توسیع ایده ماکسیمم آنتروپی برای اندازه‌های اطلاع تعمیم‌یافته

غلامرضا محتشمی برزادران – منیژه صانعی‌طبس

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: در این مقاله ضمن معرفی ماکسیمم آنتروپی رنی برخی از توزیع های خاص که آنتروپی رنی را ماکسیمم می کند اشاره می کنیم. سپس به بحث مینیمم اندازه اطلاع رنی اشاره نموده‌ایم و در این زمینه نیز نکاتی را مطرح کردیم همچنین شکل دیگری از اندازه اطلاع رنی به دست آورده ایم. در ادامه به برخی از کاربردهای اقتصادی ماکسیمم آنتروپی رنی پرداختیم. سپس با یادآوری اندازه اطلاع کلی سیزار فرم کلی توزیع های با مینیمم اندازه اطلاع رنی را به دست می آوریم.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی ماکسیمم، آنتروپی رنی ماکسیمم، آنتروپی تی سالیس ماکسیمم، مینیمم اندازه اطلاع رنی

۱ مقدمه

بهینه‌سازی همواره مورد توجه علوم زیادی بوده است در نظریه اطلاع نیز این مبحث جایگاه خاص خودش را دارد. یکی از روش‌های بهینه‌سازی اصل ماکسیمم آنتروپی به روش لاگرانژ می‌باشد. توزیع دارای آنتروپی ماکسیمم معمولا به فرم تابع نمایی از محدودیت‌ها بیان می‌شود یکی از این حالت‌ها زمانی است که گشتاورهای مراتب مختلف مشخص باشد که به ازای دامنه تغییرات متغیر تصادفی توزیع‌های مشهوری رابه عنوان توزیع آنتروپی ماکسیمم نتیجه می‌دهد آنتروپی رنی ماکسیمم و آنتروپی تی سالیس ماکسیمم نیز توسیع ایده آنتروپی ماکسیمم به رده بزرگتری از آنتروپی شانون است که کستا و همکاران (۲۰۰۶) ، باشکیرو (۲۰۰۶) ، جانسون وویگنات (۲۰۰۷)، براودی و همکاران(۲۰۰۷)، و ناگی و رمرا(۲۰۰۹)، تعبیرهاو مشخصه‌سازی هایی بر اساس آنتروپی رنی ماکسیمم ویا آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم در حالت های یک‌متغیره وچندمتغیره‌ارائه داده‌اند.

۲ آنتروپی رنی ماکسیمم

در بسیاری از مواقع با توجه به دانستن مقادیر گشتاورهای مراتب مختلف یک توزیع علاقه مند به یافتن توزیعی که دارای آنتروپی ماکسیمم است می‌باشیم که کاربردهای دیگری نیز دارد. آنتروپی رنی ماکسیمم نیز توسیع ایده آنتروپی ماکسیمم به رده بزرگتری از آنتروپی شانون است.

۱.۲ آنتروپی رنی ماکسیمم تحت محدودیت کلی $E(g(X)) = u$

فرض کنید $f(x)$ تابع چگالی احتمال نامعلوم که روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده‌است. بعد از حل یک سری معادلات جبری با قراردادن $Z_\beta = [\int_0^\infty f(x)^\alpha dx]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ در حالتیکه چندین محدودیت

$Eg_i(X) = u_i, \quad i = ۱, \ldots, n$ داشته‌باشیم تابع $f(x)$ به صورت زیربه دست می آید:

$$f(x) = \frac{۱}{B(\alpha, u_۱, ..., u_n)}[۱ - \frac{۱-\alpha}{\alpha}\sum_{i=۱}^{n}\beta_i(u_i - g_i(x))]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}. \qquad (۱)$$

یکی از حالاتیکه توابع $g_i(x)$ می‌توانند اختیار کنند، توابعی به صورت $g_i(x) = x^{k_i}$ می‌باشد و اگر $k_i = i$ محدودیت‌های گشتاوری را داریم که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرند. فرض کنید تابع چگالی احتمال نامعلوم روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده‌است. همچنین فرض می‌کنیم که k—امین گشتاور توزیع $f(x)$ معلوم‌است. آنچه باید بیابیم تابع چگالی احتمال $f(x) = [\int_۰^\infty f(x)^\alpha dx]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}[۱ - \frac{۱-\alpha}{\alpha}\beta(u - x^k)]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ می‌باشد که با معلوم‌بودن گشتاورk— ام آنتروپی رنی را ماکسیمم می‌کند. در حالت کلی اگر چندین محدودیت گشتاوری، داده شده باشد داریم:

$$f(x) = [\int_۰^\infty f(x)^\alpha dx]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}[۱ - \frac{۱-\alpha}{\alpha}\sum_{i=۱}^{n}\beta_i(u_i - x^{k_i}))]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}. \qquad (۲)$$

