مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال۲۳، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، صص ۲۲۵-۲۴۲

کاربردی از اندازه‌گیری میزان چولگی ناهمواری درامد بر اساس منحنی لورنتس و توزیع درامد

زهرا بهدانی[†] و غلامرضا محتشمی برزادران[‡,*]

[†] دانشگاه صنعتی خاتم‌الانبیا (ص) بهبهان
[‡] دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: یکی از مهم‌ترین شاخص‌ها برای اندازه‌گیری ناهمواری درامد ضریب جینی است. این شاخص چگونگی توزیع درامد و میزان کلی ناهمواری‌های درامد را به‌صورت مختصر نشان می‌دهد. اما اطلاعات کمی در مورد تقسیم درامد بین طبقات مختلف درامدی و شکل منحنی لورنتس به ما می‌دهد، برای مثال هنگامی که دو منحنی لورنتس نامتقارن متفاوت دارای ضریب جینی یکسان باشند، با استفاده از شاخص جینی به تنهایی روشن نیست که افزایش ناهمواری درامد ناشی از ثروتمندتر شدن ثروتمندان، یا فقیرتر شدن فقرا است. لذا با این شاخص نمی‌توان تمام تغییرات تمرکز درامد را مشخصه‌سازی نمود. برای رفع این مشکل روش‌ها و شاخص‌هایی وجود دارد. در این مقاله ابتدا دیدگاه چند نفر از محققین برای رفع این مشکل با کاربرد چولگی منحنی لورنتس مطرح شده و سپس یک ضریب چولگی به‌عنوان بهترین معرف تغییرات در نقاط انتهایی درامدها معرفی شده است و به‌عنوان یک مثال کاربردی، توزیع درامد استان‌های کشور در سال ۱۳۸۷ با تأکید دو استان خوزستان و هرمزگان که دارای ضریب جینی یکسان هستند مورد بررسی قرار گرفته است[۱].

واژگان کلیدی: منحنی لورنتس؛ توزیع درامد؛ ضریب جینی؛ شاخص نابرابری؛ تابع درامد.

---

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات
دریافت: ۱۳۹۱/۱۱/۳، پذیرش: ۱۳۹۲/۹/۴.

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین نشانه‌های رشد اجتماعی و وضعیت رفاه در یک جامعه، تعادل و توازن درامد یا ثروت در آن جامعه است. منحنی لورنتس و ضریب جینی یک واحد اندازه‌گیری پراکندگی آماری است که معمولاً برای سنجش میزان نابرابری در توزیع درامد یا ثروت در یک جامعه‌ی آماری استفاده می‌شود. این شاخص چگونگی توزیع درامد و میزان کلی ناهمواری‌های درامد را به‌صورت مختصر نشان می‌دهد اما اطلاعات کمی در مورد تقسیم درامد بین طبقات مختلف درامدی و شکل منحنی لورنتس به ما می‌دهد. برای مثال هنگامی که دو منحنی لورنتس نامتقارن متفاوت دارای ضریب جینی یکسان باشند. با استفاده از شاخص جینی به تنهایی روشن نیست که افزایش ناهمواری درامد ناشی از ثروتمندتر شدن ثروتمندان، یا فقیرتر شدن فقرا است. لذا با این شاخص نمی‌توان همه‌ی تغییرات تمرکز درامد را مشخصه‌سازی نمود. برای رفع این مشکل روش‌ها و شاخص‌هایی وجود دارد. یک دیدگاه برای رفع مشکل استفاده از شکل هندسی منحنی لورنتس و مقایسه‌ی آن‌ها می‌باشد. در بسیاری از موارد مطالعه‌ی شکل هندسی منحنی‌های لورنتس برای مثال تقارن منحنی نسبت به قطر فرعی از جمله نکات مهم است. عدم تقارن منحنی لورنتس توسط چندین آماردان ایتالیایی مانند جینی [۶]، کاکوانی [۸]،زاناردی [۱۵ و ۱۶] و ... مطالعه شده است.

۲- منحنی لورنتس

منحنی لورنتس از شاخص‌های مهم وضعیت «توزیع ثروت» در جامعه می‌باشد. بسیاری از کارشناسان آن را شاخص مهمی برای نمایش نابرابری‌های اجتماعی به‌صورت کلی نیز می‌دانند. ارتباط این دو مفهوم یعنی «نابرابری توزیع ثروت» و «نابرابرهای اجتماعی» در جوامعی که دارای اقتصاد آزاد می‌باشند آشکارتر است. این شاخص اولین بار توسط ماکس اوتو لورنتس معرفی شد و از آن پس در زمینه‌های متنوع مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت [۱۱].

تعریف ۱: اگر $F(x) = \int_{0}^{x} f(y)dy$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X و برای $u \in [0,1]$، $F^{-1}(u) = \sup\{x: F(x) \leq u\}$ تابع چندکی آن باشد، تابع لورنتس برای متغیرهای تصادفی نامنفی با اولین گشتاور متناهی، به‌صورت زیر است:

$$L(u) = \frac{1}{E(X)} \int_0^u F^{-1}(t)dt, \qquad u \in [0, 1]. \tag{1}$$

است که در آن $E(X) = \int_0^\infty yf(y)dy$ می‌باشد. با جایگذاری $u = F(x)$ در رابطه‌ی (۱) رابطه‌ی (۲) نتیجه می‌شود.

$$\{(u, L(u))\} = \{(u, L(u)) | u = F(x), L(u) = F_1(x); \quad x \geq 0\} \tag{2}$$

که $F_k(x) = \frac{1}{E(X^k)} \int_0^{F(x)} t^k f(t)dt$ توزیع‌های گشتاوری و $E(X^k) < \infty$ $x > 0;\ k = 0, 1, \ldots$ است. نتایج زیر از مهم‌ترین مشخصه‌های منحنی لورنتس متغیرهای تصادفی پیوسته به‌طور مستقیم از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود [۷]:

۱. تابع لورنتس L، تابعی صعودی، محدب و پیوسته با $L(0)=0$ و $L(1)=1$ است.
۲. به ازای هر $0 < u < 1$ همواره $L(u) < u$
۳. $F(\mu) - L(\mu) = \sup_x [F(x) - L(x)],\ x = F^{-1}(u)$
۴. $L'(x) = \frac{x}{\mu}$
۵. میانگین نسبی انحراف از میانگین برابر است با
$$M(\mu) = \frac{E(|X-\mu|)}{2\mu} = F(\mu) - L(\mu)$$
۶. میانگین نسبی انحراف از میانه برابر است با
$$M(m) = \frac{E(|X-m|)}{2m} = F(m) - L(m)$$

که F و L و μ و m به ترتیب تابع توزیع تجمعی، منحنی لورنتس و میانگین و میانه‌ی درامد می‌باشند.

