

حل تحلیلی سینماتیک مستقیم ربات موازی استوارت ۳-۶ به روش بزوت

امیر غلامحسین طهرانی^۱، عرفان آروان^۲، علیرضا اکبرزاده توتونچی^۳

^۱دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک طراحی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، amir.gh.tehrani@gmail.com

^۲دانشجوی کارشناسی فناوری اطلاعات، دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع)، e.arvan@yahoo.com

^۳استاد گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، ali_akbarzadeh_t@yahoo.com

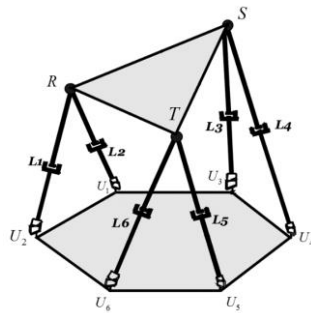
چکیده

۴-۵، همچنین چن^۵ و سانگ^۶ نوع ۴-۶ را مورد بررسی قرار دادند. روش شبکه‌های عصبی برای حل سینماتیک ربات به منظور تسریع محاسبات توسط ژنگ^۷ و هاینز^۸ بررسی گردید [۵]. روش‌های عددی که به حل معادلات غیرخطی و محاسبه‌ی مجهولات سینماتیک می‌پردازد، در صورتی که حدس اولیه نزدیک به جواب وجود داشته باشد، مناسب خواهند بود. برای تعیین تمامی جواب‌های حقیقی ممکن سینماتیک مستقیم، باید از روش‌های تحلیلی استفاده نمود. با این وجود مسئله سینماتیک مستقیم منجر به یک سیستم دستگاه جبری غیرخطی می‌گردد که بسیار پیچیده خواهد بود و همچنین دارای پاسخ‌های چندگانه است.

در این مقاله ابتدا به معرفی ربات موازی استوارت می‌پردازیم. سپس با معرفی نوع خاصی از این ربات که ۳-۶ می‌باشد به تحلیل سینماتیکی آن می‌پردازیم. در ابتدا مسئله سینماتیک معکوس ربات با استفاده از زنجیره سینماتیکی حلقه بسته آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس برای سینماتیک معکوس یک مثال عددی ارائه می‌شود. در ادامه به حل تحلیلی سینماتیک مستقیم ربات می‌پردازیم. در این مقاله سعی بر آن است که با روش حذفی بزوت به حل تحلیلی سینماتیک ربات بپردازیم. با استفاده از این روش معادلات جبری غیرخطی کوپل شده، تبدیل به یک چندجمله‌ای یک متغیره می‌شود. با حل این چندجمله‌ای سینماتیک مستقیم ربات استوارت به صورت تحلیلی حل می‌گردد. در ادامه با استقاه از یک مثال عددی صحت نتایج حاصل تأیید می‌گردد.

معرفی ربات موازی استوارت

مکانیزم موازی شامل تعدادی لینک با اتصال موازی بوده که ارتباط دو سکو توسط این لینک‌ها برقرار می‌گردد. از پرکاربردترین نوع این مکانیزم‌ها، هگزاپادهایی می‌باشند که در آن از شش لینک با مفاصل کشویی استفاده شده است. ربات استوارت به دلیل استفاده از ترتیب مفاصل یونیورسال، کشویی و کروی به نام ربات موازی UPS معروف است. در شکل ۱ ربات موازی استوارت نشان داده شده است.



شکل ۱: طرح شماتیکی از ربات ۳-۶ استوارت

واژه‌های کلیدی

ربات استوارت- سینماتیک مستقیم- روش بزوت

مقدمه

در دهه‌های اخیر مکانیزم‌های موازی به علت مزایای ذاتی در مقایسه با مکانیزم‌های سری، بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است. مکانیزم استوارت مکانیزمی موازی است که اولین بار توسط استوارت در سال ۱۹۶۵ ساخته شد [۱]. هدف اصلی طراحی مکانیزم استوارت شبیه‌سازی شرایط پرواز با حرکت عمومی در فضا است. مدلسازی سینماتیکی ربات‌های موازی بر خلاف ربات‌های سری به دلیل وجود قیود سینماتیکی و زنجیره حلقه بسته دارای پیچیدگی‌های ذاتی است.