برخلاف حالتی که فقط یک محدودیت داشتیم، انتگرال‌گیری از طرف راست رابطه(۲) به سادگی انجام نمی‌گیرد (به جز برای حالاتیکه $k_۱ = ۱, k_۲ = ۲$ یعنی انتگرال با توابع فوق هندسی داده شده‌باشد) بنابراین در حالت کلی باید به استفاده از روش‌های عددی برای یافتن ضرایب لاگرانژ، روی بیاوریم. در اینجا ماکسیمم آنتروپی رنی را برای توزیع‌های n متغیره در نظر می‌گیریم.

تعریف: برای هر $\alpha > \frac{n}{n+۲}$ و $\alpha \neq ۱$ چگالی احتمال n بعدی $g_{\alpha,c}$ را برای بردار تصادفی $X = (X_۱, ..., X_n)$ که دارای ماتریس کواریانس C می‌باشد، به صورت

$$g_{\alpha,c} = A_\alpha(۱ - (\alpha - ۱)\beta x^T C^{-۱} x)_+^{\frac{۱}{\alpha-۱}}, \quad x = (x_۱, ..., x_n) \qquad (۳)$$

بوده و $\beta = \frac{۱}{۲\alpha - n(۱-\alpha)}$. همچنین $x_+ = \max(۰, x)$ و نیز

$$A_\alpha = \begin{cases} \frac{\gamma(\frac{۱}{۱-\alpha})(\beta(۱-\alpha))^{\frac{n}{۲}}}{\gamma(\frac{۱}{۱-\alpha})\pi^{\frac{n}{۲}}|C|^{\frac{۱}{۲}}} & \frac{n}{n+۲} < \alpha < ۱, \\ \frac{\gamma(\frac{\alpha}{\alpha-۱}+\frac{n}{۲})(\beta(\alpha-۱))^{\frac{n}{۲}}}{\gamma(\frac{\alpha}{\alpha-۱})\pi^{\frac{n}{۲}}|C|^{\frac{۱}{۲}}} & \alpha > ۱. \end{cases} \qquad (۴)$$

با قراردادن A_α از رابطه (۴) به ازای $\frac{n}{n+۲} < \alpha < ۱$ در رابطه (۳) تابع چگالی $g_{\alpha,c}$ بدست‌آمده را تابع چگالی n متغیره t استیودنت با درجه آزادی $m = \frac{۲}{۱-\alpha} - n$ و ماتریس کواریانس C نامیده و آن را با $T(m, n, C)$ نشان می دهند. به ازای مقادیر $\alpha > ۱$ نیز تابع چگالی احتمال n متغیره r استیودنت با درجه آزادی $p = \frac{۲\alpha}{\alpha-۱} + n$ و ماتریس کواریانس C بدست می‌آید و آن را با $R(p, n, c)$ نشان می‌دهند. توجه داشته‌باشید که $\lim_{\alpha\to۱} g_{\alpha,c}(x) = g_{۱,c}(x) = ((۲\pi)^n|C|)^{-\frac{۱}{۲}}\exp(-x^T C^{-۱}x/۲)$. به عبارت دیگرتابع چگالی $g_{\alpha,c}(x)$ به تابع چگالی گوسین میل می‌کند. **قضیه:** با فرض $x = (x_۱, ..., x_n)$، برای هر $\alpha > \frac{n}{n+۲}$ و ماتریس مثبت متقارن متناهی C، بین همه توابع‌چگالی احتمال $f(x)$ که دارای میانگین صفر و و در محدودیت $\int_{\Omega_{\alpha,c}} xx^T f(x)dx = C$ صدق می‌کنند، تابع $g_{\alpha,c}(x)$ بطور یکتا آنتروپی رنی را ماکسیمم می‌کند. در حالت یک‌متغیره تابع چگالی احتمال $g_{\alpha,c}(x)$ که آنتروپی رنی را تحت محدودیت $E(X^۲) = u$، ماکسیمم می‌کند با

قراردادن $n = ۱$ در تابع چگالی احتمال $g_{\alpha,c}(x)$ رابطه (۴) برای $\frac{۱}{۳} < \alpha < ۱$ به دست می آید.

