهبا [5] نیز مقدار 36 را برای عدد رینولدز بحرانی گزارش داده که با نتایج حاصل از تحقیق حاضر همخوانی خوبی دارد.

با بررسی‌های بیشتر مشاهده شد که تا حدود عدد رینولدز ۷۰، تنها دو گردابه در جریان وجود داشته و هنوز جدایش رخ نداده است. اما با زیادتر شدن عدد رینولدز، گردابه سوم نیز شروع به شکل‌گیری می‌کند.

در حالتی که $Re \to 0$ و در حقیقت جریان به‌صورت خزشی[۱۸] است. توقع داشتیم که هیچ‌گونه گردابه ای در جریان وجود نمی‌داشت. اما با بررسی شکل ۴ در حالتی که $Re = 0.001$ و بیشترین مقدار سرعت از مرتبه 10^{-8} می‌باشد، در می‌یابیم که دو گردابه کوچک در بالا و پایین کانال وجود دارد. این پدیده تاییدی است بر نتایج موفات [11] که بیان می‌کند : "گردابه‌ها ممکن است حتی در جریان‌های خزشی $(Re \to 0)$ نیز در نزدیکی گوشه‌های تیز رخ دهد."

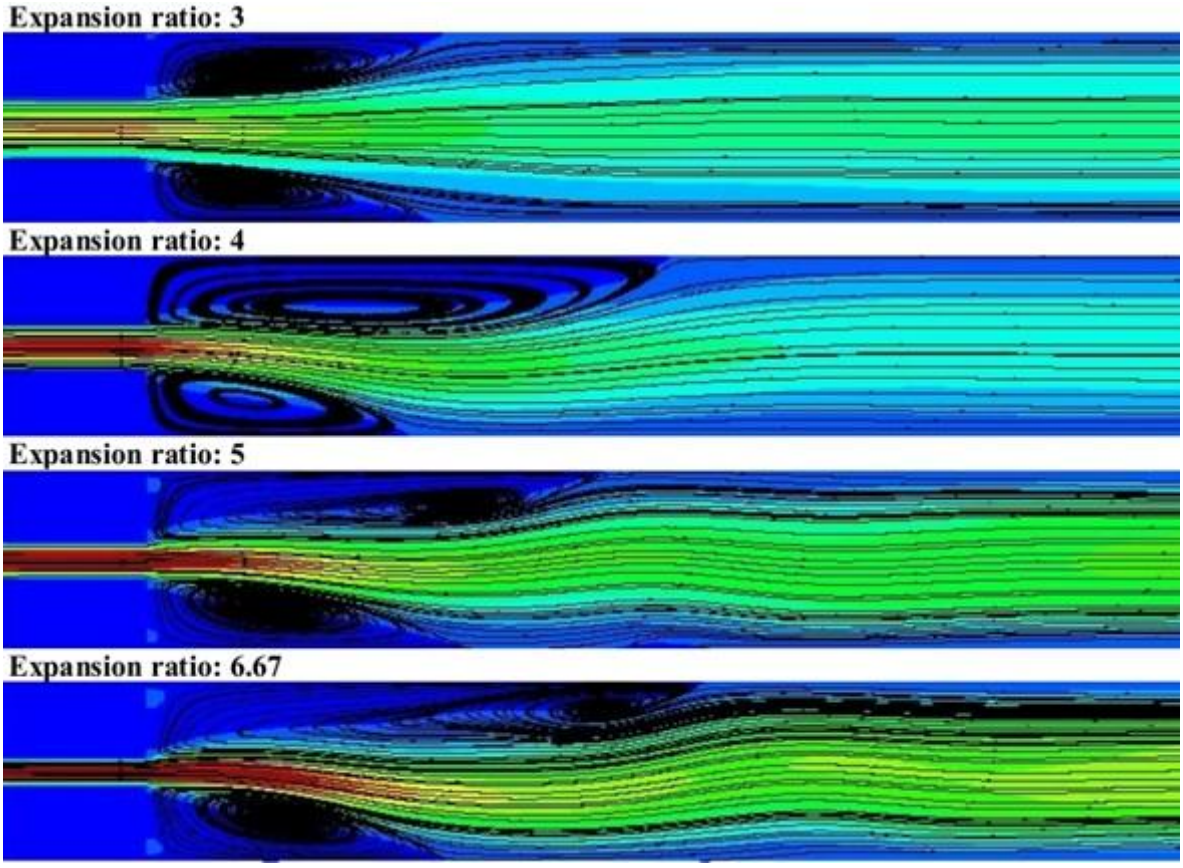
[18] . Creeping flow

۳-۳. بررسی تاثیر ضریب انبساط و شکل پروفیل سرعت ورودی بر پایداری جریان

به منظور بررسی تاثیر ضریب انبساط و همچنین شکل پروفیل سرعت ورودی بر پایداری جریان و یافتن عدد رینولدز بحرانی، اقدام به حل جریان برای چند ضریب انبساط با اعداد رینولدز گوناگون و دو نوع پروفیل سرعت شد. نتایج این بررسی در جدول ۱ و شکل ۵ ارائه شده است. جهت یادآوری باید گفت که منظور از ضریب انبساط، نسبت عرض کانال بعد از انبساط به عرض آن قبل از انبساط است.

جدول ۱. مقایسه عدد رینولدز بحرانی برای چند ضریب انبساط مختلف

ضریب انبساط	عدد رینولدز بحرانی (با ورودی سهمی)			عدد رینولدز بحرانی (با ورودی یکنواخت)	
	نتایج وَهبا [5]	نتایج دریکاکیس [6]	نتایج تحقیق حاضر	نتایج وَهبا [5]	نتایج تحقیق حاضر
۲	۱۴۵	۱۴۴	۱۴۲	۹۹۶	۹۵۰
۴	۳۶	۳۵	۳۴	۶۴	۶۰
۸	۲۰	۱۹	۱۹	۲۴	۲۳



شکل ۵. توزیع سرعت برای *Re=40* و ضرایب انبساط مختلف

