روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای در تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های آبرسانی

ناصر موسویان و محمدرضا جعفرزاده*

گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۴/۰۵– دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۴/۰۷)

چکیده – در مقاله حاضر روشي نوين براي تحليل هيدروليكي شبكه‌هاي آبرساني ارائه مي‌شود. در اين روش هر كدام از جملات غيرخطي معادلات انرژي با يک جمله خطي تخمين زده مي‌شود. در نتيجه سيستم معادلات خطي- غير خطي به يک دستگاه معادلات خطي- خطي تبديل شده و حل مي‌شود. جواب حاصله تخمين مناسبي براي ادامه‌ي عمليات خطي‌سازي است به اين صورت كه در مرحله بعد توابع غير خطي در بازه‌ي كوچكتري، در حوالي جواب خطي‌سازي مي‌شوند. عمليات متوالي تا رسيدن به دقت مطلوب ادامه پيدا مي‌كند. مقايسه‌ي الگوريتم خطي سازي چند مرحله‌اي با روش‌هاي نيوتن رافسون، سكانت و گراديان سراسري در مثال‌هاي متعدد، حجم محاسبات كمتر اين روش و زمان همگرايي كوتاه‌تر آن را تاييد مي‌كند.

واژگان کلیدی : شبکه آبرسانی، تحلیل هیدرولیکی، روش خطی سازی چند مرحله‌ای.

Multistage Linearization Method for Hydraulic Analysis of Water Distribution Networks

N. Moosavian and M. R. Jaefarzadeh

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract: ***A novel method is presented for hydraulic analysis of water distribution networks. In this method, each non-linear term in energy equations is estimated with a linear counterpart. Thereby, the system of linear-nonlinear equations is converted into a system of linear-linear equations and resolved. The solution is an appropriate estimation for the next iteration stage where the nonlinear terms are linearized in a smaller interval near it. The successive iterations are continued to a desirable precision. Comparing the multistage linearization algorithm with the Newton-Raphson, secant and global gradient methods in several examples confirms its less computational operation and faster convergence time.***

Keywords: ***Hydraulic analysis, Multistage linearization method, Water distribution network.***

---

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: jafarzad@um.ac.ir

فهرست علائم

A	ضرب زاویه	L	طول لوله
B	عرض از مبدا	m	توان دبی در معادله افت
C	ضرب هزن-ولامز	q	برداشت از گره
D	قطر لوله	Q	دبی لوله
f	تابع غیرخطی	R	ضرب افت هد
g	تابع خطی شده	$\|\varepsilon\|$	نرم باقیمانده
H	هد فشار گره		
hf	افت هد در لوله		

۱- مقدمه

تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های بزرگ آبرسانی از مسائل مهمی است که از چندین دهه قبل تا کنون محققان زیادی را به خود مشغول کرده است. معادلات حاکم بر این سیستم‌ها شامل معادلات پیوستگی جرم در هر گره و افت انرژی در هر لوله است. این معادلات بر اساس مجهولات به چهار دسته معادلات دبی، Q، معادلات هد، H، معادلات اصلاح شده‌ی دبی ΔQ و معادلات دبی ـ هد، Q-H، تقسیم بندی می‌شوند. در حالت اول سیستم معادلات پیوستگی جریان در گره‌ها و افت انرژی در حلقه ها بر حسب Q نوشته می‌شوند. در حالت دوم معادلات پیوستگی در گره ها بر حسب H، فرمول بندی می‌شوند. در حالت سوم معادلات افت انرژی در هر حلقه‌ی بسته بر حسب ΔQ نوشته و حل می‌شود و در حالت چهارم معادلات پیوستگی جریان در هر گره برحسب Q و معادلات افت انرژی در هر لوله برحسب H و Q نوشته می‌شود، [۱].

هاردی کراس [۲] روشی بر مبنای اصلاحات پی در پی مجهولات برای تحلیل شبکه ها ارائه کرد. در این روش دبی‌های اولیه طوری حدس زده می‌شوند که معادلات پیوستگی در گره ها برقرار باشند. در فرایند تحلیل، این دبی‌ها به‌طور متوالی اصلاح می‌شوند تا معادلات انرژی (بر حسب ΔQ) نیز در حلقه‌ها با دقت مناسب ارضا شوند. در شبکه‌های کوچک از روش کراس به علت سادگی، به‌طور گسترده استفاده می‌شود. اما ایراد اساسی وابستگی این روش به حدس اولیه است به طوری‌که با بزرگ شدن شبکه، همگرایی مدل بسیار کند می‌شود و در برخی موارد احتمال واگرایی وجود دارد.

مارتین و پیترز [۳] اولین کسانی بودند که در تحلیل شبکه‌های آبرسانی از روش نیوتن-رافسون استفاده کردند. در روش آن‌ها کلیه معادلات بر حسب هدهای گرهی، H، نوشته می‌شوند. آن‌گاه با اصلاح هد در تکرارهای متوالی جواب مسئله به‌دست می‌آید. یکی از معایب روش مارتین و پیترز عدم همگرایی مطلوب آن در شبکه های بزرگ است. برای رفع این مشکل باید برخی از لوله‌های شبکه موقتاً در روند تحلیل حذف شوند. از دیگر معایب، نوسانات زیاد تا رسیدن به همگرایی مطلوب است. برای کاهش نوسانات مقدار ΔH اصلاحی به نصف تقلیل می‌یابد البته این کار سبب افزایش تعداد تکرارها می‌شود. لیو [۴] نسخه ساده تری از روش نیوتن-رافسون را ارائه کرد. در این روش ماتریس ژاکوبین به دو ماتریس قطری و غیر قطری تجزیه می‌شود. نظر به اهمیت ماتریس قطری، ماتریس غیر قطری برای ساده سازی حذف می‌شود. در نتیجه حل دستگاه معادلات خطی بسیار آسان می‌شود. در صورت انتخاب حدس اولیه نامناسب این روش

واگرا می‌شود.

روش نظریه خطی برای اولین بار توسط وود و چارلز [۵] بر حسب معادلات Q ارائه شد. در این روش نیازی به ارضای معادلات پیوستگی در انتخاب حدس اولیه نیست و مشکلات کندی همگرایی نیز که در روش نیوتن-رافسون بر حسب معادلات H وجود داشت تا حدودی رفع شده است. در این روش معادلات غیرخطی افت انرژی، خطی می‌شوند و در هر تکرار دستگاه معادلات خطی شده Q حل می‌شود. با به روز رسانی دبی جریان در هر تکرار و اصلاح ضرایب خطی‌سازی محاسبات به جواب نهایی همگرا می‌شود. عیب این روش نوساناتی است که پیرامون جواب نهایی به‌وجود می‌آید. برای غلبه بر این مشکل، دبی جریان برابر میانگین دبی تکرار قبل و ماقبل فرض می‌شود هر چند این راهکار نمی‌تواند نوسانات خطا را به‌طور کلی حذف کند اما روند همگرایی با سرعت بیشتری انجام می‌شود [۶]. وود و فانک [۷] با استفاده از بسط سری تیلور روش جدیدی برای حل معادلات Q ارائه کردند. این روش عینا برابر با روش نیوتن-رافسون بر حسب معادلات Q است. درحال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه‌های آبرسانی به ویژه در نرم افزار تجاری KYPIPE استفاده می‌شود [۸] .