۳- ضریب جینی

ضریب جینی اولین بار توسط کورادو جینی به‌صورت دو برابر ناحیه‌ی بین منحنی لورنتس و خط قطر معرفی شد [۵]. این ضریب با نسبتی تعریف می‌شود که ارزشی بین صفر و یک دارد. هر چقدر ضریب جینی نزدیک به عدد صفر باشد، برابری بیش‌تر در توزیع درامد را نشان می‌دهد و بالعکس هر چقدر ضریب جینی نزدیک به عدد یک باشد، توزیع نابرابر درامد را مشخص می‌کند. اگر ضریب جینی مساوی با عدد صفر باشد یعنی همه درامد و

ثروت یکسان دارند (برابری مطلق) و اگر مساوی با عدد یک باشد یعنی نابرابری مطلق به‌گونه‌ای که ثروت تنها در دست یک نفر است و مابقی هیچ درامدی ندارند [۱].
تعریف ۲: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع لورنتس $L(u)$ باشد ضریب جینی آن با رابطه‌ی (۳) تعریف می‌شود:

$$G = ۲\int_{۰}^{۱}[u - L(u)]du = ۱ - ۲\int_{۰}^{۱} L(u)du. \qquad (۳)$$

از مزایای ضریب جینی این است که این ضریب را می‌توان برای مقایسه‌ی توزیع درامدی در بخش‌های مختلف جامعه و همچنین در کشورها مورد استفاده قرار داد. برای مثال ضریب جینی برای مناطق شهری با مناطق روستایی در بسیاری از کشورها متفاوت است، ضریب جینی را به‌راحتی می‌توان با سراسر کشور مقایسه کرد و تفسیر آن نیز آسان است. از طرفی از ضریب جینی می‌توان برای نشان دادن چگونگی توزیع درامد در داخل کشور در طی یک دوره از زمان استفاده کرد. در نتیجه این امکان وجود دارد تا ببینید که آیا نابرابری در حال افزایش است یا کاهش؟

از طرفی این ضریب دارای معایبی نیز می‌باشد مثلاً ضریب جینی نابرابری درامد را اندازه‌گیری می‌کند اما نابرابری‌های فرصت را اندازه‌گیری نمی‌کند. اگر دو کشور ضریب جینی یکسان داشته باشند ممکن است یک کشور ثروتمند باشد و دیگری فقیر، می‌توان نتیجه گرفت اندازه‌گیری ضریب جینی در دو کشور متفاوت است. ضریب جینی نقطه‌ی براورد در یک زمان خاص است. از این رو تغییرات درامدی را در طول زمان نادیده می‌گیرد.

۴- ضریب چولگی منحنی لورنتس

همان طوری که ذکر شد ضریب جینی، کل اطلاعات مربوط به منحنی لورنتس و نابرابری‌های درامد را در بر ندارد. با توجه به تعریف ضریب جینی ممکن است دو منحنی لورنتس متفاوت دارای ضریب جینی یکسان باشند. این تفاوت را می‌توان به‌وسیله‌ی ضریب تقارن منحنی لورنتس حول قطر فرعی اندازه‌گیری و محاسبه کرد [۳]. عدم تقارن منحنی لورنتس توسط چندین آماردان ایتالیایی مانند جینی [۶]، زاناردی [۱۵ و ۱۶]، کاکوانی [۸] و ... مطالعه شده است. در بسیاری از موارد مطالعه‌ی شکل هندسی

منحنی‌های لورنتس برای مثال تقارن منحنی نسبت به قطر فرعی از جمله نکات مهم می‌باشد. به ویژه موقعیت نقاطی از منحنی که خط مماس بر منحنی در آن نقاط دارای شیب یک است (نقاطی که خط مماس بر آن‌ها موازی خط تعادل است).

با استفاده از ویژگی شماره‌ی ۴ منحنی لورنتس که در بخش ۳ ذکر شد مشخص است که خط مماس بر منحنی لورنتس در نقطه‌ی $u = F(\mu)$ موازی با خط تعادل (خط برابری کامل یا $x = y$) است. با استفاده از این لم اگر ضریب تقارن منحنی لورنتس را به شکل $S = F(\mu) + L(\mu)$ تعریف کنیم، منحنی لورنتس متقارن است اگر و فقط اگر $S = ۱$[۲]، اگر $S > ۱$ آن‌گاه نقاطی از منحنی لورنتس که خط مماس بر آن موازی با خط تعادل است در بالای محور تقارن قرار می‌گیرند و اگر $S < ۱$ آن‌گاه نقاطی که خط مماس بر آن موازی با خط تعادل است در زیر محور تقارن قرار می‌گیرند. برای مثال منحنی لورنتس توزیع پارتو دارای ضریب تقارن کم‌تر از یک و منحنی لورنتس توزیع لگ نرمال متقارن است [۴].

