مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۴

جلد ۹، شماره ۱، ص ۶۱-۷۶

مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر بر اساس توابع نرخ خرابی و احتمال تعمیر مینیمال

فاطمه صفائی، جعفر احمدی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱/۲۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۱۰/۱

چکیده : سیستم قابل تعمیری را در نظر بگیرید که دو نوع خرابی با نرخ‌های متفاوت برای آن رخ می‌دهد. انتخاب تعمیر مینیمال یا تعویض کامل به نوع خرابی وابسته است. طول دوره تعویض با توجه به تابع هزینه و مفهوم هزینه کاهش یافته، بهینه می‌شود. در این مقاله، طول دوره جایگذاری بهینه با در نظر گرفتن توابع نرخ مختلف و همچنین با احتمال تعمیر مینیمال متفاوت، با هم مقایسه می‌شوند. بر اساس نتایج حاصل، در مورد اینکه در کدام سیستم باید جایگذاری پیشگیرانه زودتر انجام شود، می‌توان اظهار نظر نمود. برای تشریح بیشتر نتایج مقاله، مثال‌های عددی ارائه و مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است.

واژه‌های کلیدی : جایگذاری بهینه، سیستم‌های قابل تعمیر، تعمیرمینیمال، فرآیند پواسن ناهمگن.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: فاطمه صفائی safaei_fa123@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰B۲۵، ۶۲N۰۵

۱ مقدمه

تقریباً همه سیستم‌ها با گذشت زمان و استفاده دچار خرابی‌های تصادفی در طول عملکرد خود می‌شوند. مسئله‌ای که مطرح می‌شود این است که آیا خرابی‌های رخ داده، قابل رفع شدن هستند؟ چگونه از وقوع آنها جلوگیری شود؟ در مباحث قابلیت اعتماد معمولاً سیستم‌ها به دو دسته قابل تعمیر و غیر قابل تعمیر تقسیم می‌شوند. سیستم قابل تعمیر، سیستمی است که با رخ دادن خرابی به جای تعویض سیستم، می‌توان به وسیله تعمیر، سیستم را به شرایط مؤثر کاری برگرداند؛ در صورتی که سیستم غیر قابل تعمیر، سیستمی است که در صورت رخ دادن خرابی، باید تعویض شود. بسیاری از سیستم‌هایی که روزانه مورد استفاده قرار می‌گیرند سیستم‌های قابل تعمیر هستند؛ البته در بخش‌های کوچکی از یک سیستم قابل تعمیر، می‌تواند خرابی‌هایی رخ دهد که فقط از طریق تعویض قادر به رفع آن باشیم. در واقع ما با سیستمی روبرو خواهیم بود که خرابی‌های آن به گونه‌ای است که قابل تعمیر و یا غیر قابل تعمیر هستند. در بسیاری از سیستم‌ها در صورت خراب شدن، از نظر اقتصادی شرایط ایجاب می‌کند که تعمیر صورت پذیرد. با توجه به هزینه از کار افتادگی سیستم، استفاده از الگوهای مناسب به منظور بهینه‌سازی هزینه‌ها منطقی است؛ بنابراین پیشنهاد و ارائه راهکار یک سیاست جایگذاری بهینه برای یک سیستم، تحقیقی ارزشمند در مباحث قابلیت اعتماد محسوب می‌شود که توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب نموده است.

در سال‌های اخیر در مبحث تعمیر و نگهداری سیستم‌ها الگوهای مختلفی ارائه شده است که کاربرد فراوانی در صنعت برای بهره‌وری بهتر سیستم‌ها و تجهیزات دارند (اسدی، ۱۳۹۲). آشر و فینگلد (۱۹۸۴) از جمله اولین کتاب‌هایی است که در ارتباط با سیستم‌های قابل تعمیر نوشته شده است. از مباحث مورد مطالعه در این زمینه می‌توان به محاسبه تعداد خرابی‌های مورد انتظار در طول دوره گارانتی سیستم، بررسی قابلیت اعتماد و نرخ خرابی سیستم و تعیین زمان بازرسی یا جایگذاری سیستم و کمینه‌ساختن هزینه تعمیر و نگهداری سیستم اشاره نمود. بسیاری از

الگوها بر اساس ایده تعمیر مینیمال[۱] بنا شده‌اند. یادآوری می‌شود هدف از تعمیر مینیمال یک سیستم، برگرداندن سیستم به دقیقاً همان شرایط اولیه نیست، بلکه هدف، راه‌اندازی مجدد سیستم و برگرداندن بهره‌وری به دقیقاً قبل از وقوع خرابی است. این روش توسط بارلو و هانتر (۱۹۶۰) ارائه شده است. پس از آن مقالات زیادی در ارتباط با کاربرد و گسترش این مفهوم چاپ شد. ناکاگاوا و کوادا (۱۹۸۳) تعمیر مینیمال را بر اساس تابع نرخ خطر تعریف کردند، که این تعریف نقش مهمی در نظریه قابلیت اعتماد ایفا می‌کند. چانگ و همکاران(۲۰۱۰) یک مدل تعمیر مینیمال را به همراه تابع تجمعی هزینه در نظر گرفتند، که در آن بر اساس اطلاعات موجود درباره کل هزینه‌های تعمیر سیستم می‌توان در مورد تعمیر یا جایگذاری سیستم تصمیم گرفت.