با توجه به موفقیت اولیه روش نظری خطی، ایزاک و میلز [۹] نسخه دیگری از این روش را بر اساس هدهای گرهی H ارائه کردند. برتری این روش نسبت به روش وودو چارلز، سادگی مدل‌سازی و تقارن ماتریس ضرایب است در نتیجه اطلاعات در فضای کمتری ذخیره می‌شود. در این روش هدهای گرهی بدون تامین معادلات پیوستگی حدس زده می‌شوند. انتخاب حدس اولیه مناسب سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. روش ایزاک در دبی های نزدیک به صفر ناپایدار می‌شود. برای رفع این مشکل ایزاک و میلز لوله‌های با دبی نزدیک به صفر را حذف کردند.

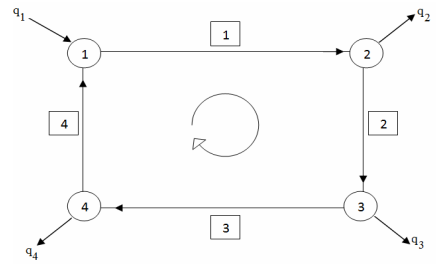
تودینی و پیلاتی [۱۰] روش گرادیان سراسری[1] (GGA) را برای تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها به‌کار بردند در این روش معادلات افت انرژی در حلقه ها به صورت تابع هدف و معادلات پیوستگی به صورت قید، در یک مسئله‌ی بهینه سازی تعریف می‌شود. سپس با استفاده از ضرایب لاگرانژ مسئله‌ی بهینه سازی، بدون قید شده و معادلات حاصله با به کار بردن روش نیوتن- رافسون حل می‌شوند. درحال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه‌های آبرسانی به ویژه در نرم افزارهای تجاری EPANET و WATERGEMS استفاده می‌شود.

باشا و کساب [۱۱] روشی مبنی بر نظریه اختلال ارائه کردند که در هر شبکه با سه تکرار مقادیر نزدیک به جواب نهایی را ارائه می‌داد اما دقت کافی نداشت. ژاکوب و گوپتا نیز روش سکانت (خطی سازی دو نقطه‌ای) را به جای روش نیوتن- رافسون در الگوریتم تودینی به‌کار بردندکه با تقریب مناسبی به تحلیل شبکه می‌پرداخت [۱۲].

اسپیلیوتیس و تساکیریس [۱۳] روش نیوتن-رافسون را بر روی معادلات H به‌کار بردند. آن‌ها از رابطه‌ی افت هد سوامی [۱۴] به جای معادلات افت هد دارسی-ویسباخ یا هیزن- ویلیامز استفاده کردند. معادله افت هد سوامی غیر خطی است و برای استفاده از آن باید در هر گام یک معادله غیر خطی مربوط به افت هد علاوه بر روش نیوتن- رافسون بر معادلات H حل شود. همگرایی به سوی جواب در راهکار اسپلیوتیس و تساکیریس با نوساناتی همراه است.

به طور کلی رفتار تابع در فرایند همگرایی تاثیر به‌سزایی دارد. اگر معادلات بر حسب دبی لوله ها نوشته شود توان مجهولات Q که در معادلات غیر خطی انرژی ظاهر می‌شود بزرگتر از یک (نزدیک به دو) می‌شود. اما در صورتی که معادلات بر حسب هدهای گرهی نوشته شود، توان مجهولات H کوچکتر از یک خواهد بود. این خاصیت، همگرایی معادلات Q را تضمین می‌کند و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد [۱۰].

در تحقیق حاضر روشی نوین با عنوان "روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای۲ برای حل دستگاه معادلات غیر خطی Q



شکل۱- شبکه‌ی یک حلقه‌ای با ۴ گره

معرفی می‌شود. در این کار جمله های غیر خطی معادلات انرژی، خطی سازی می‌شود در نتیجه دستگاه معادلات پیوستگی و انرژی به یک سیستم خطی- خطی شده تبدیل و حل می‌شود سپس در تکرار بعد توابع غیر خطی در بازه کوچکتری حول جواب، مجددا خطی سازی و حل می‌شود. عملیات تا همگرایی به جواب نهایی با دقت مناسب ادامه پیدا می‌کند. زمان همگرایی روش پیشنهادی کمتر از سایر روش‌هاست. این روش به حدس اولیه بستگی ندارد، و مرتبه همگرایی آن مشابه روش نیوتن رافسون است. در ادامه چگونگی کاربرد این روش در تحلیل هیدرولیکی شبکه های آبرسانی به‌طور کامل شرح داده خواهد شد و زمان و روند همگرایی آن با روش‌های نیوتن رافسون (الگوریتم مورد استفاده در نرم افزار KYPIPE)، سکانت و گرادیان سراسری (الگوریتم مورد استفاده در نرم افزارهای EPANET و WATERGEMS) مقایسه می‌شود.

۲- معادلات شبکه های توزیع آب

در شبکه‌های توزیع آب شامل لوله‌ها، مخازن، پمپ‌ها و شیرها، مجهولات عبارت از دبی و افت هد در لوله‌هاست. این مجهولات از حل دستگاه معادلات پیوستگی در گره‌ها و انرژی در لوله‌ها به‌دست می‌آیند. بر اساس معادله پیوستگی جمع جبری جریان های ورودی و خروجی به یک گره j صفر می‌شود:

$$\sum_k Q_k = q_j \qquad (۱)$$

q_j میزان برداشت ازگره و Q_k دبی لوله های متصل به آن است. افت فشار آب در لوله k ام h_k از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$h_k = H_i - H_j = R_k . Q_k^n \qquad (۲)$$

که در آن H_i و H_j هدهای گرهی در ابتدا و انتهای لوله، R_k ضریب مقاومت لوله k ام با دبی Q_k است. n بسته به معادله مقاومت جریان یک عدد ثابت است. برای مثال در صورت استفاده از معادله هیزن ویلیامز مقادیر R و n در سیستم آحاد SI مطابق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$R = \frac{10.67L}{C^{1.852} D^{4.87}}, \quad n = 1.852 \qquad (۳)$$

C ضریب هیزن ویلیامز (وابسته به جنس لوله)، D قطر لوله و L طول آن است.