ومپلر^۱ نیز در سال ۱۹۹۶ سینماتیک مستقیم ربات 6-SPS را مورد بررسی قرار داده است [۲]. نانو^۲ در سال ۱۹۸۹ نیز به حل سینماتیک مستقیم ربات استوارت صفحه‌ای متقارن پرداخته است و ۱۶ جواب برای آن بدست آورده است [۳]. راث^۳ و همکارانش دستگاه معادلات ربات ۵-۶ را پس از فاکتورگیری با چندجمله‌ای یک متغیره درجه ۴۰ بدست آوردند [۴]. لین^۴ و همکارانش ربات‌های نوع ۴-۴ و

سینماتیک

تحلیل سینماتیک ربات‌های موازی شامل حل سینماتیک مستقیم و معکوس می‌باشد. بر خلاف ربات‌های سری، مسئله‌ی سینماتیک معکوس در ربات‌های موازی ساده و مسئله‌ی سینماتیک مستقیم مشکل است. دلیل مشکل بودن سینماتیک مستقیم در ربات‌های موازی این است که معادلات سینماتیک مستقیم در آن‌ها، معادلات

^۵Chen
^۶Song
^۷Geng
^۸Haynes

^۱Wampler
^۲Nanua
^۳Roth
^۴Lin

جبری غیرخطی است. در این مقاله ابتدا به حل سینماتیک معکوس پرداخته می‌شود.

به منظور حل مسئله سینماتیک معکوس ربات استوارت، زوایای دوران $[\phi \theta \psi] = [10 \ 20 \ 30]$ و بردار جابجایی $P = [0.5 \ 1 \ 2]^T$ را در نظر می‌گیریم. با اعمال ورودی‌ها و استفاده از معادله‌ی ۱ تا ۳، طول محرک‌ها برابر است با:

سینماتیک معکوس

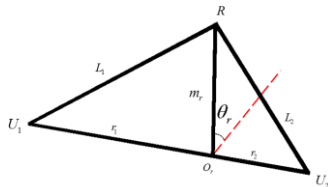
حل سینماتیک معکوس ربات موازی استوارت مشابه تمام ربات‌های موازی دارای حلی آسان است. همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، یک دستگاه مختصات ثابت متصل به صفحه پایینی و یک دستگاه مختصات متحرک متصل به صفحه بالایی را در نظر می‌گیریم. مختصات رئوس صفحه بالا در دستگاه متحرک را با بردار R, S, T و مختصات رئوس صفحه پایینی در دستگاه ثابت را با بردار U_i نشان می‌دهیم.

جدول ۲- طول لینک‌های ربات در حل سینماتیک معکوس

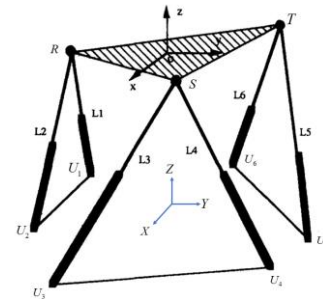
i	L_i	i	L_i
۱	۲,۳۷۲۳۳۳۱۱	۴	۲,۴۱۶۴۱۳۳۲
۲	۲,۳۱۷۷۷۴۶۲	۵	۲,۳۶۵۱۷۶۳۸
۳	۲,۲۰۴۶۸۳۲۸	۶	۲,۱۲۸۲۲۲۰۶

سینماتیک مستقیم

به منظور حل سینماتیک مستقیم ربات با نوشتن قیدهای سینماتیکی معادلات جبری غیرخطی کوپل شده بدست می‌آید. با استفاده از روش حذفی بزوت می‌توان دستگاه معادلات مثلثاتی کوپل شده شامل چند متغیر را به یک چند جمله‌ای بر حسب تنها یک متغیر تبدیل کرد.