در این مقاله سیستم‌هایی درنظر گرفته شده‌اند که با توجه به خرابی، در آن تعمیر یا تعویض اتفاق می‌افتد و هدف، پیدا کردن زمان بهینه T است که تعویض پیشگیرانه در آن صورت پذیرد به گونه‌ای که تابع هزینه مربوط به تعمیرـتعویض بهینه شود. بارلو و پورشان (۱۹۶۵) روش جایگذاری (تعویض) در زمان T یا زمان خرابی، هر کدام که زودتر اتفاق بیفتد، را ارائه دادند. در این مقاله مدل پیشنهادی آون و کاسترو (۲۰۰۸) در نظر گرفته شده و دوره‌های جایگذاری بهینه در سیستم‌ها با شرایط مختلف مقایسه می‌شوند. برای این منظور ابتدا مدل پیشنهادی آون و کاسترو در بخش ۲ معرفی شده است. در بخش ۳ مقایسه دوره‌های جایگذاری در سیستم‌های قابل تعمیر انجام گرفته است، که مقایسه بر اساس تابع نرخ در خرابی‌های نوع I و II و همچنین احتمال تعمیرمینیمال (p) صورت پذیرفته است. مثال عددی از سیستم‌های معرفی شده، در بخش ۴ ارائه می‌شود. در بخش ۵ مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است.

---

[۱] Minimal repair

۲ مدل آون و کاسترو

در مدل پیشنهادی آون و کاسترو (۲۰۰۸) یک سیستم با دو نوع خرابی در نظر گرفته می‌شود، به گونه‌ای که تعمیر یا تعویض بر اساس روش زیر انجام می‌شود.

خرابی نوع I بر اساس یک فرآیند پواسن ناهمگن $\{N(t); t \geq ۰\}$ با تابع نرخ $r(t)$ و تابع نرخ خرابی تجمعی $\Gamma_۱(t) = \int_۰^t r(u)du$ اتفاق می‌افتد. این خرابی همیشه با تعمیر مینیمال رفع می‌شود. خرابی نوع II بر اساس یک فرآیند پواسن ناهمگن $\{M(t); t \geq ۰\}$ با تابع نرخ $s(t)$ و تابع نرخ خرابی تجمعی $\Gamma_۲(t) = \int_۰^t s(u)du$ اتفاق می‌افتد. در این خرابی با احتمال p تعمیر مینیمال و با احتمال $۱ - p$ تعویض انجام می‌شود. سیستم در زمان T یا در زمان خرابی نوع II در حالت تعویضی، هر کدام که زودتر اتفاق بیفتد، تعویض می‌شود. هزینه تعمیر مینیمال برای خرابی نوع I و II به ترتیب $c_۱$ و $c_{۲,m}$ و برای تعویض در خرابی نوع II، مقدار $c_{۲,r}$ است. هزینه تعویض پیشگیرانه (برنامه‌ریزی شده) سیستم در زمان T، برابر c_r و هزینه تعویض پیشگیرانه کمتر از هزینه تعویض بدون برنامه‌ریزی است یعنی $c_r < c_{۲,r}$. همه هزینه‌ها مقادیر مثبت هستند. مسئله، تعیین زمان تعویض T است به طوری که متوسط هزینه‌های کاهش یافته‌ی تعمیر-تعویض را بهینه کند.

هزینه کاهش یافته به این معنی است که اگر α یک فاکتور کاهش دهنده مثبت باشد، آنگاه هزینه در زمان t مقدار $ce^{-\alpha t}$ خواهد بود که در آن c هزینه در زمان صفر است. T_i را طول دوره iام جایگذاری (تعویض) قرار داده و $C_i(\alpha)$ کل هزینه کاهش یافته مربوط به دوره iام جایگذاری تعریف می‌شود، آنگاه میانگین کل هزینه کاهش یافته به‌صورت

$$C(T) = \frac{E(C_۱(\alpha))}{۱ - E(e^{-\alpha T_۱})} \qquad (۱)$$

قابل بیان است (آون، ۱۹۸۳؛ آون و ینسن، ۱۹۹۹). بنابراین هدف، بهینه‌سازی تابع $C(T)$ است.

یک دوره تعویض، فاصله بین تعویض‌های سیستم در نظر گرفته می‌شود که این تعویض‌ها می‌تواند بر اثر خرابی نوع II، در حالت تعویضی یا در اثر تعویض برنامه‌ریزی شده انجام پذیرد. X_T زمان تعویض سیستم در نظر گرفته

می‌شود و X_M زمان خرابی نوع II در حالت تعویضی تعریف می‌شود. بنابراین $X_T = \min\{X_M, T\}$.