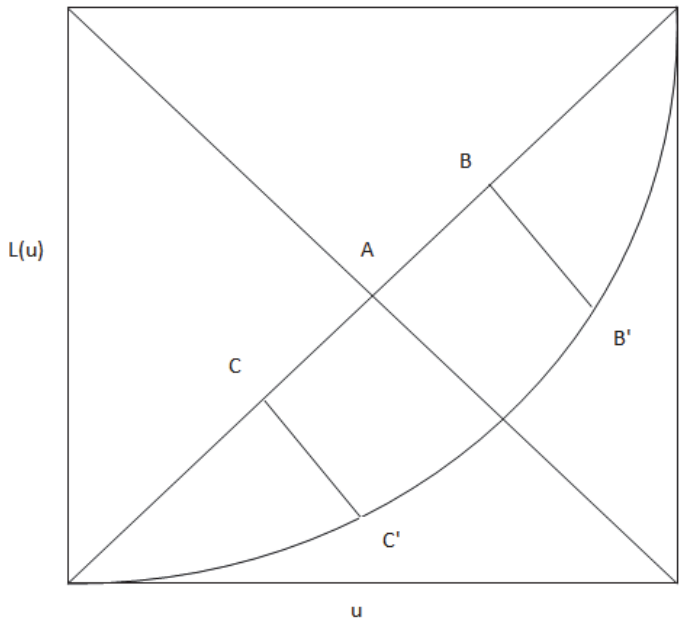
کاکوانی ثابت کرد که اگر $L(\mu) = ۱ - \mu$ یا به‌طور متناظر $L'(\mu) = -۱$، آن‌گاه منحنی لورنتس متقارن است [۸] که با ویژگی ۴ منحنی لورنتس هم‌ارز است و با توجه به شکل ۱ می‌توان آن را به این صورت توجیه کرد. منحنی لورنتس را متقارن گوییم هرگاه به ازای هر B و C روی قطر فرعی اگر $AC=AB$ (A محل تقاطع دو قطر یعنی نقطه‌ی $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ است) آن‌گاه $BB'=CC'$ که B' و C' نقاطی از منحنی لورنتس در نظر گرفته می‌شود که به‌ترتیب نقاط B و C پای عمود این نقاط بر خط قطر اصلی باشند.

منحنی لورنتس چوله به سمت صفر است اگر $BB'>CC'$ یا $L(\mu) > ۱ - \mu$ و منحنی لورنتس چوله به سمت یک است اگر $BB'<CC'$ یا $L(\mu) < ۱ - \mu$.

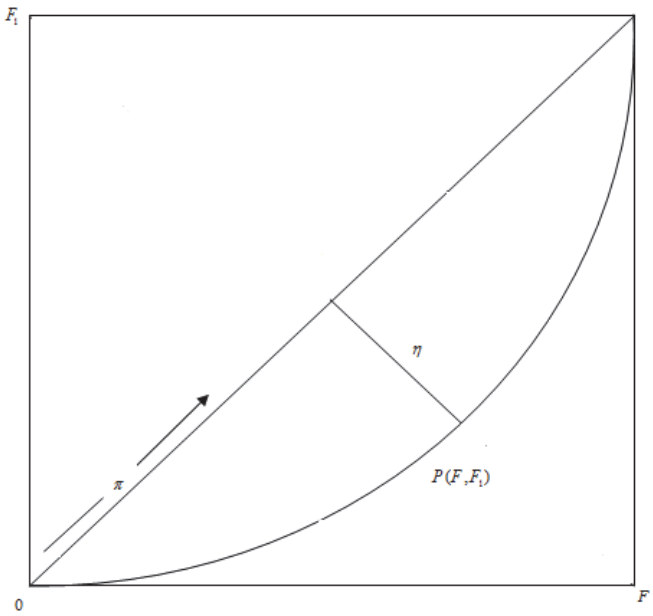
کاکوانی و پودر برای بررسی عدم تقارن منحنی لورنتس از رابطه‌ی (۲) استفاده کردند [۹]. اگر P نقطه‌ای روی منحنی لورنتس با مختصات $(F, F_۱)$ (شکل۲) باشد و داشته باشیم:

$$\eta = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(F - F_۱\right), \qquad \pi = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(F + F_۱) \tag{۴}$$

که η فاصله‌ی نقطه‌ی P تا خط قطر، π فاصله‌ی نقطه‌ی صفر تا پای عمود نقطه‌ی P بر خط قطر، $0 \le \pi \le \sqrt{2}$ و $0 \le \eta \le \pi;\ F_1 \le F$ است. منحنی لورنتس بر حسب η و π برابر $\eta = f(\pi)$ است. اگر $g(X)$ پیوسته باشد و مشتق‌های $F_1(x)$ و $F(x)$ موجود باشند و $dF_1/dx = xg(x)/\mu$ و $dF/dx = g(x)$ باشد با استفاده از معادله‌ی (۴) مشتق η نسبت به π برابر $\frac{d\eta}{d\pi} = \frac{\mu - x}{\mu + x}$ و $\frac{d^2\eta}{d\pi^2} = -\frac{2\sqrt{2}\mu^2}{g(x)(\mu+x)^3}$ بنابراین η ماکزیمم مقدار خود را در نقطه $x = \mu$ اختیار می‌کند.



شکل ۱- منحنی لورنتس و تقارن آن با استفاده از تعریف کاکوانی [۸]



شکل ۲- کاکوانی و پودر و تقارن منحنی لورنتس [۹]

اگر منحنی لورنتس متقارن باشد مقدار $\eta P(F,F_1)$ در π و $(\sqrt{2}-\pi)$ به‌ازای همه‌ی مقادیر π برابر است. منحنی، چوله به سمت یک است اگر $f(\pi) > f(\sqrt{2}-\pi)$ و $\pi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ و اگر $f(\pi) < f(\sqrt{2}-\pi)$ و $\pi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ منحنی چوله به سمت صفر خواهد بود. برای مثال برای توزیع بتا با توزیع

$$B(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \qquad 0 \le x \le 1, \alpha,\beta > 0$$

که $B(\cdot,\cdot)$ تابع بتا است. منحنی لورنتس این توزیع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L(u) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)\int_0^u t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt} \quad \alpha \neq 1, \qquad 0 < \beta \le 1$$

محاسبه می‌شود و ضریب جینی آن برابر است با $G = -\frac{۲\alpha}{\alpha+\beta} - ۱ = -\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ که $\eta = c\pi^{\alpha}(\sqrt{۲} - \pi)^{\beta},\ c, \alpha, \beta > ۰$ وجود محدودیت روی c برای وجود منحنی لورنتس لازم است [۱۴]. این منحنی متقارن است اگر $\alpha = \beta$، چوله به سمت یک است اگر $\alpha < \beta$ و در غیر اینصورت چوله به سمت صفر خواهد بود.