۳- کاربرد معادلات Q در یک شبکه تک حلقه‌ای

در شکل (۱)، برای سادگی، یک شبکه تک حلقه‌ای با میزان برداشت q_j از هر گره نشان داده شده است. برای هر گره به غیر از آخرین گره یک معادله خطی پیوستگی مطابق رابطه‌ی (۱) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_4 &= q_1 \\ Q_1 - Q_2 &= q_2 \\ Q_2 - Q_3 &= q_3 \end{aligned} \qquad (۴)$$

معادله پیوستگی برای آخرین گره زائد است و از جمع جبری سایر معادلات به‌دست می‌آید.

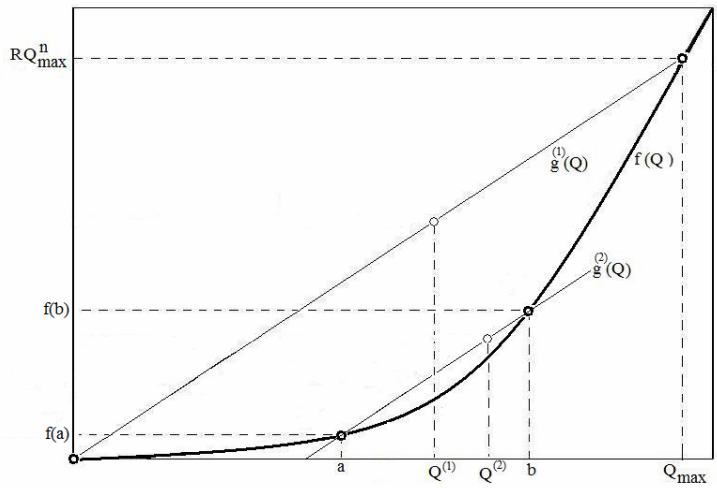
برای هر حلقه k(=1) نیز یک معادله انرژی نوشته می‌شود. این معادله غیرخطی است:

$$R_1 |Q_1|^{n-1} Q_1 + R_2 |Q_2|^{n-1} Q_2 + R_3 |Q_3|^{n-1} Q_3 + R_4 |Q_4|^{n-1} Q_4 = 0 \qquad (۵)$$

علامت قدر مطلق برای حفظ جهت جریان در لوله است. با حل همزمان دستگاه معادلات خطی پیوستگی و غیرخطی انرژی دبی در لوله‌ها محاسبه می‌شود.

۴- روش خطی سازی چند مرحله‌ای

در روش خطی سازی چند مرحله‌ای هر کدام از جملات



شکل۲- خطی سازی تابع غیر خطی

غیرخطی معادلات انرژی با یک جمله خطی تخمین زده می‌شود. در نتیجه سیستم معادلات خطی- غیر خطی (۴) و (۵) به دستگاه معادلات خطی- خطی شده تبدیل و حل می‌شود. در آغاز اختلاف بین دو تابع خطی و غیر خطی قابل ملاحظه است اما جواب حاصله تخمین مناسبی برای ادامه عملیات خطی سازی است به این صورت که در مرحله بعد توابع غیر خطی در بازه کوچکتری، در حوالی جواب خطی‌سازی می‌شود. عملیات متوالی تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه پیدا می‌کند. به عنوان مثال هر کدام از توابع غیر خطی $f(Q) = RQ^n$ را در بازه $[0,\ Q_{max}]$ مطابق شکل (۲) در نظر بگیرید. ابتدا این منحنی با معادله خطی $g^{(1)}(Q)$ در این بازه تخمین زده می‌شود:

$$g^{(1)}(Q) = R \cdot Q_{max}^{n-1} \cdot Q \qquad (۶)$$

Q_{max} مقدار ثابتی است که بسته به شرایط مسئله تعیین می‌شود. در مسئله تحلیل شبکه Q_{max} را می‌توان برابر حداکثر دبی عبوری ممکن از هر لوله فرض کرد. با حل سیستم معادلات خطی- خطی شده تخمین اولیه دبی $Q^{(1)}$ در هر لوله به دست می‌آید. در مرحله بعد، برای افزایش دقت، بازه $[0,\ Q_{max}]$ به m فاصله به اندازه $\Delta Q = \frac{Q_{max}}{m}$ تقسیم می‌شود.

آن‌گاه مقادیر a و b در دو سوی $Q^{(1)}$ با شرط $(a < Q^{(1)} < b)$ مشخص می‌شود:

$$\begin{cases} a = \left[\dfrac{Q}{\Delta Q}\right]\Delta Q \\ b = \left[\dfrac{Q}{\Delta Q} + 1\right]\Delta Q \end{cases} \qquad (۷)$$

در روابط فوق نماد [ ] نشانگر جزء صحیح است. سپس بر دو نقطه (a, f (a)) و (b, f (b)) مطابق شکل (۲) خطی به معادله $g^{(2)}(Q)$ گذرانده می‌شود:

$$g^{(2)}(Q) = AQ + B \qquad (۸)$$

که در آن

$$\begin{cases} A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ B = f(a) - a\,\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{cases} \qquad (۹)$$

مثلاً برای شبکه‌ی تک حلقه‌ای شکل (۱) با جایگذاری $g^{(2)}(Q)$ از معادله (۸) برای هر لوله در معادله انرژی (۵) شکل ماتریسی دستگاه معادلات پیوستگی و انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -B_1 - B_2 - B_3 - B_4 \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

در این معادلات ضرایب A_i و B_i برای لوله i مستقلا محاسبه می‌شود. با حل دستگاه معادلات خطی (۱۰) تخمین جدید $Q^{(2)}$ برای دبی‌ها به دست می‌آید. عملیات تا رسیدن به دقت مناسب ادامه پیدا می‌کند در هر مرحله تنها ضرایب A_i و B_i در معادله خطی شده انرژی ارزیابی می‌شوند در حالی‌که معادلات پیوستگی ثابت باقی می‌مانند.

۵- مقایسه روش خطی‌سازی چندمرحله‌ای با روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت

نظر به تشابه روش خطی سازی چند مرحله‌ای با روش‌های نیوتن- رافسون و سکانت در این بخش حجم عملیات این روش‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شود. الگوریتم خطی سازی نیوتن-رافسون برای حل معادله غیرخطی f(Q)=0 به شرح زیر است:

$$Q^{(k)} = Q^{(k-1)} - \Delta Q \quad (۱۱)$$
$$f'(Q^{(k-1)})\Delta Q = f(Q^{(k-1)})$$

(k) شمارنده‌ی تکرار است.

برای سیستم معادلات شبکه شکل (۱) دستگاه خطی شده به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ R_1|Q_1|^{n-1} & R_2|Q_2|^{n-1} & R_3|Q_3|^{n-1} & R_4|Q_4|^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_1 - Q_4 + q_1 \\ Q_1 - Q_2 - q_2 \\ Q_2 - Q_3 - q_3 \\ R_1Q_1|Q_1|^{n-1} + R_2Q_2|Q_2|^{n-1} + R_3Q_3|Q_3|^{n-1} + R_4Q_4|Q_4|^{n-1} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

درایه‌های ماتریس ضرایب سمت چپ و بردار سمت راست از تکرار (k-1) ام به دست می‌آید. پس از هر بار حل دستگاه معادلات خطی، با به‌روز رسانی مقادیر ΔQ، دبی ها مقادیر جدیدی اختیار می‌کنند وماتریس ضرایب و بردار مذکور اصلاح می‌شود.