متوسط هزینه مربوط به هر کدام از خرابی‌ها در یک دوره تعویض محاسبه و سپس در تابع معرفی شده در (۱) قرار داده می‌شود. بنابراین تابع هزینه $C(T)$ را می‌توان به‌صورت کلی

$$C(T) = \frac{c_r + \int_0^T a(t)R(t)dt}{\alpha \int_0^T R(t)dt}$$

نوشت، که در آن

$$R(t) = \exp\{-(\alpha t + \Gamma_2(t)(1-p))\} \qquad (۲)$$

$$a(t) = c_1 r(t) + s(t)(c_{2,m}p + (c_{2,r} - c_r)(1-p)) - c_r\alpha \qquad (۳)$$

با توجه به اینکه $R(t)$ و $a(t)$ توابع پیوسته هستند، تابع هزینه $C(T)$ نسبت به T تابع مشتق‌پذیر است. با مشتق‌گیری و بعد از ساده‌سازی، مشخص می‌شود که علامت آن به علامت تابع

$$h(T) = a(T)\int_0^T R(t)dt - \int_0^T a(t)R(t)dt - c_r \qquad (۴)$$

بستگی دارد. بنابراین درصورت وجود زمان بهینه، آن نقطه باید ریشه معادله $h(T) = 0$ باشد. اگر $a(t)$ پیوسته باشد، $h(T)$ نیز پیوسته است و همچنین تابع $h(t)$ غیر نزولی (اکیداً صعودی) است اگر تابع $a(t)$ این شرط را داشته باشد. از این پس $h(t)$، تابع بهینه سیستم نامیده می‌شود.

در ادامه این مقاله فرض شده است، شرایط مدل آون و کاسترو (۲۰۰۸) برقرار است و به مقایسه دوره بهینه آنها بر اساس تابع نرخ در خرابی‌های نوع I و II و همچنین احتمال تعمیر مینیمال پرداخته می‌شود.

۳ مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر

نقطه بهینه مدل معرفی شده در بخش ۲، در معادله $h(T) = 0$ صدق می‌کند. از (۳) و (۴)، مشاهده می‌شود که اگر $r(t)$ و $s(t)$ توابع صعودی باشند، آن‌گاه $a(t)$

صعودی و در نهایت $h(t)$ نیز صعودی خواهد شد. در این‌جا فرض می‌شود $r(t)$ و $s(t)$ توابعی صعودی هستند. در ادامه دو سیستم با شرایط مختلف در نظر گرفته و دوره تعویض آن‌ها با هم مقایسه می‌شود. ابتدا لم زیر را بیان و به دلیل سادگی برهان، از ارائه آن صرف‌نظر می‌گردد.

لم ۱ : دو سیستم مختلف الف و ب با توابع بهینه اکیداً صعودی به ترتیب $h_۱(u)$ و $h_۲(u)$ و نقاط بهینه به ترتیب $T_۱^*$ و $T_۲^*$ را در نظر بگیرید. در این صورت $T_۲^* < T_۱^*$ اگر و فقط اگر $h_۱(T_۲^*) < ۰$.

به طور کلی فرض می‌کنیم دو سیستم الف و ب داریم که سیستم الف دارای توابع نرخ خرابی $r_۱(t)$ و $s_۱(t)$، به ترتیب برای خرابی‌های نوع I و II و احتمال $p_۱$ برای تعمیر در خرابی نوع II است، و سیستم ب دارای توابع نرخ خرابی $r_۲(t)$ و $s_۲(t)$، به ترتیب برای خرابی‌های نوع I و II و احتمال $p_۲$ برای تعمیر در خرابی نوع II باشد.
در قضایای زیر دوره بهینه سیستم‌ها مقایسه می‌شوند.

قضیه ۱ : فرض کنید دو سیستم الف و ب داریم که در شرایط مدل آون و کاسترو (۲۰۰۸) صدق می‌کنند و روابط

$$p_۱ = p_۲ = p, \quad r_۱(t) = \omega(t)r(t), \quad r_۲(t) = r(t), \quad s_۱(t) = s_۲(t) = s(t)$$

برای آن‌ها برقرار است، به‌طوری که $\omega(t)$ تابعی نزولی بوده و به‌ازای هر t، $۰ < \omega(t) < ۱$، به گونه‌ای که $\omega(t)r(t)$ تابعی صعودی است. هزینه‌های مربوط به تعمیر و تعویض در دو سیستم، با هم برابر است. در این‌صورت نقطه بهینه سیستم ب کوچکتر از سیستم الف است، یعنی $T_۲^* < T_۱^*$.