در این مقاله در راستای مقاله‌ی [۷] اندازه‌ی جدیدی از پراکندگی ارایه می‌شود که جزئیات نقاط انتهایی درامد را بهتر بازگو می‌کند. این اندازه بر اساس توزیع‌های درامد و منحنی لورنتس آن‌ها معرفی شده است. در حقیقت اگر این دو متقارن باشند هیچ شکافی در درامد و توده‌ی مرکزی جمعیت وجود ندارد. در این صورت $M(m) = M(\mu) = ۰$ و $\big(F(\mu), L(\mu)\big) = \big(F(m), L(m)\big) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ است. اگر هریک از این دو یعنی توزیع درامد یا منحنی لورنتس از تقارن فاصله بگیرد آن‌گاه شکاف درامدی افزایش می‌یابد و $M(m) < M(\mu)$، توده‌ی جمعیت مرکزی منحنی لورنتس نیز از نقطه‌ی میانی خط تساوی فاصله می‌گیرد که به‌صورت تحدب منحنی لورنتس بیان می‌شود [۲]. این ارتباط بین نسبت‌های تقارن و شکاف درامدی است که موجب ساختن اندازه ناهمواری درامد می‌شود اما برای تعریف این شاخص نیاز به تعریف نقاطی برای کنترل شکل منحنی لورنتس و توزیع‌های درامد داریم. این نقاط کنترل‌کننده را می‌توان بر اساس آماره‌های مشاهده‌شده یا پارامترهای توزیع درامد مانند میانگین و میانه تعریف کرد. با توجه به ویژگی‌های منحنی لورنتس می‌توانیم توده‌ی مرکزی منحنی لورنتس را بر اساس چهار نقطه‌ی کنترلی $P_۰ = \big(۰, ۰\big), P_۱ = \big(F(m), L(m)\big),\ P_۲ = \big(F(\mu), L(\mu)\big),$ $P_۳ = (۱, ۱)$ بیابیم و یک اندازه‌ی جدید برای اندازه‌گیری نابرابری درامد با استفاده از توده‌ی مرکزی و ضریب چولگی منحنی لورنتس تعریف کنیم [۷].

برای تعریف شاخص جدید نقاط کنترلی معلوم $P_۰, \dots, P_n$ و $t \in [۰, ۱]$ را می‌توان در رابطه‌ی بازگشتی زیر قرار داد:

$$(۵) \qquad \begin{cases} P_{۰,j}(t) = P_j & j = ۰, \dots, n-i \\ P_{i,j}(t) = \big(۱ - t\big) P_{i-۱,j}(t) + tP_{i-۱,j+۱}(t) & i = ۱, \dots, n \end{cases}$$

با جایگذاری چهار نقطه‌ی

$$P_{\circ} = \left(\circ, \circ\right), P_{۱} = \left(F(m), L(m)\right), P_{۲} = \left(F(\mu), L(\mu)\right), P_{۳} = (۱, ۱)$$

و $t = \frac{۱}{۲}$ داریم:

$$P_{۱,j}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}P_j + \frac{۱}{۲}P_{j+۱} \qquad j = \circ, ۱, ۲, ۳$$

که تـوده‌هـای مرکـزی خطـوط ارتبـاطی نقـاط P_j و $P_{j+۱}$ مـی‌باشـند. بـرای مثـال $P_{۱,\circ}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}P_{\circ} + \frac{۱}{۲}P_{۱}$ نقطه‌ی میانی بین نقاط کنترل $P_{\circ}$ و $P_{۱}$ است. بـا اسـتفاده از رابطه‌ی بازگشتی (۵) توده‌ی مرکزی منحنی لورنتس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{توده‌ی مرکزی} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\left(P_{\circ} + ۳P_{۱} + ۳P_{۲} + P_{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{۸}\left(\left(\circ, \circ\right) + ۳\left(F(m), L(m)\right) + ۳\left(F(\mu), L(\mu)\right) + \left(۱, ۱\right)\right)$$

بنـــابراین مختصـــات تـــوده‌ی مرکـــزی $F_b = \frac{۱}{۸}(۳F(m) + ۳F(\mu) + ۱)$ و $L_b = \frac{۱}{۸}(۳L(m) + ۳L(\mu) + ۱)$ هستند.

روشـن اسـت کـه $F_b - L_b = \frac{۳}{۸}(M(m) + M(\mu))$ شـکاف درامـد در تـوده‌ی مرکـزی منحنی لورنتس است. در نهایت انـدازه‌ی نـابرابری درامـد ψ بـه‌صـورت (۶) تعریـف شـده است:

$$\psi = k(F_b - L_b) = \frac{۳}{۸\sqrt{۲}}\left[(M(m) + M(\mu)(F(\mu) + L(\mu)))\right] \qquad (۶)$$

که $k = \frac{F(\mu)+L(\mu)}{\sqrt{۲}} = \frac{S}{\sqrt{۲}}$ ضریب چولگی منحنی لـورنتس اسـت. شـاخص ψ تـابعی از میانگین نسبی انحرافات از میانگین و میانه و ضریب چولگی منحنـی لـورنتس مـی‌باشـد. لذا این شاخص علاوه بر این که یک اندازه‌ی نابرابری است معیاری برای ارایه‌ی تغییـرات مقادیر نهایی درامدها نیز می‌باشد.