الگوریتم خطی سازی روش سکانت برای حل معادله غیر خطی f(Q)=0 مطابق زیر است[۱۰]:

$$Q^{(k)} = Q^{(k-1)} - \Delta Q$$
$$\Delta Q = f(Q^{(k-1)}) \frac{Q^{(k-1)} - Q^{(k-2)}}{f(Q^{(k-1)}) - f(Q^{(k-2)})} \quad (۱۳)$$

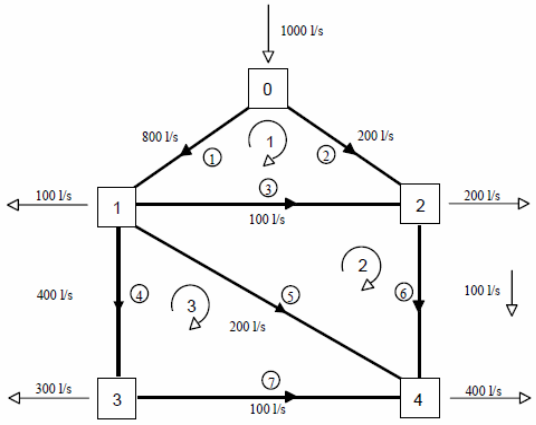
تفاوت روش سکانت با روش نیوتن-رافسون در تخمین مشتق تابع f (ماتریس ژاکوبین) است. با استفاده از روش سکانت دستگاه معادلات شبکه حلقه‌ای شکل (۱)، مطابق زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ A_1^* & A_2^* & A_3^* & A_4^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_1 - Q_4 + q_1 \\ Q_1 - Q_2 - q_2 \\ Q_2 - Q_3 - q_3 \\ R_1Q_1|Q_1|^{n-1} + R_2Q_2|Q_2|^{n-1} + R_3Q_3|Q_3|^{n-1} + R_4Q_4|Q_4|^{n-1} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$A_i^* = \frac{(R_iQ_i|Q_i|^{n-1})^{k-1} - (R_iQ_i|Q_i|^{n-1})^{k-2}}{(Q_i)^{k-1} - (Q_i)^{k-2}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود حجم عملیات محاسبه‌ی ماتریس ضرایب در طرف چپ معادلات (۱۰)، (۱۲) و (۱۴) تقریبا یکسان است. عملیات بروز رسانی بردار سمت راست، در روش خطی سازی چند مرحله‌ای تنها معادلات انرژی را در برمی‌گیرد اما در روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت کلیه معادلات را شامل می‌شود به همین دلیل حجم محاسبات روش خطی سازی از دو روش دیگر کمتر می‌شود.

روش خطی‌سازی به حدس اولیه وابسته نیست و با افزایش تعداد تقسیمات تابع غیر خطی(یعنی m) قاطع به مماس میل می‌کند و مرتبه همگرایی آن همانند روش نیوتن-رافسون از مرتبه دو می‌شود در حالی‌که مرتبه همگرایی روش سکانت در حدود ۱/۶۱۸ است [۱۵].



شکل ۳- شبکه‌ی حلقوی مورد مطالعه مثال ۱

جدول ۱- اطلاعات شبکه‌ی آبرسانی مربوط به مثال ۱

شماره لوله	دبی (l/s)	R
۱	۸۰۰	۱/۵۶۲۵
۲	۲۰۰	۵۰
۳	۱۰۰	۱۰۰
۴	۴۰۰	۱۲/۵
۵	۲۰۰	۷۵
۶	۱۰۰	۲۰۰
۷	۱۰۰	۱۰۰
شماره گره	تقاضا(l/s)	هد (m)
۰	۱۰۰۰-	۱۰۰
۱	۱۰۰	۹۹
۲	۲۰۰	۹۸
۳	۳۰۰	۹۷
۴	۴۰۰	۹۶

۶- ارزیابی روش‌های مختلف تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله‌ها

روش وود و فانک که در نرم افزار تجاری KYPIPE به‌کار برده می‌شود، همان روش نیوتن-رافسون برای حل معادلات Q است [۸] روش گرادیان سراسری که در نرم افزار EPANET به‌کار برده می‌شود همان روش نیوتن-رافسون برای معادلات Q-H است[۱۰]. در بخش قبل به لحاظ نظری ثابت شد که روش خطی سازی چند مرحله‌ای زمان کمتری نسبت به روش‌های سکانت و نیوتن-رافسون برای رسیدن به همگرایی صرف می‌کند. در این بخش کارایی این روش به لحاظ عملی در مقایسه با روش‌های مذکور و روش گرادیان سراسری در چند شبکه کوچک و بزرگ با و بدون پمپ بررسی می‌شود.

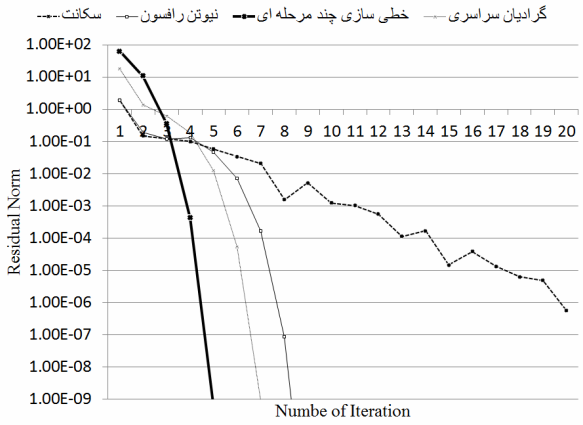
مثال عددی ۱

شبکه شکل (۳) با ۵ گره و ۷ لوله را در نظر بگیرید. ضریب مقاومت برای هر لوله R و دبی برداشت از هر گره q در جدول (۱) نشان داده شده است. گره صفر مخزن ذخیره‌ای با هد ۱۰۰ متر است که دبی ۱۰۰۰ لیتر بر ثانیه را وارد شبکه می‌کند [۱۰] . پس از تحلیل هیدرولیکی مقادیر نهایی دبی لوله‌ها Q و هد گره ها H نیز در همان جدول درج شده‌اند.