نکاتی در مورد آنتروپی رنی ماکسیمم

برخی از حالات خاص که توزیع ماکسیمم آنتروپی رنی صورت معلوم ومشخصی به خود می‌گیرد، عبارتند از:

• در حالتیکه محدودیت نداشته باشیم به ازای تمام مقادیرα تابع چگالی احتمالی که دارای آنتروپی رنی ماکسیمم است، مانند آنتروپی شانون به صورت یکنواخت خواهدبود.

• اگر $g(x) = x$ باشد، تابع $f(x)$ تحت محدودیت $E(X) = u$، به صورت توزیع پاراتوی تعمیم‌یافته با پارامتر شکل $۱ - \frac{۱}{\alpha}$ وپارامتر مقیاس β می‌باشد.

• اگر $g(x) = x^۲$ باشد، تابع $f(x)$ به صورت زیر نتیجه می شود:

$$f(x) = ۲(\frac{۱-\alpha}{(۳\alpha-۱)u})^{\frac{۱}{۲}} \frac{\gamma(\frac{۱}{۱-\alpha})}{\sqrt{\pi}\gamma(\frac{۱}{۱-\alpha}-\frac{۱}{۲})}[۱+\frac{۱-\alpha}{(۳\alpha-۱)u}x^۲]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}. \qquad (۵)$$

• هرگاه دو محدودیت به صورت‌های $E(X) = u_۱$ و$E(X^۲) = u_۲$ داشته‌باشیم، تابع دارای ماکسیمم آنتروپی رنی به صورت توزیعی از خانواده بر XII می‌باشد.

• توزیعی که دارای آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم است به صورت $f(x) = [\frac{۱-\alpha}{\alpha}(\lambda+\sum_{i=۱}^{n}\beta_i g_i(x))]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$, می باشد.

۲.۲ خواص توزیع‌های توانی بدست‌آمده ازآنتروپی رنی ماکسیمم

با توجه به اینکه توزیع‌های بدست‌آمده از ماکسیمم آنتروپی رنی، به صورت توزیع‌های توانی می‌باشد در این‌جا به بعضی ازخواص این توزیع‌ها اشاره‌ای داریم به حالتی که محدودیت کلی $E[g(X)] = u$ که دراولین بخش مورد بررسی قرار گرفت برمی‌گردیم. برای یادآوری با در نظر گرفتن توزیع بدست‌آمده در رابطه(۴) و از طرف دیگر از اینکه تابع $f(x)$ باید در محدودیت تابع چگالی بودن صدق نماید در نتیجه باید توزیع $f(x)$ بدست آمده تساوی را به گزاره ای درست تبدیل نماید. بعبارت دیگر اگر توان عبارت داخل انتگرال به اندازه یک واحد انتقال پیدا کند، Z_β تغییر نمی کند. اگر چه در حالتیکه $\alpha \to ۱$ هر دو صورت زیر انتگرال تابع $e^{-\beta(g(x)-u)}$ را نتیجه می‌دهند. توجه داشته‌باشید دامنه α بسته به تابع $g(x)$ بطوریکه انتگرال های دو طرف تساوی بالا تعریف شوند، تعیین می‌شود. اکنون رابطه $Z_\beta = (\int_۰^\infty f^\alpha(x)dx)^{\frac{۱}{۱-\alpha}}$ را در نظر بگیرید. اگر از طرفین آن لگاریتم بگیریم وبا تعریف آنتروپی رنی مقایسه کنیم نتیجه می‌گیریم که همان آنتروپی رنی را نتیجه می‌دهد.

$$\log Z_\beta = \frac{۱}{۱-\alpha}\log\int_۰^\infty f^\alpha(x)dx = H_\alpha(f(x)). \qquad (۶)$$

به عبارت دیگر لگاریتم عامل نرمال‌کننده Z_β خود، آنتروپی رنی را به دست می‌دهد. حال اگر تابع $f(x)$ رابطه(۱) را در تعریف آنتروپی رنی جایگزین کنیم با استفاده از رابطه(۷) به رابطه $H_\alpha(f(x)) = \log\int_۰^\infty(۱-\frac{۱-\alpha}{\alpha}\beta(u-g(x)))^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}dx.$ که صورت دیگری از آنتروپی رنی است می رسیم.