قضیه‌ی ۱. اگر ψ اندازه‌ی ناهمواری درامد توضیح داده شده در رابطه‌ی (۶) باشد آن‌گاه:

$$0 \leq \psi \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

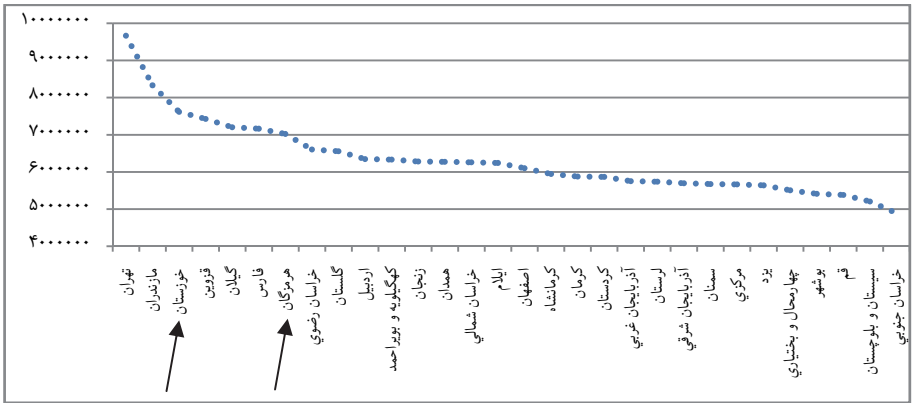
اثبات. بدیهی است که صفر یک کران پایین برای ψ است. برای این که نشان دهیم ψ کم‌تر یا مساوی $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ داریم:

$$\psi = \frac{3}{8\sqrt{2}}\left[\left(M(m)+M(\mu)\right)\left(F(\mu)+L(\mu)\right)\right] \leq \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(2M(\mu)\right)\left(F(\mu)+L(\mu)\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}\left(F(\mu)-L(\mu)\right)\left(F(\mu)+L(\mu)\right) \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}\left(F(\mu)\right)^2 \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

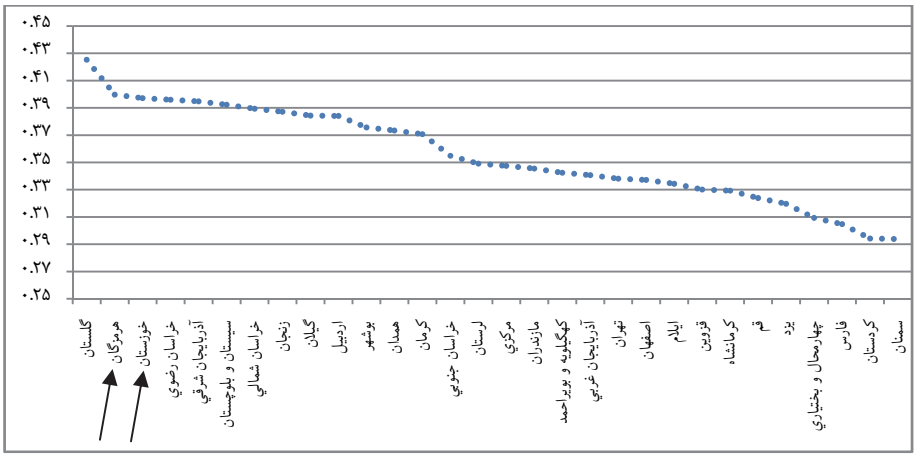
۵- مثال کاربردی

در این بخش با ارایه‌ی یک مثال به دنبال روشن شدن مفاهیم ارایه‌شده می‌باشیم برای این منظور مجموعه داده‌های درامد شهری استان‌های کشور در سال ۸۷ را با هم مقایسه می‌کنیم. داده‌های مورد استفاده از طرح آمارگیری از هزینه و درامد خانوارهای شهری در سال ۸۷ استخراج شده است. منظور از درامد، درامد خالص پولی و غیر پولی همه‌ی بخش‌های خصوصی و غیر خصوصی و درامدهای متفرقه‌ی ماهیانه‌ی خانوار و بر حسب ریال می‌باشد. جدول ۱ برخی از شاخص‌های آماری، مانند میانگین، ضریب جینی و ضریب چولگی درامد خانوار شهری استان‌های کشور را ارایه می‌دهد. با توجه به اطلاعات جدول استان‌های گیلان، خوزستان، خراسان رضوی، لرستان، هرمزگان، تهران، قم اردبیل و گلستان دارای ضریب تقارن بزرگ‌تر از یک می‌باشند به عبارتی در این استان‌ها ناهمواری درامد بیش‌تر مربوط به تعداد کمی از توانمندترین افراد جامعه می‌باشد. به بیان دیگر عده‌ی زیادی از افراد جامعه دارای درامد ناچیز هستند در حالی که افراد کمی از جامعه بخش بزرگی از ثروت جامعه را دارا می‌باشند. در مقابل استان‌های بوشهر، همدان، کردستان، اصفهان، سیستان و بلوچستان و آذربایجان شرقی دارای ضریب تقارن کوچک‌تر از یک هستند. در این استان‌ها اکثریت جامعه دارای درامدی بالا می‌باشند و عده‌ی محدودی از جامعه دارای درامد پایین می‌باشند. استان‌هایی چون مازندران، آذربایجان غربی، ایلام، کهگیلویه و بویراحمد و خراسان شمالی دارای منحنی لورنتس