این مسئله با چهار روش نیوتن-رافسون، سکانت، گرادیان سراسری و خطی سازی چند مرحله‌ای حل می‌شود. محاسبات با ارضای شرط $\|\varepsilon\| \le 1.e-6$ خاتمه پیدا می‌کند. $\|\varepsilon\|$ نُرم باقیمانده یا قدر مطلق حداکثر اختلاف بین دبی‌های هر لوله در دو گام متوالی محاسباتی است. در این مثال Q_{max} برابر جمع دبی ورودی به لوله‌ها (۱۰۰۰ لیتر بر ثانیه) فرض می‌شود. در جدول (۲) تعداد تکرار و زمان همگرایی برای سه حدس اولیه مختلف $Q=Q_{max}$ ، $Q=0.1Q_{max}$ و $Q=0$ در روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت درج شده است. ضرایب توابع غیر خطی در روش خطی سازی چند مرحله‌ای با فرض $Q=Q_{max}$ انتخاب می‌شود. برای زمان همگرایی از واحد " فلاپس" استفاده می‌شود. فلاپس به معنی عملیات شناور هر نقطه در ثانیه و مقیاسی برای سنجش کارایی پردازشگر رایانه است. نهایتا هر چهار روش به ازای کلیه حدس‌های اولیه همگرا می‌شوند. انتخاب حدس اولیه مناسب

جدول ۲- روند همگرایی روش‌های مختلف در مثال ۱

حدس اولیه	۰		$۰/۱Q_{max}$			Q_{max}		
روش تحلیل	نیوتن-رافسون	سکانت	نیوتن-رافسون	سکانت	نیوتن-رافسون	سکانت	گرادیان سراسری	خطی سازی چند مرحله‌ای
تعداد تکرار	٦	١٨	٧	١٨	٩	٢٠	٧	٦
فلاپس	١٥٩٨۴	۵۵٢٧٢	١٨٧٦٧	۵۵٢٢٧	٢۴۴۵٨	٦١٣٣٣	٢٠١۴٣	۴٣٠۴



شکل ۴- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۱

در تعداد تکرار و زمان همگرایی روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت تا حدی موثر است. زمان همگرایی روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای بسیار کوتاه‌تر از سه روش دیگر است. در شکل (۴) روند همگرایی سه روش به ازای حدس اولیه Q_{max} ترسیم شده است. شیب همگرایی روش خطی سازی چند مرحله‌ای از همان ابتدا بسیار تندتر از سه روش دیگر است. شیب همگرایی روش سکانت بسیار کند و همراه با نوسانات متعدد است. شیب همگرایی روش‌های نیوتن-رافسون و گرادیان سراسری به شرط رسیدن به محدوده‌ی جواب، مشابه روش خطی سازی چند مرحله‌ای است. در این مثال روش گرادیان سراسری سریع‌تر از روش نیوتن-رافسون به جواب همگرا می‌شود.

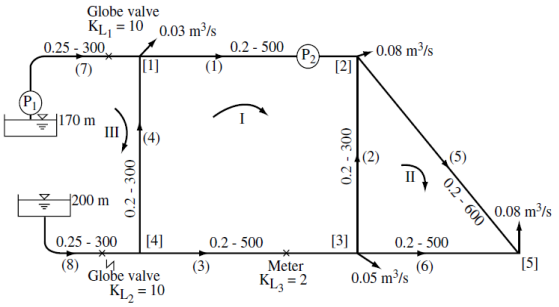
مثال عددی ۲

در این مثال یک شبکه‌ی حلقوی با شیر، پمپ و مخزن مطالعه می‌شود. در شکل (۵) شبکه‌ای با ۸ لوله، ۲ پمپ، ۲ مخزن، ۲ شیر و یک کنتور نشان داده شده است. مشخصات هیدرولیکی مسئله در شکل مذکور و جدول (۳) درج شده است [۱۶]. ضرایب منحنی مشخصه‌ی پمپ با معادله $hp = AQ^2 + BQ + C$ (که در آنجا $Q[m^3/s]$ و $h_p[m]$) به شرح زیر است:

پمپ ۱ $A_1 = 0 - 2220,\ B_1 = 44.4,\ C_1 - 12.28$

پمپ ۲ $A_2 = -55.6,\ B_2 = 1.667,\ C_2 = 4.1$

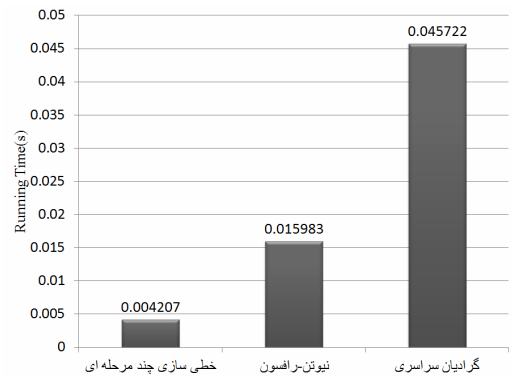
حدس اولیه برای هر سه روش یکسان و برابر جمع دبی ورودی به لوله‌ها، Q_{max} ، در نظر گرفته شده است. زمان و روند همگرایی سه روش گرادیان سراسری، نیوتن-رافسون و خطی سازی چندمرحله‌ای در شکل‌های (۶) و (۷) نمایش داده شده است. زمان همگرایی روش خطی سازی چند مرحله‌ای از دو روش دیگر بسیار کمتر است. روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای بسیار سریع‌تر از دو روش دیگر



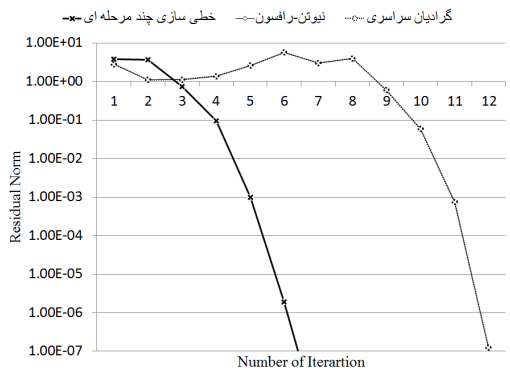
شکل ۵- شبکه‌ی حلقوی شامل پمپ، شیر و دو مخزن

جدول ۳- ضریب مقاومت لوله ها و توان دبی در معادله افت هیزن-ویلیامز

شماره لوله	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸
$R(m^{-5}s)$	۱۱٦۰	٦۱۳	۱۱٦۰	٦۹۰	۱۲۹۲	۱۱۱۵	۳۲۲	۲۳۹
n	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲



شکل ٦- زمان همگرایی روش های مختلف در مثال ۲

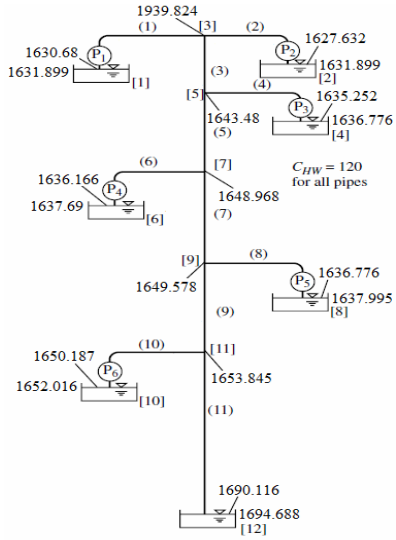


شکل ۷- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۲ (در شکل ۷ روند همگرایی روش گرایان سراسری و نیوتن-رافسون بر هم منطبق است)

همگرا می‌شود. روند همگرایی روش‌های گرادیان سراسری و نیوتن-رافسون یکسان و شیب همگرایی آن‌ها پس از رسیدن به محدوده‌ی جواب، مشابه شیب روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای است. روش خطی سازی چند مرحله‌ای پس از ۶ تکرار و دو روش دیگر پس از ۱۲ تکرار به دقت ۶-e۱ می‌رسند. در شکل (۷) روند همگرایی روش گرادیان سراسری و نیوتن-رافسون بر هم منطبق‌اند.