با توجه به جدول ۱ و شکل ۵، مشاهده شد که پایداری جریان به شدت وابسته به مقدار ضریب انبساط است. این پدیده را می‌توان این‌گونه توجیه نمود که در عدد رینولدزی ثابت با زیاد شدن ضریب انبساط، سرعت ورودی بیشتر شده و این افزایش سرعت منجر به کاهش توانایی جریان برای حفظ تقارن و پایداری می‌گردد.

۳-۴. حل حالت گذرا

کد گذرایی که برای حل این حالت نوشته شده، همان کد قبلی است که با اندکی تغییرات، کد حالت دائم[19] به‌راحتی تبدیل به کد حالت گذرا گردیده است.

برای حل مسئله در بازه زمانی صفر تا زمان نهایی، نیاز به همگرا شدن کد در هر گام زمانی داریم. به این منظور دو معیار برای تشخیص همگرا شدن حل در یک گام زمانی در نظر گرفته شد که اگر هر کدام از این معیارها ارضا می‌شدند، برنامه به گام زمانی بعدی می‌رفت:

- ✓ کمتر شدن مقدار باقیماند معادله پیوستگی از یک عدد بسیار کوچک
- ✓ بیشتر شدن تعداد تکرار در یک گام زمانی از میزان حداکثر تکرار در هر گام زمانی

باید توجه داشت هنگامی که اقدام به حل گذرای یک مسئله می‌کنیم، شرط اولیه بسیار با اهمیت است و بر روی جواب‌ها تاثیر می‌گذارد. در این مسئله چون هدف ما حل جریان از لحظه صفر و حالت سکون بوده است، لذا تمامی شروط اولیه یا همان حدس‌های اولیه را برابر با صفر در نظر گرفته‌ایم.

لازم به ذکر است که حل گذرا برای چندین گام زمانی[20] و زمان نهایی مختلف و معیارهای همگرایی گوناگون اجرا گردید و باید گفت که این کار پروسه‌ای کاملا وقت‌گیر بود. به عنوان مثال برای نتایجی که در ادامه خواهد آمد، نیاز به انجام بیش از ۱۲۰ هزار تکرار بود که زمان تقریبی اجرا را از شش ساعت نیز فراتر برد.

بدین منظور توزیع سرعت برای حل گذرا در بازه صفر تا صد ثانیه و با گام زمانی 0.01 ثانیه انجام شد. البته همان‌طور که در شکل ۶ نشان داده شده است، جریان تقریبا پس از ۳۰ ثانیه از آغاز، به حالت پایدار رسیده و پس از آن دیگر تغییری در نتایج حاصل نمی‌شود.