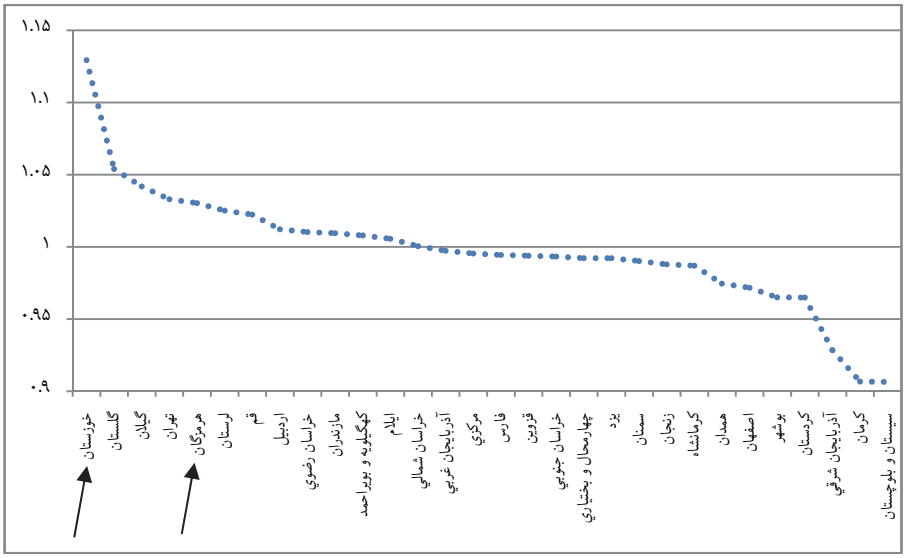
متقارن می‌باشند. نمودارهای ۳-۶ اطلاعات جدول ۱ را به‌صورت صعودی نمایش می‌دهد. با توجه به نمودارها واضح است که استان‌های تهران، مازندران و خوزستان ۳ استان با بیش‌ترین درامد و استان‌های قم، سیستان و بلوچستان و خراسان جنوبی دارای کم‌ترین درامد می‌باشند. از طرفی استان‌های گلستان، هرمزگان و خوزستان دارای بیش‌ترین نابرابری و استان‌های فارس، کردستان و سمنان دارای کم‌ترین نابرابری می‌باشند. می‌توان گفت ضریب ψ ترکیبی از ضریب تقارن S و ضریب جینی است. برای مثال شکل ۷ دو منحنی لورنتس متقاطع با ضریب جینی یکسان ۰/۴ برازش‌داده به داده‌های درامد استان‌های خوزستان و هرمزگان در سال ۸۷ را نشان می‌دهد. ضریب تقارن و ψ برای دو استان محاسبه شده‌اند. منحنی لورنتس استان خوزستان نامتقارن با $S = ۱/۱۳$ و منحنی لورنتس استان هرمزگان متقارن و $S = ۱$ می‌باشد. همان‌طور که از اطلاعات جدول ۲ مشخص است متوسط درامد ماهیانه‌ی خانوار در استان خوزستان تقریباً نه میلیون تومان است که نسبت به استان هرمزگان تقریباً یک میلیون تومان بیش‌تر است. از طرفی مقایسه‌ی ضریب چولگی توزیع برای دو استان بیانگر عدم تقارن بیش‌تر در داده‌های درامد استان خوزستان می‌باشد. جدول ۳ چگونگی توزیع درامد بین صدک‌های جمعیتی را نشان می‌دهد. با توجه به جدول صدک‌های پایین جمعیتی استان هرمزگان دارای درامد بالاتری نسبت به استان خوزستان می‌باشند، به‌طوری که این روند تا دهک هشتم جمعیتی ادامه می‌یابد. در این دهک تقریباً درامدها یکسان است و از این پس درامد صدک‌های جمعیتی استان خوزستان نسبت به استان هرمزگان افزایش می‌یابد که دلیل روشنی بر افزایش ضریب ψ در استان خوزستان می‌باشد. به‌عبارتی می‌توان گفت ناهمواری درامد در استان خوزستان بیانگر ثروتمندتر شدن ثروتمندان است.



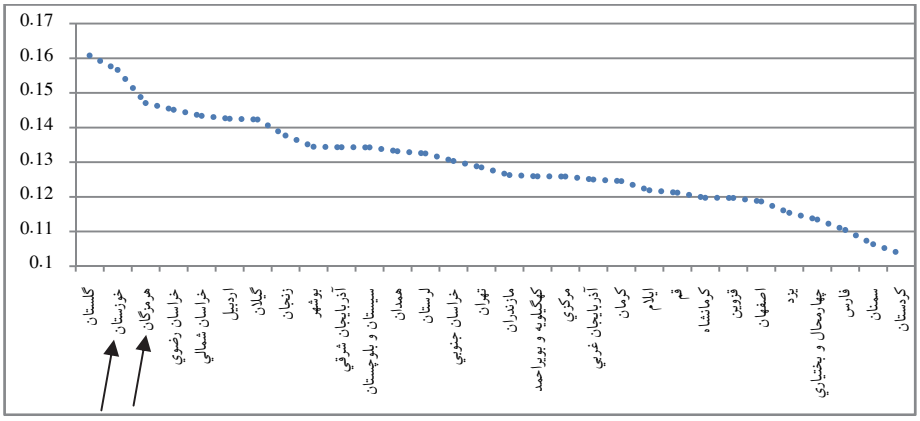
شکل ۳- متوسط درامد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



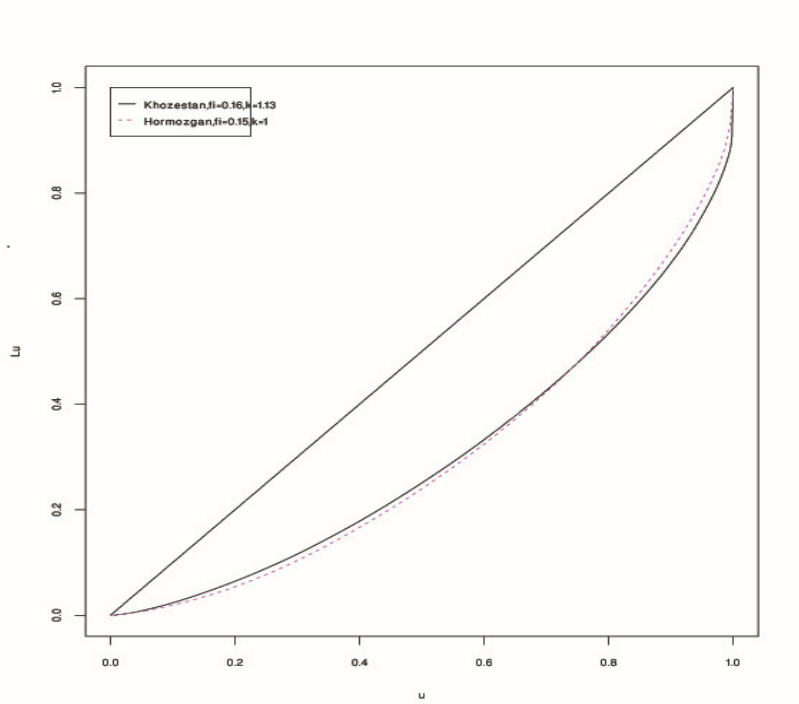
شکل ۴- ضریب جینی داده‌های درامد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