شکل ۳: زنجیره سینماتیکی ربات استوارت و مشخصات هندسی



شکل ۲: شماتیک دستگاه‌های مختصات بر روی پلتفرم استوارت ۳-۶

در سینماتیک معکوس هدف یافتن طول محرک‌های خطی ربات با معلوم بودن مکان و زوایای دوران صفحه‌ی متحرک ربات است. با استفاده از زنجیره‌ی سینماتیکی حلقه بسته‌ی ربات، می‌توان معادله-ی برداری ۱ را به منظور محاسبه‌ی طول لینک‌های ربات نوشت:

$$L_i = \mathcal{R}R + P - U_i \quad i = 1, 2 \quad (1-a)$$

$$L_i = \mathcal{R}S + P - U_i \quad i = 3, 4 \quad (1-b)$$

$$L_i = \mathcal{R}T + P - U_i \quad i = 5, 6 \quad (1-c)$$

که در آن \mathcal{R} ماتریس دوران است.

همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، R_1, R_2 را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$|U_1 U_2| = r_1 + r_2 \quad (2-a)$$

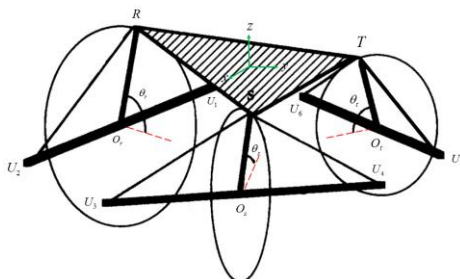
$$|U_3 U_4| = r_3 + r_4 \quad (2-b)$$

$$|U_5 U_6| = r_5 + r_6 \quad (2-c)$$

با توجه به اینکه هر دو لینک به یکی از رئوس مثلث متصل شده است، لذا نقاط R, S, T تنها یک درجه آزادی دارند و مکان هندسی این نقاط دایره‌ای به شعاع m_r, m_s, m_t و مرکز O_r, O_s, O_t می‌باشند که در شکل ۴ نشان داده شده است.

مثال عددی

مختصات رئوس صفحه‌های پایینی و بالای ربات استوارت ۳-۶ در جدول زیر آورده شده است.



شکل ۴: مکان هندسی رئوس پلتفرم متحرک

با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث می‌توان شعاع دایره‌ی که مکان هندسی رئوس پلتفرم متحرک هستند را به صورت زیر نوشت:

$$m_r = \sqrt{L_1^2 - r_1^2} \quad (3-a)$$

جدول ۱: مختصات رئوس ربات در دستگاه محلی (بر حسب متر)

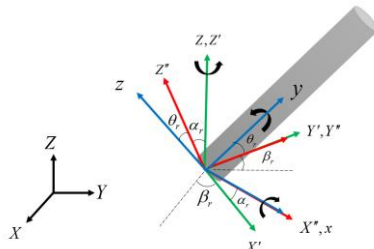
i	U_i	i	R, S, T
۱	(۰/۳۵۵, ۰/۰۶۲, ۰)	۱	(۰/۰۵, ۰/۲۳۹, ۰)
۲	(-۰/۱۲۳, ۰/۳۳۸, ۰)		(۰/۲۳۱, ۰, ۰)
۳	(-۰/۲۳۱, ۰/۲۷۶, ۰)		
۴	(-۰/۲۳۱, -۰/۲۷۶, ۰)	۳	
۵	(-۰/۱۲۳, -۰/۳۳۸, ۰)		
۶	(۰/۳۵۵, -۰/۰۶۲, ۰)		(۰/۰۵, -۰/۲۳۹, ۰)

$$\beta_s = \cos^{-1}\left(\frac{(U_3U_4)_x}{\sqrt{(U_3U_4)_x^2 + (U_3U_4)_y^2}}\right) \quad (9-b)$$

$$\alpha_t = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(U_5U_6)_x^2 + (U_5U_6)_y^2}}{|U_5U_6|}\right) \quad (8-c)$$

$$\beta_t = \cos^{-1}\left(\frac{(U_5U_6)_x}{\sqrt{(U_5U_6)_x^2 + (U_5U_6)_y^2}}\right) \quad (9-c)$$

دستگاه مختصات ثابت XYZ را در نظر می‌گیریم. ابتدا با دورانی به اندازه β_r حول محور Z، سپس دورانی به اندازه α_r حول محور $-Y'$ جدید و در نهایت با دورانی حول X'' به اندازه θ_r محور Y''' در راستای v_r قرار می‌گیرد.