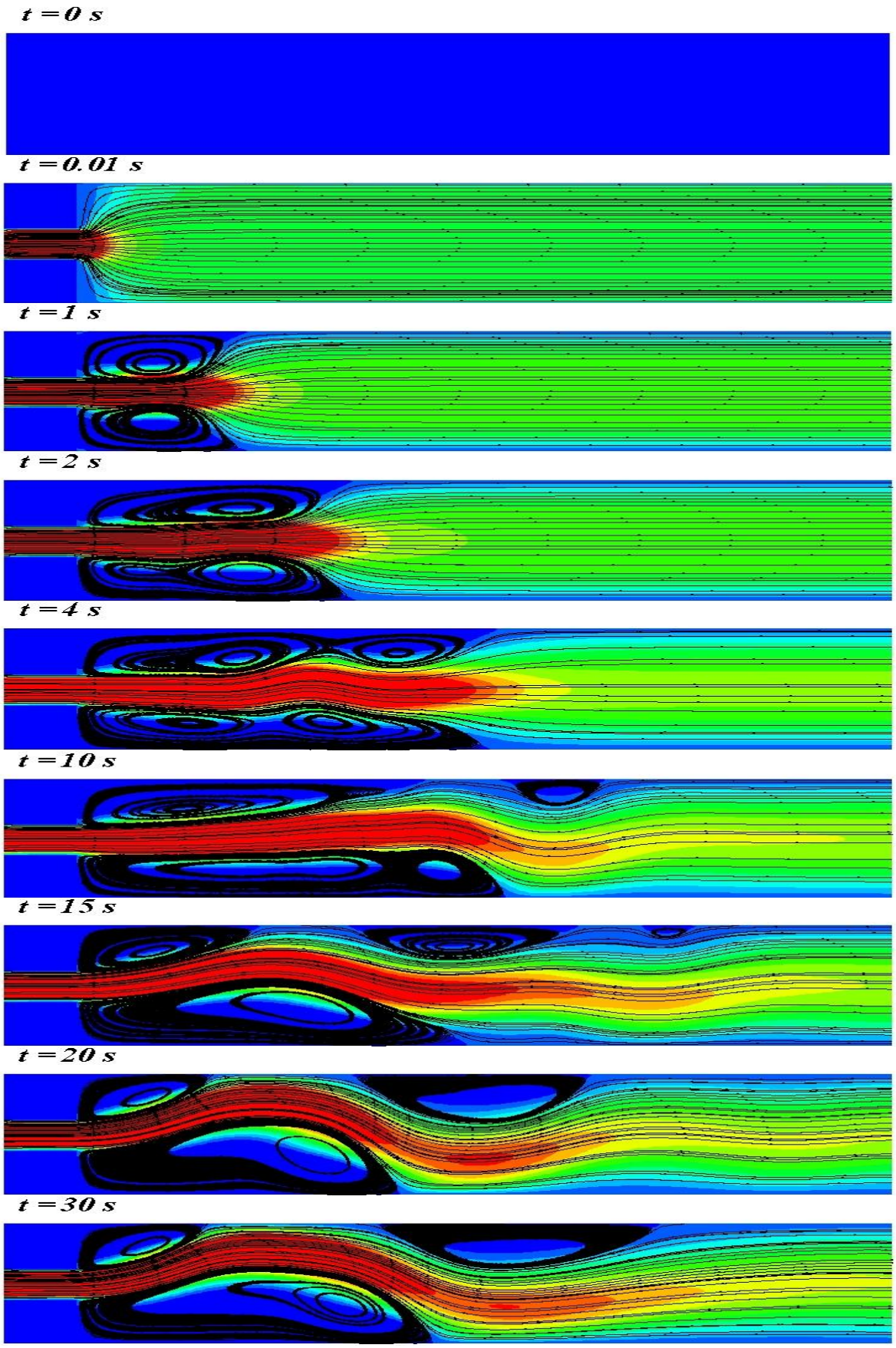
پدیده جالبی که پس از اتمام حل گذرا به آن برخوردیم و با مقایسه شکل های ۲ و ۶ نیز به آن می‌رسیم، این بود که نتیجه حاصل از حل گذرا پس از پایداری (پس از زمان 30 ثانیه)، دقیقا قرینه (تصویر آیینه‌ای[21] نسبت به لبه پایینی کانال) با نتایج حل حل پایدار است. البته همان‌طور که گفته شد، وهبا [5] نیز وجود دو حل صحیح برای این مسئله که یکی قرینه دیگری است، را گزارش داده ولی هیچ اشاره‌ای به روند و شرایط دستیابی به این دو حل نکرده است.