۳ مینیمم اندازه اطلاع رنی

اصل مینیمم فاصله یا اصل مینیمم اطلاع نیز یک اصل بهینه سازی است. یک رابطه نزدیک و تنگاتنگ بین این اصل واصل ماکسیمم آنتروپی ثابت می شود. در حالتیکه چندین محدودیت

گشتاوری به صورت $E(X^{k_i}) = u_i,\ i = ۱,..,n$ داشته‌باشیم تابع مینیمم اطلاع رنی به صورت $f(x) = \frac{۱}{Z_\beta}[۱ + \frac{\alpha-۱}{\alpha}\sum_{i=۱}^{n}\beta_i(x^{k_i} - u_i)]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}g(x)$. میباشد.

رابطه بین مینیمم اندازه اطلاع رنی و ماکسیمم آنتروپی رنی

فرض می‌کنیم تابع چگالی احتمال پیشین $g(x)$ داده‌شده‌است متناظر با اصل مینیمم اطلاع رنی ما تابع چگالی احتمال $f(x)$ را می‌یابیم که در محدودیت ها صدق کند وبه تابع چگالی احتمال g نزدیکترین باشد بدین مفهوم که $D_{H\alpha}(f||g)$ رامتناظر با محدودیت های تابع چگالی بودن و$\int f(x)u(x)dx = a_r\ \ ,r = ۱,۲,...m$ مینیمم می‌کنیم و اگر تابع چگالی احتمال g داده نشده باشد به جای آن توزیعی که دارای ماکسیمم آنتروپی رنی باشد را در نظر می‌گیریم واگر هیچ محدودیتی نداشته‌باشیم، توزیع یکنواخت را به عنوان یک توزیع پیشین در نظر می‌گیریم و$D_\alpha(f||u)$ را مینیمم می‌کنیم. که مینیمم‌کردن آن معادل با ماکسیمم‌کردن آنتروپی رنی می باشد.بنابراین از این نگاه ، ماکسیمم آنتروپی رنی به عنوان یک حالت خاصی از مینیمم اطلاع رنی در نظرگرفته‌می شود البته باید به تفاوت این دو مفهوم توجه داشته باشیم درماکسیمم آنتروپی رنی ما عدم قطعیت در مورد آنچه نمیدانیم را با استفاده از همه اطلاعاتی که به ما داده شده است ماکسیمم می کنیم یعنی کمیت اساسی عدم قطعیت می باشد. حال آنکه مینیمم اطلاع رنی مفهوم عدم قطعیت را در بر نمی گیرد بلکه نکته مهم فاصله احتمالی یک توزیع از توزیع دیگر است .

صورت دیگری از اندازه اطلاع رنی

اگر از طرفین رابطه $Z_\beta = (\int_۰^\infty \frac{f(x)^\alpha}{g(x)^{\alpha-۱}}dx)^{\frac{۱}{۱-\alpha}}$ لگاریتم بگیریم و با تعریف اندازه اطلاع رنی مقایسه کنیم خواهیم داشت:,$\ln(Z_\beta) = -D_\alpha(f||g)$ که با محاسبات و اعمال تعاریف منجر به عبارت:

$$D_\alpha(f||g) = \log[\int_۰^\infty (۱ + \frac{\alpha-۱}{\alpha}\beta(W(x)-u))^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}g(x)^\alpha dx], \qquad (۷)$$

می شود این رابطه صورت دیگری از اطلاع رنی را وقتی که محدودیت $E[W(X)] = u$ را داشته باشیم، نمایش می‌دهد.

کاربری اقتصادی آنتروپی رنی ماکسیمم

آنتروپی رنی تاکنون مورد علاقه بسیاری از دانشمندان علوم مختلف بوده‌است در این بخش به مبحث کاربردهایی از آنتروپی رنی ماکسیمم در اقتصاد می‌پردازیم فرض می کنیم تابع $f(x)$ نشان دهنده تابع چگالی نامعلوم قیمت نهایی دارایی تحت تملک باشد که می‌خواهیم آن را برآورد کنیم با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی رنی تحت محدودیت‌های مشخص، تابع $f(x)$ را می‌یابیم. اگر مقدار متوسط قیمت نهایی دارایی تحت تملک برابر با ضریبی از قیمت ابتدایی، همچنین $s_۰$ قیمت ابتدایی دارایی تحت تملک باشد و t زمان پرداخت یا زمان انقضاء قرار داد باشد. r را در اینجا تقریباً ثابت فرض می‌کنیم. علاوه بر این یک سری از قیمت‌های متناظر با یک سری از توابع پرداخت داریم. که برای شروع کار ابتدا ساده ترین حالت را همانگونه که توسط بوکن و کلی (۱۹۹۶) هنگام استفاده از آنتروپی شانون انجام شده‌است در نظر می‌گیریم که فقط یک تابع پرداخت به شکل $c_۰$ داریم. در نتیجه دومین وسومین محدودیت عبارتند از:

$$\int_۰^\infty xf(x)dx = s_۰e^{rt}, \int_۰^\infty (x-k_۰)^+f(x)dx = c_۰e^{rt}. \qquad (۸)$$

که در آن $k_۰$ همان افت شکست قیمت قرارداد می‌باشد. متناظر با این محدودیت هابرای ماکسیمم‌کردن آنتروپی رنی اقدام می‌کنیم. فرض کنید λ و $\beta_۰$ و $\beta_۱$ به ترتیب نشاندهنده ضرایب لاگرانژ مربوط به محدودیت

های تابع چگالی بودن و (۱۰) باشند. در بخش دو ملاحظه نمودیم که جواب ماکسیمم آنتروپی رنی تحت محدودیت‌های یادشده به صورت زیر نوشته می شود:

$$\bar{c_\circ} = c_\circ e^{rt} \ , \ \bar{s_\circ} = s_\circ e^{rt} \ , \ \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{Z^{\alpha-1}} \ , \ \beta_i = \frac{\beta_i}{Z^{\alpha-1}}, i = \circ, 1.$$
$$f(x) = [\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}_\circ x + \tilde{\beta}_1 (x - k_\circ)^+]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \qquad (9)$$

با جایگذاری این ضرایب در معادله (۱۰) و انجام محاسبات نسبتا طولانی تابع چگالی بدون مخاطره برای قیمت دارایی برآورد کرده‌ایم بدون اینکه هیچ اطلاعی از توزیع دارایی داشته‌باشیم. بعد از یافتن توزیع $f(x)$ به کمک آن می‌توان فرمول قیمت را برای سایر مشتقات متناظر با افت شکست k نیز برآورد نمود. که بر حسب اینکه $k \geq k_\circ$ یا $k \leq k_\circ$ در ادامه به آن می‌پردازیم. برای حالت $k \leq k_\circ$: برآورد قیمت تابع پرداخت متناظر با افت شکست k عبارت است از: $\bar{c}(k) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(2\alpha-1)}(\frac{1}{\tilde{\beta}_\circ+\tilde{\beta}_1})^2[\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}_\circ k + \tilde{\beta}_1(k - k_\circ)]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}$.
و برای $k \geq k_\circ$:

$$\bar{c}(k) = \bar{s_\circ} - (\frac{\alpha-1}{\alpha})\frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_\circ(\tilde{\beta}_\circ + \tilde{\beta}_1)}(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}_\circ k_\circ)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} k$$
$$+ \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(2\alpha-1)}\frac{1}{\tilde{\beta}_\circ^{\,2}}[(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}_\circ k)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} - \tilde{\lambda}^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}]. \qquad (10)$$

تابع $\bar{c}(k)$ تقریباً همه جا پیوسته و در صفر مشتق پذیر می‌باشد. همچنین $\bar{c}(k_\circ) = \bar{c}_\circ$. مسأله ساده مطرح شده را برای حالتیکه چندین محدودیت ورودی داشته باشیم میتوان تعمیم داد. به کمک نرم افزار مطلب (با ایده گرفتن از جعفری(۱۹۹۱) برای آنتروپی ماکسیمم) براساس برنامه ای برای یافتن توابع چگالی با ماکسیمم آنتروپی رنی تحت محدودیت‌های مشخص، نوشته ایم.