شکل ۵: زوایای اویلر به منظور دوران دستگاه ثابت به متحرک

با استفاده از دوران دستگاه‌های مختصات خواهیم داشت:

$$v_r = \begin{bmatrix} -\cos \theta_r \sin \beta_r - \sin \theta_r \cos \beta_r \\ \cos \theta_r \cos \beta_r - \sin \theta_r \sin \alpha_r \sin \beta_r \\ \sin \theta_r \cos \alpha_r \end{bmatrix} \quad (10-a)$$

$$v_s = \begin{bmatrix} -\cos \theta_s \sin \beta_s - \sin \theta_s \cos \beta_s \\ \cos \theta_s \cos \beta_s - \sin \theta_s \sin \alpha_s \sin \beta_s \\ \sin \theta_s \cos \alpha_s \end{bmatrix} \quad (10-b)$$

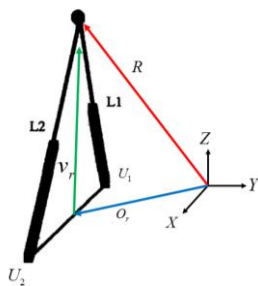
$$v_t = \begin{bmatrix} -\cos \theta_t \sin \beta_t - \sin \theta_t \cos \beta_t \\ \cos \theta_t \cos \beta_t - \sin \theta_t \sin \alpha_t \sin \beta_t \\ \sin \theta_t \cos \alpha_t \end{bmatrix} \quad (10-c)$$

همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده است، بردار رئوس پلتفرم متحرک را در دستگاه ثابت می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$R = O_r + v_r \quad (11-a)$$

$$S = O_s + v_s \quad (11-b)$$

$$T = O_t + v_t \quad (11-c)$$



شکل ۶: شماتیک بردار رئوس پلتفرم

$$m_s = \sqrt{L_3^2 - s_1^2} \quad (3-b)$$

$$m_t = \sqrt{L_5^2 - t_1^2} \quad (3-c)$$

با در نظر گرفتن دو مثلث قائم‌الزاویه نشان داده شده در شکل ۳ و نوشتن تقاضای رابطه‌های فیثاغورث داریم:

$$r_1^2 - r_2^2 = L_1^2 - L_2^2 \quad (4)$$

با توان ۲ رساندن معادله‌ی ۲-a می‌توان نوشت:

$$|U_1U_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \quad (5)$$

اکنون با ترکیب معادلات ۴ و ۵ خواهیم داشت:

$$r_1 = \frac{|U_1U_2|^2 + L_1^2 - L_2^2}{2|U_1U_2|} \quad (6-a)$$

$$s_1 = \frac{|U_3U_4|^2 + L_3^2 - L_4^2}{2|U_3U_4|} \quad (6-b)$$

$$t_1 = \frac{|U_5U_6|^2 + L_5^2 - L_6^2}{2|U_5U_6|} \quad (6-c)$$

می‌توان مختصات O_r را در دستگاه ثابت به صورت زیر نوشت:

$$O_r = U_1 + r_1 \frac{U_1U_2}{|U_1U_2|} \quad (7-a)$$

$$O_s = U_3 + s_1 \frac{U_3U_4}{|U_3U_4|} \quad (7-b)$$

$$O_t = U_5 + t_1 \frac{U_5U_6}{|U_5U_6|} \quad (7-c)$$

با توجه به روابط فوق مرکز مکان هندسی دایره رئوس پلتفرم متحرک نیز بدست آمدند. به منظور نوشتن بردارهای v_r, v_s, v_t در دستگاه مختصات ثابت دو زاویه دوران برای هر لینک تعریف می‌نماییم. با استفاده از این چرخش محور y منطبق بر راستای v_r می‌شود. اگر زاویه U_1U_2 با محور Z را $\gamma_r = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r\right)$ و زاویه

تصویر U_1U_2 با محور X را β_r در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\alpha_r = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(U_1U_2)_x^2 + (U_1U_2)_y^2}}{|U_1U_2|}\right) \quad (8-a)$$

$$\beta_r = \cos^{-1}\left(\frac{(U_1U_2)_x}{\sqrt{(U_1U_2)_x^2 + (U_1U_2)_y^2}}\right) \quad (9-a)$$