برهان : فرض کنید توابع $R_۱(t)$، $a_۱(t)$ و $h_۱(t)$ همانند توابع معرفی شده به ترتیب در (۲)، (۳) و (۴) برای سیستم الف و $T_۱^*$ نقطه بهینه در این سیستم باشد. $a_۲(t)$، $R_۲(t)$ و $h_۲(t)$ و نقطه بهینه $T_۲^*$ توابع و نقطه متناظر در سیستم ب باشند. با توجه به تعریف تابع $R(t)$ در (۲)، مشاهده می‌شود که تنها به $s(t)$ و p وابسته است، بنابراین

$R_1(t) = R_2(t)$. در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned} h_1(T_2^*) &= \int_0^{T_2^*} [a_1(T_2^*) - a_1(t)]R_1(t)dt - c_r \\ &= \int_0^{T_2^*} [a_1(T_2^*) - a_1(t) \pm a_2(T_2^*) \pm a_2(t)]R_1(t)dt - c_r \\ &= \int_0^{T_2^*} [a_1(T_2^*) - a_2(T_2^*) + a_2(t) - a_1(t)]R_1(t)dt \\ &\quad + \int_0^{T_2^*} [a_2(T_2^*) - a_2(t)]R_1(t)dt - c_r. \end{aligned} \tag{5}$$

جمله دوم در (۵) برابر $h_2(T_2^*)$ است و با توجه به تعریف T_2^*، عبارت مذکور مساوی صفر است، در نتیجه

$$h_1(T_2^*) = \int_0^{T_2^*} [a_1(T_2^*) - a_2(T_2^*) + a_2(t) - a_1(t)]R_1(t)dt \tag{6}$$

از طرفی بنا به تعریف $a(t)$ (معرفی شده در (۳)) داریم

$$\begin{aligned} a_2(t) - a_1(t) &= c_1 r(t) + s(t)(c_{2,m}p + (c_{2,r} - c_r)(1-p)) - c_r\alpha \\ &\quad -(c_1\omega(t)r(t) + s(t)(c_{2,m}p + (c_{2,r} - c_r)(1-p)) - c_r\alpha) \\ &= c_1(r(t) - \omega(t)r(t)) = c_1(r(t)(1-\omega(t)) \end{aligned}$$

بنابراین (۶) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\begin{aligned} h_1(T_2^*) &= \int_0^{T_2^*} [-c_1 r(T_2^*)(1-\omega(T_2^*)) + c_1 r(t)(1-\omega(t))]R_1(t)dt \\ &= c_1 \int_0^{T_2^*} [r(t)(1-\omega(t)) - r(T_2^*)(1-\omega(T_2^*))]R_1(t)dt \end{aligned}$$

اگر قرار داده شود $g(t) = r(t)(1-\omega(t))$ آنگاه

$$h_1(T_2^*) = c_1 \int_0^{T_2^*} [g(t) - g(T_2^*)]R_1(t)dt \tag{7}$$

طبق فرض مسئله $r(t)$ تابعی صعودی و $\omega(t)$ تابعی نزولی است و $0 < \omega(t) < 1$، بنابراین $g(t)$ تابعی صعودی و نامنفی خواهد بود. با توجه به اینکه در تابع $h_1(T_2^*)$ مقدار $t < T_2^*$ است پس $g(t) < g(T_2^*)$ بوده و لذا $g(t) - g(T_2^*)$، منفی است؛ در

نتیجه تابع $h_{۱}(T^*_{۲})$ به دست آمده در (۷) منفی می‌باشد. حال بنا به لم ۱ می‌توان نتیجه گرفت که $T^*_{۲} < T^*_{۱}$. □

در صورت برقراری شرایط قضیه ۱ طول دوره‌های تعویض در سیستم ب کمتر از سیستم الف است. لذا پیشنهاد می‌شود که تعویض‌های پیشگیرانه در سیستم ب نسبت به سیستم الف زودتر انجام شود.

لازم به ذکر است که قضیه۱ تحت فرض کلی $r_{۱}(t) \leq r_{۲}(t)$ نیز برقرار است.

در قضیه بعد به مقایسه دوره‌های تعویض در دو سیستم بر اساس تابع نرخ در خرابی نوع II می‌پردازیم.

قضیه ۲ : فرض کنید دو سیستم الف و ب در شرایط مدل آون و کاسترو صدق می‌کنند به نحوی که

$$p_{۱} = p_{۲} = p, \quad r_{۱}(t) = r_{۲}(t) = r(t), \quad s_{۱}(t), \quad s_{۲}(t)$$

به‌طوری‌که $s_{۱}(t) > s_{۲}(t)$ و $s'_{۱}(t) < s'_{۲}(t)$. همه توابع نرخ در خرابی‌ها صعودی و هزینه‌های مربوط به تعمیر و تعویض دو سیستم با هم برابر باشند. در این‌صورت نقطه بهینه در سیستم ب کوچکتر از نقطه بهینه در سیستم الف است، یعنی $T^*_{۲} < T^*_{۱}$.