مثال عددی ۳

در این مثال یک شبکه‌ی شاخه‌ای با مخازن متعدد و پمپ بررسی می‌شود. شبکه‌ی شکل (۸) را با ۱۱ لوله، ۶ پمپ و ۷ مخزن در نظر بگیرید. مشخصات هیدرولیکی مسئله در همین شکل و جدول (۴) نشان داده شده است [۱۶].



شکل ۸- شبکه‌ی شاخه‌ای با مخزن مثال ۳

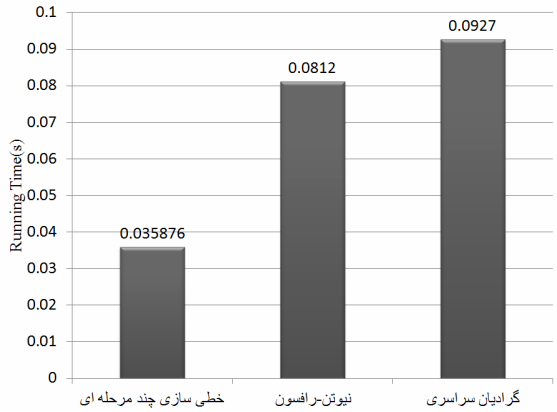
جدول ۴- اطلاعات شبکه‌ی آبرسانی مثال ۳

شماره لوله	قطر(میلیمتر)	طول (متر)	دبی (متر مکعب بر ثانیه)
۱	۲۰۳/۲	۵۰۹/۰۱۶	۰/۰۶۲
۲	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۲
۳	۳۰۴/۸	۷۹۲/۴۸	۰/۱۲۴
۴	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۳
۵	۳۵۵/۶	۵۶۶/۹۲۸	۰/۱۸۷
۶	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۴
۷	۴۰۶/۴	۷۱۳/۲۳۲	۰/۲۵۱
۸	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۶
۹	۴۵۷/۲	۵۶۰/۸۳۲	۰/۳۱۷
۱۰	۲۰۳/۲	۷۶۲	۰/۰۶۲
۱۱	۴۵۷/۲	۱۳۷۱/۶	۰/۳۷۸

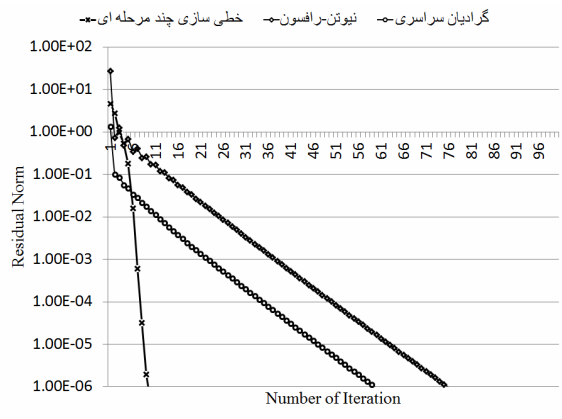
زمان و روند همگرایی سه روش گرادیان سراسری، نیوتن-رافسون و خطی سازی چندمرحله‌ای در شکل‌های (۹) و (۱۰) نمایش داده شده است. شیب همگرایی روش خطی سازی بسیار تند تر از دو روش دیگر است و در نتیجه زمان همگرایی آن به مراتب کوتاه‌تر می‌شود. روش خطی سازی چند مرحله‌ای پس از ۱۰ تکرار و روش‌های نیوتن-رافسون و گرادیان سراسری به‌ترتیب پس از ۷۶ و ۶۰ تکرار به به دقت ۶-e۱۰ می‌رسند.

مثال عددی ۴

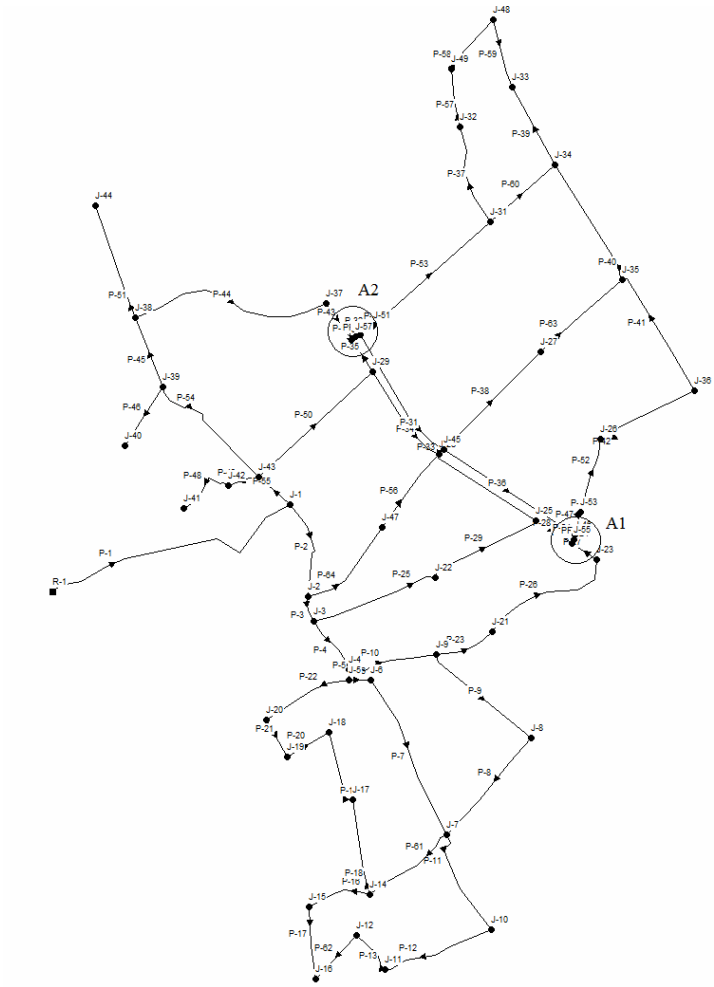
در این مثال شبکه‌ی آبرسانی شهر فرهادگرد در نزدیکی