همچنین به طور مشابه:

$$\alpha_s = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(U_3U_4)_x^2 + (U_3U_4)_y^2}}{|U_3U_4|}\right) \quad (8-b)$$

با توجه به صلب بودن پلنتفرم متحرک و در نتیجه‌ی آن ثابت بودن طول اضلاع مثلث می‌توان گفت:

$$|R - S| = G_1 \quad (12-a)$$

$$|S - T| = G_2 \quad (12-b)$$

$$|R - T| = G_3 \quad (12-c)$$

با بسط دادن معادله‌ی فوق

$$[(O_{rx} + O_{sx}) + (v_{rx} - v_{sx})]^2 + [(O_{ry} + O_{sy}) + (v_{ry} - v_{sy})]^2 + [(O_{rz} + O_{sz}) + (v_{rz} - v_{sz})]^2 = G_1^2 \quad (13)$$

با جایگذاری مقدار v_r در معادله‌ی ۱۳ و ساده‌سازی داریم:

$$A_1 \sin \theta_r + A_2 \cos \theta_r + A_3 \sin \theta_s + A_4 \cos \theta_s + A_5 \sin \theta_r \sin \theta_s + A_6 \sin \theta_r \cos \theta_s + A_7 \cos \theta_r \sin \theta_s + A_8 \cos \theta_r \cos \theta_s = A_0 \quad (12-a)$$

به همین ترتیب:

$$C_1 \sin \theta_r + C_2 \cos \theta_r + C_3 \sin \theta_t + C_4 \cos \theta_t + C_5 \sin \theta_r \sin \theta_t + C_6 \sin \theta_r \cos \theta_t + C_7 \cos \theta_r \sin \theta_t + C_8 \cos \theta_r \cos \theta_t = C_0 \quad (12-b)$$

و

$$E_1 \sin \theta_s + E_2 \cos \theta_s + E_3 \sin \theta_t + E_4 \cos \theta_t + E_5 \sin \theta_s \sin \theta_t + E_6 \sin \theta_s \cos \theta_t + E_7 \cos \theta_s \sin \theta_t + E_8 \cos \theta_s \cos \theta_t = E_0 \quad (12-c)$$

که در آن:

$$A_1 = -2m_r(O_{rx} - O_{sx}) \sin \alpha_r \cos \beta_r - 2m_r(O_{ry} - O_{sy}) \sin \alpha_r \sin \beta_r + 2m_r(O_{rz} - O_{sz}) \sin \alpha_r \quad (13-a)$$

$$A_2 = -2m_r(O_{rx} - O_{sx}) \sin \beta_r - 2m_r(O_{ry} - O_{sy}) \cos \beta_r \quad (14-a)$$

$$A_3 = 2m_s(O_{rx} - O_{sx}) \sin \alpha_s \cos \beta_s + 2m_s(O_{ry} - O_{sy}) \sin \alpha_s \sin \beta_s - 2m_s(O_{rz} - O_{sz}) \cos \alpha_s \quad (14-a)$$

$$A_4 = 2m_s(O_{rx} - O_{sx}) \sin \beta_s - 2m_s(O_{ry} - O_{sy}) \cos \beta_s \quad (15-a)$$

$$A_5 = 2m_r m_s \cos(\beta_s - \beta_r) \sin \alpha_r \sin \alpha_s - 2m_r m_s \cos \alpha_r \cos \alpha_s \quad (16-a)$$

$$A_6 = -2m_r m_s \sin(\beta_s - \beta_r) \sin \alpha_s \quad (17-a)$$

$$A_7 = -2m_r m_s \cos(\beta_s - \beta_r) \quad (18-a)$$

$$A_8 = -2m_r m_s \cos(\beta_s - \beta_r) \quad (19-a)$$

$$A_0 = G_1^2 - (O_{rx} - O_{sx})^2 - (O_{ry} - O_{sy})^2 - (O_{rz} - O_{sz})^2 - m_r^2 - m_s^2 \quad (20-a)$$