برهان : فرض کنید توابع $a_{۱}(t)$، $R_{۱}(t)$ و $h_{۱}(t)$ معرفی شده در بخش ۲ برای سیستم الف و $a_{۲}(t)$، $R_{۲}(t)$ و $h_{۲}(t)$ توابع متناظر برای سیستم ب باشند و نقطه بهینه در سیستم الف با $T^*_{۱}$ و نقطه بهینه در سیستم ب با $T^*_{۲}$ نشان داده شوند. چون هزینه جایگذاری برنامه‌ریزی شده کمتر از هزینه جایگذاری بدون برنامه‌ریزی است یعنی $c_r < c_{۲,r}$، نامساوی‌های $a_{۱}(t) > a_{۲}(t)$ و $R_{۱}(t) < R_{۲}(t)$ برقرار است. برای مقایسه تابع بهینه دو سیستم عبارت زیر قابل بیان است

$$\begin{aligned}
h_{۱}(T^*_{۲}) &= \int_{۰}^{T^*_{۲}} [a_{۱}(T^*_{۲}) - a_{۱}(t)] R_{۱}(t) dt - c_r \\
&< \int_{۰}^{T^*_{۲}} [a_{۱}(T^*_{۲}) - a_{۱}(t)] R_{۲}(t) dt - c_r \\
&= \int_{۰}^{T^*_{۲}} [a_{۱}(T^*_{۲}) - a_{۱}(t) \pm a_{۲}(T^*_{۲}) \pm a_{۲}(t)] R_{۲}(t) dt - c_r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\circ}^{T_{۲}^{*}} [a_{۱}(T_{۲}^{*}) - a_{۲}(T_{۲}^{*}) + a_{۲}(t) - a_{۱}(t)] R_{۲}(t) dt \\
&+ \int_{\circ}^{T_{۲}^{*}} [a_{۲}(T_{۲}^{*}) - a_{۲}(t)] R_{۲}(t) dt - c_r \qquad (۸)
\end{aligned}
$$

طبق تعریف $T_{۲}^{*}$ جمله‌ی دوم در (۸) مساوی صفر است. بنابراین

$$h_{۱}(T_{۲}^{*}) = \int_{\circ}^{T_{۲}^{*}} [a_{۱}(T_{۲}^{*}) - a_{۲}(T_{۲}^{*}) + a_{۲}(t) - a_{۱}(t)] R_{۲}(t) dt$$

از طرفی داریم

$$
\begin{aligned}
a_{۲}(t) - a_{۱}(t) &= c_{۱} r(t) + s_{۲}(t)(c_{۲,m} p + (c_{۲,r} - c_r)(۱ - p)) - c_r \alpha \\
&\quad -(c_{۱} r(t) + s_{۱}(t)(c_{۲,m} p + (c_{۲,r} - c_r)(۱ - p)) - c_r \alpha) \\
&= (c_{۲,m} p + (c_{۲,r} - c_r)(۱ - p))(s_{۲}(t) - s_{۱}(t))
\end{aligned}
$$

اگر قرار داده شود $g(t) = s_{۲}(t) - s_{۱}(t)$ آنگاه

$$h_{۱}(T_{۲}^{*}) = (c_{۲,m} p + (c_{۲,r} - c_r)(۱ - p)) \int_{\circ}^{T_{۲}^{*}} [g(t) - g(T_{۲}^{*})] R_{۲}(t) dt$$

طبق فرض $s'_{۱}(t) < s'_{۲}(t)$ و با توجه به اینکه $s_{۱}(t)$ و $s_{۲}(t)$ توابعی صعودی هستند، می‌توان نتیجه گرفت که $g(t)$ نیز تابعی صعودی است. از طرفی در تابع $h_{۱}(T_{۲}^{*})$ مقدار $t < T_{۲}^{*}$ است پس $g(t) < g(T_{۲}^{*})$ و لذا $g(t) - g(T_{۲}^{*})$ منفی است؛ به‌علاوه عبارت $c_{۲,m} p + (c_{۲,r} - c_r)(۱ - p)$ مقداری مثبت است. بنابراین تابع $h_{۱}(T_{۲}^{*})$ منفی است. بنابر لم ۱ نتیجه می‌شود که $T_{۲}^{*} < T_{۱}^{*}$. $\square$

در قضیه ۲ نتیجه گرفته شد که اگر شرایط قضیه برقرار باشد، آنگاه $T_{۲}^{*} < T_{۱}^{*}$، یعنی نقطه بهینه در سیستم ب کوچک‌تر از نقطه بهینه در سیستم الف است. در واقع طول دوره‌های تعویض در سیستم ب کمتر از سیستم الف بوده و لازم است تعویض‌های پیشگیرانه در سیستم ب نسبت به سیستم الف زودتر انجام شود.

به عنوان مثال از چنین سیستمی، فرض کنید $s_{۱}(t) = w s_{۲}(t) + k$ که $\circ < w < ۱$ و $k > \circ$ و $s_{۲}(t)$ دارای کران بالا $k/(۱ - w)$ باشد. در این‌صورت $s_{۱}(t) > s_{۲}(t)$ و $s'_{۱}(t) < s'_{۲}(t)$. بنابراین در مواجهه با این دو سیستم بر اساس نتایج بیان شده،

پیشنهاد می‌شود تعویض‌های پیشگیرانه در سیستم ب نسبت به سیستم الف زودتر انجام شود.

در قضیه بعد دو سیستم کاملاً مشابه در نظر گرفته شده و تنها با تغییر احتمال تعمیرمینیمال در خرابی نوع II (p) در مورد طول دوره تعویض، اظهار نظر می‌شود.