شکل ۵- ضریب تقارن داده‌های درامد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



شکل ۶- ضریب ψ داده‌های درامد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



شکل ۷- منحنی لورنتس داده‌های درامد استان‌های خوزستان (شکل ممتد) و هرمزگان (نقطه‌چین) در سال ۸۷

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای رفع نقص‌های ضریب جینی و منحنی لورنتس، تقارن منحنی لورنتس را از دیدگاه‌های مختلف بررسی کردیم. این دیدگاه‌ها گرچه با روابط متفاوتی ارایه شده بودند ولی کلیت تفسیر آن‌ها از تقارن یکسان می‌باشد. سپس در راستای [۷] ضریبی از تقارن منحنی لورنتس را به‌عنوان یک شاخص همراه ضریب جینی معرفی کردیم این شاخص برای نشان دادن چگونگی توزیع ثروت به کمک ضریب جینی می‌آید و نقص موجود در ضریب جینی را با ارایه‌ی تغییرات مقادیر نهایی درامدها رفع می‌کند. برای روشن شدن مفاهیم ارایه‌شده در این مقاله داده‌های درامد ماهیانه‌ی خانوار استان‌های خوزستان و هرمزگان در سال ۱۳۸۷ که دارای ضریب جینی یکسان می‌باشند ولی دارای توزیع یکسان نیستند که در این مورد توزیع ثروت در استان هرمزگان متقارن و توزیع ثروت در استان

خوزستان نامتقارن است که مشخص شد بخش عمده‌ای از ثروت در این استان در دست اقلیت محدود می‌باشد.

جدول ۱- برخی از شاخصهای آماری برای داده های ماهیانه درامد خانوار شهری استان های کشور در سال ۸۷(واحد ریال)

استان	کد	میانگین	انحراف معیار	ضریب جینی	S	ψ
مرکزی	۰۰	۵۶۶۳۲۶۲	۴۷۴۰۳۲۶	۰/۳۵	۰/۹۹	۰/۱۲
گیلان	۰۱	۷۲۰۳۱۸۷	۷۵۵۵۳۸۷	۰/۳۸	۱/۰۴	۰/۱۴
مازندران	۰۲	۸۳۳۳۳۳۳	۷۰۶۹۴۸۳	۰/۳۵	۱	۰/۱۳
آذربایجان شرقی	۰۳	۵۶۹۳۱۹۵	۴۹۸۸۵۵۹	۰/۳۹	۰/۹۳	۰/۱۳
آذربایجان غربی	۰۴	۵۷۴۸۰۵۴	۳۹۷۱۹۱۸	۰/۳۴	۱	۰/۱۲
کرمانشاه	۰۵	۵۹۴۵۳۳۹	۴۰۳۵۶۳۱	۰/۳۳	۰/۹۹	۰/۱۲
خوزستان	۰۵	۷۶۱۶۷۹۸	۱۶۵۸۳۳۳۳	۰/۴۰	۱/۱۳	۰/۱۶
فارس	۰۷	۷۱۶۴۷۴۱	۴۴۶۱۷۱۲	۰/۳۰	۰/۹۹	۰/۱۱
کرمان	۰۸	۵۸۷۵۲۰۷	۴۳۵۵۶۹۶	۰/۳۷	۰/۹۱	۰/۱۲
خراسان رضوی	۰۹	۶۶۰۱۲۹۷	۱۱٤۱٦٦٦۷	۰/۳۹	۱/۰۱	۰/۱۴
اصفهان	۱۰	۶۰۹۸۷۴۶	۴۹۱۳۰۱۴	۰/۳۴	۰/۹۷	۰/۱۲
سیستان و بلوچستان	۱۱	۵۲۰۳۹۰۷	۴۰۸۷۵۵۸	۰/۳۹	۰/۹۱	۰/۱۳
کردستان	۱۲	۵۸۶۸۲۹۶	۳۳۷۴۰۴۷	۰/۲۹	۰/۹۶	۰/۱۰
همدان	۱۳	۶۲۷۱۳۷۱	۵۶۷۰۲۶۳	۰/۳۷	۰/۹۷	۰/۱۳
چهارمحال و بختیاری	۱۴	۵۵۰۴۲۷۰	۳۳۵۳۵۴۰	۰/۳۱	۰/۹۹	۰/۱۱
لرستان	۱۵	۵۷۳۵۴۷۰	۴۲۸۰۷۵۰	۰/۳۵	۱/۰۲	۰/۱۳
ایلام	۱۶	۶۲۴۰۸۹۵	۴۷۹۱۷۴۰	۰/۳۳	۱	۰/۱۲
کهگیلویه و بویراحمد	۱۷	۶۳۳۲۴۳۷	۴۴۶۸۳۰۴	۰/۳۴	۱	۰/۱۳
بوشهر	۱۸	۵۴۰۸۵۶۰	۴۵۱۶۶۰۳	۰/۳۸	۰/۹۶	۰/۱۳
زنجان	۱۹	۶۲۸۱۵۴۲	۶۱۴۲۲۰۵	۰/۳۹	۰/۹۹	۰/۱۴
سمنان	۲۰	۵۶۷۱۳۵۳	۳۳۹۶۴۱۵	۰/۲۹	۰/۹۹	۰/۱۱