به روش مشابه نیز داریم:

$$C_1 = -2m_r(O_{rx} - O_{tx}) \sin \alpha_r \cos \beta_r - 2m_r(O_{ry} - O_{ty}) \sin \alpha_r \sin \beta_r + 2m_r(O_{rz} - O_{tz}) \cos \alpha_r \quad (13-b)$$

$$C_2 = -2m_r(O_{rx} - O_{tx}) \sin \beta_r - 2m_r(O_{ry} - O_{ty}) \cos \beta_r \quad (14-b)$$

$$C_3 = 2m_s(O_{rx} - O_{tx}) \sin \alpha_t \cos \beta_t + 2m_s(O_{ry} - O_{ty}) \sin \alpha_t \sin \beta_t - 2m_s(O_{rz} - O_{tz}) \cos \alpha_t \quad (14-b)$$

$$C_4 = 2m_t(O_{rx} - O_{tx}) \sin \beta_t - 2m_t(O_{ry} - O_{ty}) \cos \beta_t \quad (15-b)$$

$$C_5 = 2m_r m_t \cos(\beta_t - \beta_r) \sin \alpha_r \sin \alpha_t - 2m_r m_t \cos \alpha_r \cos \alpha_t \quad (16-b)$$

$$C_6 = -2m_r m_t \sin(\beta_t - \beta_r) \sin \alpha_t \quad (17-b)$$

$$C_7 = -2m_r m_t \cos(\beta_t - \beta_r) \quad (18-b)$$

$$C_8 = -2m_s m_t \cos(\beta_t - \beta_s) \quad (19-b)$$

$$C_0 = G_1^2 - (O_{rx} - O_{tx})^2 - (O_{ry} - O_{ty})^2 - (O_{rz} - O_{tz})^2 - m_r^2 - m_t^2 \quad (20-b)$$

و همچنین

$$E_1 = -2m_s(O_{sx} - O_{tx}) \sin \alpha_s \cos \beta_s - 2m_s(O_{sy} - O_{ty}) \sin \alpha_s \sin \beta_s + 2m_s(O_{sz} - O_{tz}) \cos \alpha_s \quad (13-c)$$

$$E_2 = -2m_s(O_{sx} - O_{tx}) \sin \beta_s - 2m_s(O_{sy} - O_{ty}) \cos \beta_s \quad (14-c)$$

$$E_3 = 2m_t(O_{sx} - O_{tx}) \sin \alpha_t \cos \beta_t + 2m_t(O_{sy} - O_{ty}) \sin \alpha_t \sin \beta_t - 2m_t(O_{sz} - O_{tz}) \cos \alpha_t \quad (14-c)$$

$$E_4 = 2m_t(O_{sx} - O_{tx}) \sin \beta_t - 2m_t(O_{sy} - O_{ty}) \cos \beta_t \quad (15-c)$$

$$E_5 = 2m_s m_t \cos(\beta_t - \beta_s) \sin \alpha_s \sin \alpha_t - 2m_s m_t \cos \alpha_s \cos \alpha_t \quad (16-c)$$

$$E_6 = -2m_s m_t \sin(\beta_t - \beta_s) \sin \alpha_t \quad (17-c)$$

$$E_7 = -2m_s m_t \cos(\beta_t - \beta_s) \quad (18-c)$$

$$E_8 = -2m_s m_t \cos(\beta_t - \beta_s) \quad (19-c)$$

$$E_0 = G_1^2 - (O_{sx} - O_{tx})^2 - (O_{sy} - O_{ty})^2 - (O_{sz} - O_{tz})^2 - m_s^2 - m_t^2 \quad (20-c)$$

به منظور خطی سازی معادلات ۱۲-a تا ۱۲-c از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$W_r = \tan\left(\frac{\theta_r}{2}\right) \quad (21-a)$$

$$W_s = \tan\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \quad (21-b)$$

$$F_9 = E_2 + E_4 + E_8 - E_0 \quad (31-c)$$

با بازنویسی معادلات ۲۲-a تا ۲۲-c داریم

$$a_1 w_s^2 - a_2 w_s - a_3 = 0 \quad (32-a)$$

$$b_1 w_t^2 - b_2 w_t - b_3 = 0 \quad (32-b)$$

که در آن

$$a_1 = B_1 w_r^2 + B_3 w_r + B_6 \quad (33-a)$$

$$a_2 = -(B_2 w_r^2 + B_4 w_r + B_8) \quad (34-a)$$

$$a_3 = -(B_5 w_r^2 + B_7 w_r + B_9) \quad (35-a)$$

و

$$b_1 = D_1 w_r^2 + D_3 w_r + D_6 \quad (33-b)$$

$$b_2 = -(D_2 w_r^2 + D_4 w_r + D_8) \quad (34-b)$$

$$b_3 = -(D_5 w_r^2 + D_7 w_r + D_9) \quad (35-b)$$

در نتیجه با استفاده از معادلات ۳۲-a و ۳۲-b می توان گفت:

$$w_s^2 = \frac{a_2 w_s + a_3}{a_1} \quad (36-a)$$

$$w_t^2 = \frac{b_2 w_t + b_3}{b_1} \quad (36-b)$$

به منظور کاهش درجه‌ی معادله‌ی ۲۲-c با جایگذاری معادلات ۳۶-a و ۳۶-b پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$c_1 w_s w_t + c_2 w_s + c_3 w_t + c_4 = 0 \quad (37)$$

که در آن:

$$c_1 = F_1 a_2 b_2 + F_2 a_2 b_1 + F_3 a_1 b_2 + F_4 a_1 b_1 \quad (38)$$

$$c_2 = F_1 a_2 b_3 + F_3 a_1 b_3 + F_5 a_2 b_1 + F_7 a_1 b_1 \quad (39)$$

$$c_3 = F_1 a_3 b_2 + F_2 a_3 b_1 + F_6 a_1 b_2 + F_8 a_1 b_1 \quad (40)$$

$$c_4 = F_1 a_3 b_3 + F_5 a_3 b_1 + F_6 a_1 b_3 + F_9 a_1 b_1 \quad (41)$$

با استفاده از معادلات ۳۲-a و ۳۲-b می توان مقادیر w_s و w_t را بر حسب w_r بدست آورد. پس داریم:

$$w_s = \frac{a_2 + a_4}{2a_1} \quad (42)$$

$$w_t = \frac{b_2 + b_4}{2b_1} \quad (43)$$

که در آن:

$$a_4 = \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3} \quad (44)$$

$$b_4 = \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_1 b_3} \quad (45)$$

با جایگذاری روابط ۴۲ و ۴۳ با توجه به اینکه تمامی پارامترها بر حسب w_r هستند، معادله‌ای تنها بر حسب یک متغیر خواهیم داشت:

$$d_1 a_4 b_4 + d_2 a_4 + d_3 b_4 + d_4 = 0 \quad (46)$$

که در آن:

$$d_1 = c_1 \quad (47)$$

$$W_t = \tan\left(\frac{\theta_t}{2}\right) \quad (21-c)$$

با اعمال تغییر متغیر فوق و بازنویسی معادلات ۱۲-a تا ۱۲-c خواهیم داشت:

$$B_1 w_r^2 w_s^2 + B_2 w_r^2 w_s + B_3 w_r w_s^2 + B_4 w_r w_s + B_5 w_r^2 + B_6 w_s^2 + B_7 w_r + B_8 w_s + B_9 = 0 \quad (22-a)$$

$$D_1 w_r^2 w_t^2 + D_2 w_r^2 w_t + D_3 w_r w_t^2 + D_4 w_r w_t + D_5 w_r^2 + D_6 w_t^2 + D_7 w_r + D_8 w_t + D_9 = 0 \quad (22-b)$$

$$F_1 w_s^2 w_t^2 + F_2 w_s^2 w_t + F_3 w_s w_t^2 + F_4 w_s w_t + F_5 w_s^2 + F_6 w_t^2 + F_7 w_s + F_8 w_t + F_9 = 0 \quad (22-c)$$