قضیه ۳ : فرض کنید سیستم الف و ب دارای توابع نرخ مشابه $r(t)$ و $s(t)$ به ترتیب برای خرابی‌های نوع I و II باشند. مقادیر $p_۱$ و $p_۲$ احتمال تعمیر در خرابی نوع II به ترتیب در سیستم الف و ب در نظر گرفته شوند، به‌طوری که $p_۱ < p_۲$. در هر دو سیستم تمام شرایط دیگر از جمله هزینه‌ها با هم برابرند. همچنین فرض کنید $c_{۲,r} - c_r < c_{۲,m}$. در این‌صورت نقطه بهینه در سیستم ب کوچکتر از نقطه بهینه در سیستم الف است، یعنی $T_۲^* < T_۱^*$.

برهان : طبق فرض قضیه

$$c_{۲,r} - c_r < c_{۲,m} \qquad (۹)$$

زیرا سمت چپ در (۹) هزینه از کارافتادگی سیستم در اثر خرابی را نشان می‌دهد، در صورتی که سمت راست آن شامل هزینه از کارافتادگی و هزینه تعمیر مینیمال است.

توابع $a(t)$ و $R(t)$ در (۲) و (۳) صعودی بر حسب p هستند، زیرا

$$\frac{\partial a(t)}{\partial p} = s(t)(c_{۲,m} - c_{۲,r} + c_r)$$

بنا به (۹) به وضوح علامت مشتق $a(t)$ مثبت خواهد بود. بنابراین $a(t)$ نسبت به p صعودی است. همچنین $R(t)$ نیز تابعی صعودی برحسب p است، زیرا

$$\frac{\partial R(t)}{\partial p} = R(t) \int_۰^t s(u)du = \Gamma_۲(t)R(t) > ۰$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(u)}{\partial p} &= s(u)(c_{۲,m} - c_{۲,r} + c_r) \int_۰^u R(t)dt + a(u) \int_۰^u \Gamma_۲(t)R(t)dt \\ &- \int_۰^u s(u)(c_{۲,m} - c_{۲,r} + c_r)R(t)dt - \int_۰^u a(t)\Gamma_۲(t)R(t)dt \end{aligned}$$

$$= \int_{0}^{u}[(c_{2,m}-c_{2,r}+c_r)(s(u)-s(t))+\Gamma_2(t)(a(u)-a(t)]R(t)dt$$

چون $r(t)$ و $s(t)$ صعودی‌اند، تابع $a(t)$ نیز صعودی است. بنابراین علامت عبارات $a(u)-a(t)$ و $s(u)-s(t)$ مثبت خواهند بود. در نتیجه، مقدار $\frac{\partial h(u)}{\partial p}$ مثبت بوده و لذا تابع $h_p(u)$ بر حسب p صعودی است؛ یعنی اگر $p_1 < p_2$، آن‌گاه

$$h_{p_1}(u) < h_{p_2}(u)$$

بنابراین نمودار تابع $h_{p_1}(u)$ در مقابل u زیر نمودار تابع $h_{p_2}(u)$ در مقابل u قرار می‌گیرد. در نتیجه ریشه معادله $h_{p_2}(u)=0$ کوچکتر از ریشه معادله $h_{p_1}(u)=0$ است. بنابراین هنگامی که $p_1 < p_2$، طول دوره تعویض در سیستمی که با احتمال p_2 در حالت خرابی نوع II تعمیر می‌شود، کمتر از طول دوره تعویض برای سیستمی است که با احتمال p_1 تعمیر شود؛ یعنی $T_2^* < T_1^*$. $\square$

۴ چند مثال عددی

در این بخش چند مثال عددی از سیستم‌های معرفی شده در بخش قبل، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

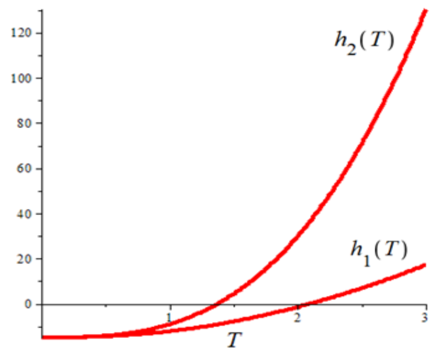
مثال ۱ : فرض کنید سیستم الف دارای تابع نرخ در خرابی نوع I، به صورت $\omega(t)r(t)$ است که در آن $w(t)=\frac{1}{t+1}$ و $r(t)=3t^2$. به وضوح $\omega(t)$ تابعی نزولی بوده و $0<\omega(t)<1$ و $r(t)$ تابعی صعودی است. از طرفی $w(t)r(t)$ نیز صعودی است زیرا

$$\frac{d\omega(t)r(t)}{dt}=\frac{6t(t+1)-3t^2}{(t+1)^2}=\frac{3t^2+6t}{(t+1)^2}>0$$