اندازه اطلاع سیزار فرض کنید $\Phi : R^+ \to R^+$ یک تابع محدب باشد، سیزار در سال ۱۹۸۷ اندازه واگرایی Φ تعمیم یافته، را به صورت $D_\phi(P||Q) = \sum_{i=1}^n q_i \Phi(\frac{p_i}{q_i})$ در فضای توزیع های احتمال P^n معرفی نمود. برحسب اینکه تابع ϕبه چه صورت تعریف شده باشد این اندازه هر یک از اندازه های واگرایی را در حالت خاص نتیجه می دهد. این رابطه برای حالت پیوسته نیزبطور مشابه تعریف می شود. می خواهیم اندازه واگرایی تعمیم یافته را تحت معلوم بودن برخی از محدودیتها، مینیمم کنیم.

$$\begin{cases} \min_f(D_\phi(f(x)||g(x))) = \min_f \int_\circ^\infty g(x)\phi(\frac{f(x)}{g(x)})dx \\ \qquad\qquad s.t \\ \int_\circ^\infty h_j(x)f(x)dx = u_j, j = 1, 2, ..., k. \end{cases}$$

با حل معادله لاگرانژ، رابطه $\phi'(\frac{f(x)}{g(x)}) - \lambda - \sum_{j=1}^k \beta_j h_j(x) = \circ$, به دست می آید و بر حسب اینکه تابع ϕ را چگونه تعریف کرده باشیم این رابطه توابع مختلف $f(x)$ را به دست می دهد. برخی از این حالات را درجدول ۱ خلاصه کرده‌ایم.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله روش ماکسیمم آنتروپی را برای برخی از اندازه های آنتروپی تعمیم یافته از قبیل رنی و تی سالیس مطرح نموده و نشان دادیم که توزیع های دارای ماکسیمم آنتروپی رنی به شکل توزیع های توانی می باشند.به برخی از ویژگی های توزیع های توانی پرداختیم و به نمایش حدیدی از آنتروپی رنی رسیدیم. . سپس به بحث

جدول ۱: برخی از اندازه های واگرایی و شکل توابعی که این اندازه ها را مینیمم میکنند.

نام اندازه واگرایی	مقادیر متفاوت تابع $\phi(t)$	شکل تابع چگالی دارای مینیمم اندازه واگرایی
کولبک – لایبلر	$\phi(t) = tlogt$	$f(x) = g(x)e^{\lambda+\sum_{j=1}^{k}\beta_j h_j(x)}$
رنی	$\phi(t) = t^{\alpha}$	$f(x) = g(x)[\frac{1}{\alpha}(\lambda + \sum_{j=1}^{k}\beta_j h_j(x))]^{\frac{1}{\alpha-1}}$
هلینجر	$\phi(t) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{t})^2$	$f(x) = \frac{g(x)}{(1-2\lambda-2\sum_{j=1}^{k}\beta_j h_j(x))^2}$
خی دو	$\phi(t) = (t-1)^2$	$f(x) = g(x)[\frac{\lambda}{2} + \frac{\sum_{j=1}^{k}\beta_j h_j(x)}{2} + 1]$

مینیمم اندازه اطلاع رنی اشاره نموده همچنین شکل دیگری از اندازه اطلاع رنی را به دست آورده ایم.سپس برخی از کاربردهای اقتصادی ماکسیمم آنتروپی رنی را بیان نمودیم. همچنین اینکه چه تابع چگالی (احتمال) با توجه به محدودیتهای ذکر شده اندازه واگرایی ϕ را می نیمم می کند در حالت کلی بیان و به حالات خاص آن نیز اشاره‌کردیم.

مراجع

Bercher, J. F. (2008a). *On some entropy functionals from Renyi information divergence.* Information Sciences, 178, 2489-2506.

Brody, D. C., Buckley, I. R. C. and Constantinou, I. (2007). *Option price calibration from Renyi entropy.* Physics Letters A, 366, 298-307.

Costa, J. A., Hero, A. O. and Vignat, C. (2006). *A geometric characterization of maximum Renyi entropy distributions.* IEEE International Symposium on Information Theory, ISIT, Lausanne, 1822-1826.

Csiszar, I. (1967). *On Topological properties of f-divergences.* studia Math. Hungarica, 2, 329-339.

Djafari, M. (1991). *A matlab program to calculate the maximum entropy distributions.* Proceedings of the 11 th Int. Maxent. workshop, seattle, usa.

Jaynes, E. T. (1957). *Information theory and statistical mechanics.* Physical Reviews, 106, 620-630.

Johnson, O. and Vignat, Ch. (2007). *Some results concerning maximom Renyi entropy distributions.* Annales de Institut Henri Poincare (B)Probability and statistics, 43, 339-351.

Kagan, A. M., Linnik, Y. V. and Rao, C, R. (1973). *Characterization problems in Mathematical Statistics.* Wiley, New York.

Renyi, A. (1961). *On measures of entropy and information.* Proc. Berekeley Symposium, Statist. Probability, 1, 547-561.