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، حالت پایدار (دائم) و گذرای جریان لزج غیرقابل تراکم آرام در کانالی با انبساط ناگهانی با استفاده از الگوریتم سیمپل بررسی گردید. مشاهده شد که جریان در اعداد رینولدز پایین متقارن و پایدار بوده و پس از عدد رینولدز بحرانی به‌صورت نامتقارن درآمده و در نهایت دچار جدایش نیز می‌شود. عدد رینولدز بحرانی برای چند ضریب انبساط محاسبه شد و مشخصا مقدار آن برای ضریب انبساط 4، برابر با 34 بود که این نتیجه تطبیق خوبی با نتایج ارائه شده در [5] و [6] دارد. . دیده شد که در تمامی ضرایب انبساط، پس از عبور از عدد رینولدز بحرانی و آغاز جدایش و نامتقارن شدن جریان، ابتدا تنها دو گردابه بزرگ در جریان وجود داشته و با زیادتر شدن عدد رینولدز، گردابه سوم نیز پدیدار می‌شود. پس از پایدار شدن حل گذرا، مشاهده شد که نتایج حاصل از این حل، دقیقا تصویر آیینه‌ای نسبت به حل حالت پایدار است که بر اساس آنچه قبلا گفته شد، هر دو این حل ها صحیح می‌باشند. همچنین مشخص گردید که نوع جریان به شدت وابسته به مقدار ضریب انبساط بوده و با افزایش ضریب انبساط، عدد رینولدز بحرانی و به تبع آن پایداری جریان به شدت کاهش می‌یابد. همچنین نشان داده شد که در صورت استفاده از پروفیل سرعت یکنواخت در ورودی به جای پروفیل سهمی در یک ضریب انبساط مشخص، عدد رینولدز بحرانی زیاد شده و پایداری جریان افزایش می‌یابد که این پدیده در ضرایب انبساط کوچک، که عدد رینولدز بحرانی آن‌ها بالاست، به مراتب ملموس‌تر است.

---

19 . Steady
20 . Time step
21 . Mirror image



شکل ۶. توزیع سرعت حل گذرا در بازه صفر تا سی ثانیه و با گام زمانی 0.01 ثانیه

مراجع

[1]- M. Hafez, A. Dimanlig, Simulations of compressible inviscid flows over stationary and rotating cylinders, Acta Mech. (Suppl. 4)(1994) 241–249.

[2]- W. Cherdron, F. Durst, J.H. Whitelaw, Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions, J. Fluid Mech 84 (1978) 13–31.

[3]- Y. Ouwa, M. Watanabe, H. Asawo, Flow visualization of a two-dimensional water jet in a rectangular channel, Jpn. J. Appl. Phys. 20(1981) 243–247.

[4]- M. Shapira, D. Degani, D. Weihs, Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channels, Comp. Fluids 18 (1990) 239–258.

[5]- E.M. Wahba, Iterative solvers and inflow boundary conditions for plane sudden expansion flows, Applied Mathematical Modelling 31 (2007) 2553–2563.

[6]- D. Drikakis, Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows, Phys. Fluids 9 (1997) 76.

[7]- N. Allerborn, K. Nandakumar, H. Raszillier, F. Durst, Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion, J. Fluid Mech. 330 (1997) 169.

[8]- Daniel Lanzerstorfer and Hendrik C. Kuhlmann, Global stability of multiple solutions in plane sudden-expansion flow, J. Fluid Mech. (2012), vol. 702, pp. 378-402.

[9]- H.K. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method, Second Edition 2007, Pearson Education, ISBN: 978-0-13-127498-3

[10]- I.J. Sobey, T. Mullin, Calculation of multiple solutions for the two-dimensional Navier–Stokes equations, in: M.J. Baines, K.W. Morton (Eds.), Proceedings of Numerical Methods in Fluid Dynamics, 4, Oxford University Press, Oxford, 1993, p. 417.

[11]- H.K. Moffat, Viscous and resistive eddies near a sharp corner, J. Fluid Mech. 18 (1964) 1–18.