همچنین فرض کنید سیستم الف دارای تابع نرخ $s(t)=0/02t$ برای خرابی نوع II است. سیستم ب نیز دارای توابع $r(t)=3t^2$ و $s(t)=0/02t$ باشد و بقیه شرایط در دو سیستم کاملاً مشابه و به صورت زیر باشند

$$\alpha=0/1,\quad p=0/75,\quad c_1=3,\quad c_{2,m}=10,\quad c_{2,r}=15,\quad c_r=15$$

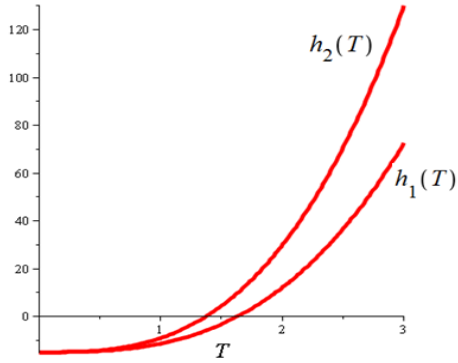
چون تمام شرایط قضیه ۱ برقرار هستند، پس $T_1^* < T_2^*$؛ یعنی طول دوره تعویض در سیستم ب کوچک‌تر از سیستم الف است. با حل معادلات $h_1(T) = 0$ و $h_2(T) = 0$ مقدار دقیق T_1^* و T_2^* با استفاده از نرم‌افزار ریاضی Maple17 محاسبه و مقادیر **۲/۰۹۷** $= T_1^*$ و **۱/۳۷۵** $= T_2^*$ به دست آمدند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقادیر به دست آمده کاملاً با نتیجه گرفته شده از قبل، مطابقت دارد. در شکل ۱ نمودار تابع $h_2(T)$ زودتر از $h_1(T)$ محور افق را قطع کرده است.



شکل ۱: نمودار توابع $h_1(T)$ و $h_2(T)$

مثال ۲ : فرض کنید $\omega(t)$ تابعی ثابت مانند $\omega(t) = \frac{3}{5}$، $r(t) = 3t^2$، $s(t) = 0/02t$ و بقیه مقادیر مشابه مثال ۱ باشند. در این‌صورت شرایط قضیه ۱ برقرار بوده و می‌توان نتیجه گرفت $T_1^* < T_2^*$. با حل معادلات $h_1(T) = 0$ و $h_2(T) = 0$ مقدار دقیق **۱/۶۳۳** $= T_1^*$ و **۱/۳۷۵** $= T_2^*$ حاصل می‌شوند و کاملاً با نتیجه گرفته شده مطابقت دارند. در شکل ۲ نمودار تابع $h_2(T)$ محور افق را زودتر از تابع $h_1(T)$ قطع می‌کند.

مثال ۳ : فرض کنید سیستم الف دارای توابع نرخ $r_1(t) = 3t^2$ و $s_1(t) = 0/02t$، به‌ترتیب در خرابی‌های نوع I و II، $p_1 = 0/3$ و سیستم ب



شکل ۲: نمودار توابع $h_۱(T)$ و $h_۲(T)$

مشابه سیستم الف باشد و تنها با این اختلاف که احتمال تعمیر در خرابی نوع II (p) مقدار ۰/۷ است یعنی $p_۲ = ۰/۷$ و بقیه شرایط در دو سیستم کاملاً مشابه و به‌صورت

$$\alpha = ۰/۱, \quad c_۱ = ۳, \quad c_{۲,m} = ۱۰, \quad c_{۲,r} = ۱۵, \quad c_r = ۱۲$$

باشند. چون تمام شرایط قضیه ۳ برقرار هستند پس $T_۲^* < T_۱^*$ که در آن $T_۱^*$ نقطه بهینه در سیستم الف و $T_۲^*$ نقطه بهینه در سیستم ب است.

با حل معادلات $h_۱(T) = ۰$ و $h_۲(T) = ۰$ مقادیر دقیق $T_۱^* = ۱/۳۷۶$ و $T_۲^* = ۱/۲۷۵$ به‌دست آمد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقادیر به‌دست آمده کاملاً با نتیجه گرفته شده از قبل، مطابقت دارد.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

به‌منظور بررسی بیشتر نتایج به‌دست آمده، یکی از حالت‌های مقایسه نقطه بهینه دو سیستم با استفاده از شبیه‌سازی انجام می‌شود. در این راستا نتیجه حاصل شده از قضیه ۳ مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طور که در بخش ۲ آمده، در مدل آون و کاسترو (۲۰۰۸) در خرابی نوع II با احتمال p تعمیر مینیمال و با احتمال $1 - p$ تعویض انجام می‌شود. بنابراین در عمل، در صورت بروز خرابی، یکی از حالت‌های

تعمیرمینیمال یا تعویض به وقوع می‌پیوندد. در این روش شبیه‌سازی مراحل زیر با استفاده از نرم افزار آماری R انجام شد.

در ابتدا ده هزار مشاهده به‌صورت تصادفی از توزیع یکنواخت استاندارد تولید می‌شود. سپس با توجه به مقدار p داده شده، انجام تعمیر مینیمال یا انجام تعویض برای iامین بار از خرابی نوع II تعیین می‌شود ($i = ۱,\dots,۱۰۰۰۰$). یعنی اگر عدد تصادفی تولید شده در بار iام کمتر از p باشد، تعمیر مینیمال و در غیر این‌صورت جایگذاری انجام می‌گیرد.