شکل ۹- زمان همگرایی روش‌های مختلف در مثال ۳



شکل ۱۰- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۳



شکل ۱۱- شبکه‌ی آبرسانی شهر فرهادگرد

جدول ۵- تقاضا و ارتفاع گره‌ها در مثال ۴

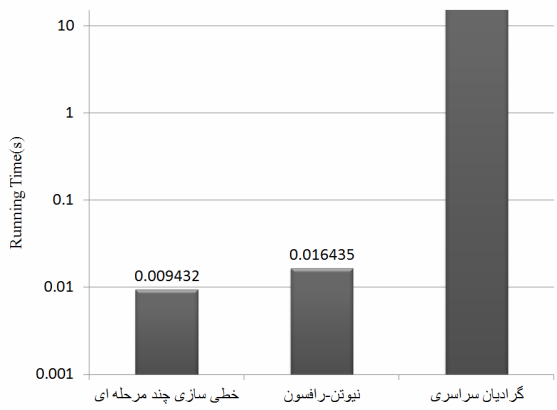
گره	ارتفاع متر	تقاضا لیتر برثانیه	گره	ارتفاع متر	تقاضا لیتر برثانیه	گره	ارتفاع متر	تقاضا لیتر برثانیه
۱	۴۷۹	۲/۱۰	۲۰	۴۷۲	۱/۳۱	۳۹	۴۷۲/۷	۰/۹۸
۲	۴۶۸/۷	۳/۳۳	۲۱	۴۵۶/۲	۰/۶۹	۴۰	۴۷۸/۷	۰/۹۵
۳	۴۶۶/۵	۱/۴۲	۲۲	۴۵۸/۳	۱/۲۹	۴۱	۴۸۶	۱/۰
۴	۴۶۷/۱	۰/۵۶	۲۳	۴۴۶/۳	۰/۸۱	۴۲	۴۷۷/۵	۰/۳۸
۵	۴۶۹	۰/۱۶	۲۴	۴۴۰	۰/۵۷	۴۳	۴۷۳/۳	۰/۷۱
۶	۴۶۷/۳	۱/۲۳	۲۵	۴۴۵/۴	۱/۵۲	۴۴	۴۷۱/۴	۲/۱۰
۷	۴۶۹/۲	۲/۴۷	۲۶	۴۳۸	۲/۷۷	۴۵	۴۵۴/۵	۰/۱۰
۸	۴۶۰/۵	۰/۳۹	۲۷	۴۴۱	۲/۰۱	۴۶	۴۴۰	۰/۰
۹	۴۶۱/۳	۴/۵۴	۲۸	۴۵۴/۵	۰/۹۲	۴۷	۴۶۲/۸	۳/۵۹
۱۰	۴۶۵/۴	۰/۹۸	۲۹	۴۵۸	۱/۰۳	۴۸	۴۳۱/۸	۰/۱۶
۱۱	۴۷۶/۳	۰/۴۶	۳۰	۴۵۵/۸	۱/۲۴	۴۹	۴۳۱/۲	۰/۳۱
۱۲	۴۷۷	۰/۶۹	۳۱	۴۳۷	۱/۴۵	۵۰	۴۵۵/۸	۰/۰
۱۳	۴۵۵/۸	۰/۰	۳۲	۴۳۴/۶	۱/۰	۵۱	۴۵۵/۸	۰/۰
۱۴	۴۷۲/۵	۰/۱۶	۳۳	۴۳۰	۱/۳۰	۵۲	۴۴۰	۰/۰
۱۵	۴۷۸/۷	۰/۶۷	۳۴	۴۳۹/۴	۰/۴۰	۵۳	۴۴۰	۰/۰
۱۶	۴۷۸/۵	۰/۵۶	۳۵	۴۳۳/۳	۱۶/۳۱	۵۴	۴۴۰	۰/۰
۱۷	۴۷۵/۵	۴/۷۵	۳۶	۴۳۷	۱/۱	۵۵	۴۴۰	۰/۰
۱۸	۴۷۵	۰/۲۱	۳۷	۴۵۵/۶	۰/۵۶	۵۶	۴۵۵/۸	۰/۰
۱۹	۴۸۰	۰/۳۲	۳۸	۴۶۸/۵	۱۰/۳۲	۵۷	۴۵۵/۸	۰/۰

مشهد تحلیل می‌شود. در شکل (۱۱) این شبکه آبرسانی با ۶۶ لوله، ۵۷ گره و دو شیر سوزنی با ضریب افت ۱۰ نشان داده شده است. شیرهای قطع و وصل در نواحی A1 و A2 قرار دارند. مشخصات هندسی لوله‌ها در جدول (۴) و ارتفاع و تقاضای مصرف در گره ها در جدول (۵) داده شده است.

زمان و روند همگرایی سه روش گرادیان سراسری، نیوتن-رافسون و خطی‌سازی چندمرحله‌ای در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده است. در این مثال روش گرادیان سراسری با دقت مطلوب همگرا نمی‌شود ولی روش‌های خطی‌سازی چندمرحله‌ای و نیوتن-رافسون به‌ترتیب پس از ۴ و ۱۰ تکرار به همگرایی با دقت ۶-e۱۰ می‌رسند. روش خطی سازی چند مرحله‌ای بسیار سریع به محدوده‌ی جواب نهایی نزدیک می‌شود و زمان همگرایی آن تقریبا نصف روش نیوتن-رافسون است.

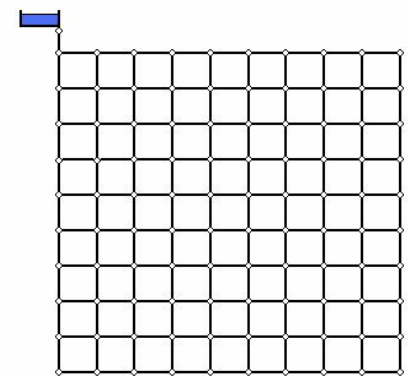
مثال عددی ۵- شبکه‌های بزرگ آبرسانی

سری شبکه‌های حلقه‌ای با N×N گره مطابق شکل(۱۴) را در نظر بگیرید. N برابر ۱۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ انتخاب می‌شود. حجم محاسبات با زیاد شدن N به شدت افزایش می‌یابد. مقدار تقاضا در هر گره به‌طور تصادفی انتخاب شده است. برای تحلیل شبکه های مذکور از روش‌های خطی سازی چند مرحله‌ای، گرادیان سراسری و نیوتن-رافسون استفاده می‌شود.