یزد	۲۱	۵۶۳۹۱۳۹	۳۹۸۷۳۳۷	۰/۳۲	۰/۹۹	۰/۱۱
هرمزگان	۲۲	۷۰۲۲۶۳۱	۸۳۱۹۴۵۹	۰/۴۰	۱/۰۳	۰/۱۵
تهران	۲۳	۹۶۶۶۶۶۷	۷۴۹۶۴۹۴	۰/۳۴	۱/۰۳	۰/۱۳
اردبیل	۲۴	۶۳۴۳۰۸۱	۵۵۵۵۴۸۴	۰/۳۸	۱/۰۱	۰/۱۴
قم	۲۵	۵۳۸۱۰۲۰	۳۵۵۳۵۴۳	۰/۳۲	۱/۰۲	۰/۱۲
قزوین	۲۶	۷۴۲۸۳۷۲	۶۱۱۳۹۳۰	۰/۳۳	۰/۹۹	۰/۱۲
گلستان	۲۷	۶۵۵۷۶۷۱	۱۰۵۰۰۰۰۰	۰/۴۳	۱/۰۵	۰/۱۶
خراسان شمالی	۲۸	۶۲۵۹۱۵۱	۵۸۸۸۷۷۵	۰/۳۹	۱	۰/۱۴
خراسان جنوبی	۲۹	۴۸۸۸۹۶۴	۳۹۷۸۱۰۳	۰/۳۵	۰/۹۹	۰/۱۳

جدول ۲- برخی از شاخص‌های آماری برای داده‌های درامد ماهیانه‌ی خانوار استان‌های خوزستان و هرمزگان (واحد میلیون ریال)

شهرستان	میانگین	میانه	مد	ضریب چولگی	ضریب کشیدگی	ضریب جینی	S
هرمزگان	۸۴	۶۶	۳۰	۸/۳۹	۹۸/۳۳	۰/۴۰	۱
خوزستان	۹۱	۷۱	۲۴	۱۸/۹۵	۳۹۵/۴۰	۰/۴۰	۱/۱۳

جدول ۳- برخی از صدک‌های داده‌های درامد ماهیانه‌ی خانوار استان‌های خوزستان و هرمزگان (واحد میلیون ریال)

استان	صدک ۱	صدک ۵	دهک ۲	دهک ۴	دهک ۶	دهک ۸	صدک ۹۵	صدک ۹۹	ψ
هرمزگان	۱۱	۲۴	۴۲	۶۲	۸۰	۱۰۸	۱۸۹	۳۴۹	۰/۱۵
خوزستان	۹	۱۶	۳۶	۵۸	۷۷	۱۱۲	۱۸۹	۴۲۷	۰/۱۶

توضیحات

۱. داده‌های مورد استفاده در این مقاله برای روشن شدن موضوع می‌باشد و در این مقاله بحث هیچ‌گونه تحلیلی در مورد داده‌های درامد کشور نداریم. در آینده می‌توان داده‌های درامد کشور طی سال‌های اخیر را به‌صورت تحلیلی بررسی کرد.

۲. یا به‌عبارتی دیگر منحنی لورنتس متقارن است اگر مماس بر منحنی در نقطه‌ی تقاطع با قطر فرعی مربع واحد، با قطر اصلی در محور مختصات موازی باشد و با توجه به این که محورهای تقارن به‌صورت $F(y) + L(y) = ۱$ بیان می‌شوند قابل اثبات است.

مرجع‌ها

[۱] بهدانی، زهرا؛ محتشمی برزادران، غلامرضا (۱۳۸۹). مشخصه‌هایی برای ترتیب‌های لورنتس در خانواده‌ی توزیع‌های درامد. مجله بررسی های آمار رسمی ایران. **۲۱**، ص۱۶۷-۱۵۱.

[2] Dagum, C. (1980). The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio, *Economic Applique*, **33**, 327-367.

[3] Damgaard, C. and Weiner, J. (2000). Describing Inequality in plant size or fecundity. *Ecology*, **81**, 1139-1142.

[4] Gastwirth, J.L. (1972). The estimation of the Lorenz curve and Gini index, *The Review of Economics and Statistics*, **54**, 306-316.

[5] Gini, C. (1912). Variabilita' e mutabilita, studio Economicogiuridici, universita di Cagliari Anno III, Parte 2a, reprinted in C. 211-382.

[6] Gini, C. (1932), Intorno alle curve di concentrazionee, *Metron*, **9**, 2-76.

[7] Hassan, M.Y. (2008). An income inequality measure based on the symmetric properties of both the Income Distribution and the Lorenz curve, *Egyptian Statistical Journal*, **52**, 69-108.

[8] Kakwani, N.C. (1980). *Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications*, Oxford University Press, Oxford.

[9] Kakwani, N.C. and Podder, N. (1987). Efficient Estimation of the Lorenz curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations, *Econometrica*, **44**, 137-148.

[10] Kleiber, C. (2005). The Lorenz curve in economics and econometrics. Invited paper, Gini-Lorenz Centennial conference, Siena.

[11] Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, John wiley.

[12] Kleiber, C. and Kramer, W. (2003). Efficiency, equity, and generalized Lorenz dominance. *Statistica*, **55**, 173-186.

[13] Lorenz, M.O, (1905). Method of measuring the concentration of wealth, *Journal of the American Statistical Association*, **9**. 209-219.

[14] Teekens, R. (1987). Beta Lorenz curve, ISS Working Paper Series/General Series, **35**, 1-22.

[15] Zanardi, G. (1964). Della asimmetria condizionata delle di concentrazione Lo scentramento, Rivista Italiana di Economia, *Demografia Statistica*, **18**, 431-466.

[16] Zanardi, G. (1965). L'asimmetria statistica delle curve di concentrazione, *Ricerche Econo*, **19**, 355-396.

زهرا بهدانی
کارشناس ارشد آمار
استان خوزستان، بهبهان، دانشگاه صنعتی خاتم‌الانبیا (ص) بهبهان، دانشکده‌ی علوم پایه، گروه آمار.
رایانشانی: behdani@bkatu.ac.ir

غلامرضا محتشمی برزادران
دکتری آمار
استان خراسان رضوی، مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار.
رایانشانی: grmohtashami@um.ac.ir