با توجه به اینکه مقدار p در مرحله قبل اعمال شده است، در این مرحله، تابع بهینه در حالت انتخاب تعمیر مینمال با $p = ۱$ و در حالت انتخاب جایگذاری با $p = ۰$ محاسبه کرده و نقطه بهینه به‌دست آورده می‌شود. مقادیر بقیه پارامترهای سیستم، همانند مثال ۳ در نظر گرفته‌شده است.

از نتایج شبیه‌سازی ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار p، نقطه بهینه کاهش می‌یابد که کاملاً با نتیجه به‌دست آمده از قضیه ۳ منطبق است. با محاسبه انحراف معیار نقاط بهینه در شبیه‌سازی، ملاحظه می‌شود که بیشترین انحراف معیار در $p = ۰/۵$ اتفاق افتاده و هرمقدار که p به صفر یا یک نزدیک می‌شود از انحراف معیار آن کاسته می‌شود. این نتیجه با دیدگاه شهودی در این مدل، سازگاری دارد. زیرا در حالت $p = ۰/۵$ بیشترین تغییر را بین تعمیر مینیمال و تعویض خواهیم داشت.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های قابل تعمیر با دو نوع خرابی در نظر گرفته شد، به گونه‌ای که تعمیر یا تعویض بر اساس روش پیشنهادی آون و کاسترو (۲۰۰۸) انجام گرفت و نتایج زیر حاصل شد.

- اگر بین توابع نرخ در خرابی نوع I در دو سیستم الف و ب رابطه‌ای وجود داشته باشد به این گونه که $r_۱(t) = \omega(t) r_۲(t)$ که $\omega(t)$ تابعی نزولی‌است و $۱ > \omega(t) > ۰$، و بقیه شرایط دو سیستم کاملاً مشابه باشد. در این صورت نقطه بهینه در سیستم ب کوچک‌تر از نقطه بهینه در سیستم الف است. در

واقع طول دوره‌های تعویض در سیستم ب کمتر است. لذا پیشنهاد می‌شود تعویض‌های پیشگیرانه در سیستم ب نسبت به سیستم الف زودتر انجام شود.

- اگر بخواهیم طول دوره بهینه جایگذاری دو سیستم را از لحاظ تابع نرخ در خرابی نوع II مقایسه کنیم و سیستم‌های الف و ب به ترتیب دارای توابع نرخ $s_۱(t)$ و $s_۲(t)$ در خرابی نوع II باشند که $s_۱(t) > s_۲(t)$، $s'_۱(t) < s'_۲(t)$ و بقیه شرایط دو سیستم کاملاً مشابه باشد. آنگاه طول دوره جایگذاری بهینه که باعث کمینه کردن تابع هزینه می‌شود باید در سیستم ب نسبت به سیستم الف کمتر باشد.

- اگر دو سیستم از لحاظ احتمال تعمیر با هم تفاوت داشته باشند. یعنی اگر $p_۱ < p_۲$، آنگاه طول دوره تعویض در سیستمی که با احتمال $p_۲$ در حالت خرابی نوع II تعمیر می‌شود، کمتر از طول دوره تعویض برای سیستمی است که با احتمال $p_۱$ تعمیر شود؛ یعنی $T^*_۲ < T^*_۱$.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم مجله به‌خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادات ارزنده که باعث بهبود کیفیت آن شده است، تقدیر و تشکر می‌کنند. همچنین از سردبیر و هیات تحریریه مجله به‌خاطر مطالعه دقیق و ویرایش ادبی مقاله تقدیر به عمل می‌آورند. به‌علاوه از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی تشکر می‌شود.

مراجع

اسدی، م. (۱۳۹۲)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، مرکز نشر دانشگاهی.

Ascher, H. E. and Feingold, H. (1984), *Repairable System Reliability*, Dekker, New York.

Aven, T. (1983), Optimal Replacement Under a Minimal Repair Stategy-A General Failure Model, *Journal of Applied Probability*, **15**, 198-211.

Aven, T. and Castro, I. T. (2008), A Minimal Repair Replacement Model with Two Types of Failure and a Safety Constraint, *European Journal of Operational Research*, **188**, 506-515.

Aven, T. and Jensen, U. (1999), *Stochastic Models in Reliability*, Springer, London.

Barlow, R. E. and Hanter, L. C. (1960), Optimum Preventive Maintenance Policies, *Operations Research*, **8**, 90-100.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1965), *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley, New York.

Chang, C. C., Shey, H. S. and Chen, Y. L. (2010), Optimal Number of Minimal Repair before Replacement Based on a Cumulative Repair-Cost Limit Policy, *Computer and Industrial Society*, **59**, 603-610.

Nakagawa, T. and Kowada, M. (1983), Analysis of a System with Minimal Repair and its Application to Replacement Policy, *European Journal of Operational Research*, **12**, 176-182.