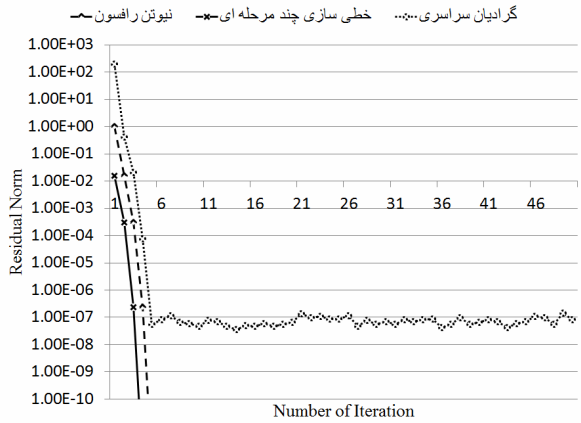


شکل ۱۲- زمان همگرایی روش های مختلف در مثال ۴

شکل ۱۳- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۴



شکل ۱۴- شبکه‌ی آب N×N



شکل ۱۵- مقایسه روند همگرایی در شبکه‌ی ۵۰×۵۰

جدول ٦- مقایسه تعداد تکرار و زمان همگرایی در سری شبکه‌های مثال ۵ در حالت بدون پمپ

خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۱۰×۱۰
۴	۵	۵	تعداد تکرار
۰/۰۳۵	۰/۲۳۳	۰/۰۴٦	زمان همگرایی (ثانیه)
خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۵۰×۵۰
۵	٦	٦	تعداد تکرار
۰/۷۸	۳/۹۵	۱/۰۵	زمان همگرایی (ثانیه)
خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۱۰۰×۱۰۰
۵	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	٦	تعداد تکرار
٦/۲۳	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	۸/۳۵	زمان همگرایی (ثانیه)
خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۲۰۰×۲۰۰
۵	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	٦	تعداد تکرار
۷۷/۴۲	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	۱۰۳/۰۳	زمان همگرایی (ثانیه)

حدس اولیه دبی در لوله ها برابر حداکثر دبی فرض می‌شود. زمان محاسبات با ارضای شرط $\|\varepsilon\| \le 1.e-6$ به‌دست می‌آید.

در جدول (۶) تعداد تکرار و زمان همگرایی (ثانیه) سه روش خطی سازی چند مرحله‌ای، گرادیان سراسری و نیوتن- رافسون برای شبکه‌های مختلف مقایسه شده است. زمان همگرایی روش خطی سازی چند مرحله‌ای در کلیه حالات کمتر از دو روش دیگر است. تعداد تکرار با افزایش اندازه شبکه تغییر چندانی نمی‌کند. در شکل (۱۵) نُرم باقیمانده بر حسب تعداد تکرار در شبکه ۵۰×۵۰ ترسیم شده است. شیب همگرایی هر سه روش یکسان است اما روش خطی سازی چند مرحله‌ای سریع‌تر از دو روش دیگر همگرا می‌شود. روش گرادیان سراسری در اطراف نُرم باقیمانده ۷- ۱e نوسان می‌کند. با افزایش اندازه شبکه نُرم باقیمانده بزرگ‌تر می‌شود تا حدی که در شبکه های بزرگ ۱۰۰×۱۰۰ و ۲۰۰×۲۰۰ به دقت مطلوب همگرا نمی‌شود.

۷- نتیجه‌گیری

الگوریتم جدیدی با عنوان روش خطی سازی چند مرحله‌ای برای تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های آبرسانی معرفی شد. در این روش توابع غیر خطی معادلات انرژی خطی‌سازی می‌شوند. سیستم معادلات خطی پیوستگی و خطی سازی شده انرژی حل می‌شوند. در مرحله بعد عملیات خطی سازی توابع در اطراف جواب حاصله انجام می‌شود. خطی سازی تا همگرایی به دقت

مناسب ادامه پیدا می‌کند. کاربرد این روش در مثال‌های متنوع ارائه شده در این مقاله بر حسب معادلات Q برتری آن را نسبت به روش‌های متداول نیوتن-رافسون، گرادیان سراسری و سکانت مشخص می‌کند. حجم محاسبات و تعداد تکرار کم‌تر موجب همگرایی سریع‌تر به جواب می‌شود. شیب همگرایی روش خطی سازی چند مرحله‌ای بسیار تند است و نوسانات در مجاورت نُرم باقیمانده بسیار کوچکی صورت می‌گیرد. در نتیجه می‌تواند به عنوان یک روش قوی در تحلیل شبکه مورد استفاده قرار بگیرد.

واژه‌نامه

1. global gradient algorithm
2. multi-stage linearization method

مراجع

1. Bhave, P. R., and Gupta, R., *Analysis of Water Distribution Networks,* Oxford, U.K. ISBN: 978-81-7319-778-9, 2006.
2. Cross, H., "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors", in No. 286, University of Illinois, Engineering Experimental Station, Urbana, Illinois, Bulletin, 1936.
3. Martin, D. W., and Peters, G., "The Application of Newton's Method to Network Analysis by Digital Computer", *Journal of Institution of Water Engineers and Scientists,* Vol. 115, 1963.
4. Liu, K. T. H. "The Numerical Analysis of Water Supply Networks by Digital Computers", *Proc. 13-th Congress of IAHR,* Vol. 1, Subject A, 25-42. 1969.
5. Wood, D. J., and Charles, C. O. A., "Hydraulic Network Analysis Using Linear theory", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE,* Vol. 98, No. HY7, pp. 1157-1170, 1972.
6. Wood, D. J., and Charles, C. O. A., "Closure to Discussions to Wood and Charles (1972): Hydraulic Network Analysis Using Linear theory", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE,* Vol. 99, No. HY11, pp. 21-29, 1973.
7. Wood, D. J., and Funk, J. E., "Hydraulic Analysis of Water Distribution Systems", in *International Course on Water Supply Systems,* Valencia, Spain. 1993.
8. Ellis, D. J., and Simpson, A. R., "Convergence of Iterative Solvers for the Simulation of a Water Distribution Pipe Network", in Research Report No. R138, Department of Civil and Environmental Engineering, The University of Adelaide. 1996.
9. Isaacs, L. T., and Mills, K. G., "Linear Theory Methods for Pipe Network Analysis", *Journal of Hydraulics Division,* ASCE, Vol. 106 (HY7), pp. 1191-1201. 1980.
10. Todini, E., "On the Convergence Properties of the Different Pipe Network Algorithms", *8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium, Cincinnati, Ohio,* USA. 2006.
11. Basha, H. A., and Kassab, B. G., "A Perturbation Solution to the Transient Flow Problem", *Journal of Hydraulic Research,* Vol. 34, pp. 633. 1996.
12. Jakobus, E., Kumar, P. and Gupta, M. "Two-Point Linearization Method for the Analysis of Pipe Networks", J. Hydraulic Eng., Vol. 134, pp. 1176 2008.
13. Spiliotis, M., and Tsakiris, G., "Water Distribution System Analysis:The Newton – Raphson Method Revisited", *Journal of Hydraulic Engineering,* ASCE, 2010.
14. Swamee, P. K., and Sharma, A. K., *Design of Water Supply Pipe Networks,* Wiley, New Jersey, 2008.
15. Kaw, A. K., and Kalu, E. E., *Numerical Methods with Applications,* 2nd edition, 2011.
16. Larock, B. E., Jeppson, R. W., and Watters, G. Z. *Hydraulics of Pipeline Systems,* Boca Raton London New York Washington, D.C, 2000.