که در آن:

$$B_1 = -A_0 - A_2 - A_4 + A_8 \quad (23-a)$$

$$B_2 = 2A_3 - 2A_7 \quad (24-a)$$

$$B_3 = 2A_1 - 2A_6 \quad (25-a)$$

$$B_4 = 4A_5 \quad (26-a)$$

$$B_5 = -A_2 + A_4 - A_8 - A_0 \quad (27-a)$$

$$B_6 = A_2 - A_4 - A_8 - A_0 \quad (28-a)$$

$$B_7 = 2A_1 + 2A_6 \quad (29-a)$$

$$B_8 = 2A_3 + 2A_7 \quad (30-a)$$

$$B_9 = A_2 + A_4 + A_8 - A_0 \quad (31-a)$$

همچنین:

$$D_1 = -C_0 - C_2 - C_4 + C_8 \quad (23-b)$$

$$D_2 = 2C_3 - 2C_7 \quad (24-b)$$

$$D_3 = 2C_1 - 2C_6 \quad (25-b)$$

$$D_4 = 4C_5 \quad (26-b)$$

$$D_5 = -C_2 + C_4 - C_8 - C_0 \quad (27-b)$$

$$D_6 = C_2 - C_4 - C_8 - C_0 \quad (28-b)$$

$$D_7 = 2C_1 + 2C_6 \quad (29-b)$$

$$D_8 = 2C_3 + 2C_7 \quad (30-b)$$

$$D_9 = C_2 + C_4 + C_8 - C_0 \quad (31-b)$$

و

$$F_1 = -E_2 - E_4 + E_8 - E_0 \quad (23-c)$$

$$F_2 = 2E_3 - 2E_7 \quad (24-c)$$

$$F_3 = 2E_1 - 2E_6 \quad (25-c)$$

$$F_4 = 4E_5 \quad (26-c)$$

$$F_5 = -E_2 + E_4 - E_8 - E_0 \quad (27-c)$$

$$F_6 = E_2 - E_4 - E_8 - E_0 \quad (28-c)$$

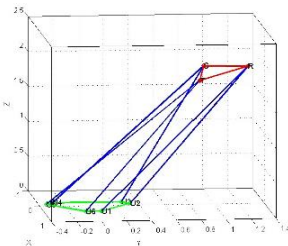
$$F_7 = 2E_1 + 2E_6 \quad (29-c)$$

$$F_8 = 2E_3 + 2E_7 \quad (30-c)$$

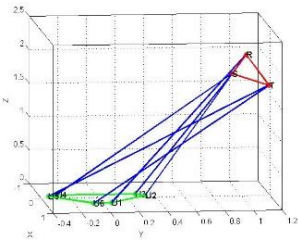
باشد، لذا تنها ۲ جواب از ۴ جواب که در شکل ۷ مشاهده می‌شوند، قابل قبول می‌باشد.

$$\text{pos} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 2 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\text{pos} = \begin{bmatrix} 0.41785 & 1.04640 & 1.95938 \\ -40.526 & 56.359 & -65.796 \end{bmatrix}$$



ب



الف

شکل ۷: پاسخ‌های سینماتیک مستقیم

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله ابتدا ساختار ربات استوارت-گوف بررسی شد. سپس با یک مثال عددی حل سینماتیک معکوس آن ارائه گردید. روش‌های عددی در صورتی مناسب هستند که حدس اولیه نزدیک به جواب باشد. از طرفی تمامی جواب‌های ممکن بدست نمی‌آید. برای تعیین تمامی جواب‌های حقیقی ممکن سینماتیک مستقیم باید از روش‌های تحلیلی استفاده نمود. در ادامه با استفاده از روش تحلیلی بزوت چندجمله‌ای درجه ۳۲ تنها بر حسب یک متغیر حاصل شد. سپس با حل آن چندجمله‌ای فرم بسته‌ی سینماتیک مستقیم بدست آمد. در انتها تمامی پاسخ‌های ممکن ارائه گردید. به منظور تصدیق این روش پاسخ‌های سینماتیک مستقیم با یک مثال عددی با نتایج سینماتیک معکوس مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

- [1] D. Stewart, 1965. "A platform with six degrees-of-freedom". in *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, Part I, Vol. 180, pp. 371-386.
- [2] C. W. Wampler, 1966. "Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS platform manipulators using soma coordinates". *Mech. Machine Theory*, Vol.31, 331-337.
- [3] P. Nanua and K. J. Waldron, 1989. "Direct kinematic solution of a Stewart platform". in: *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Scottsdale, AZ, pp. 431-437.
- [4] H.-Y. Lee and B. Roth, 1993. "A closed-form solution of the forward displacement analysis of a class of in-parallel mechanisms". in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automation*, Vol. 1, pp. 720-724.
- [5] Haynes, M.J.D., "Kinematics of General Planar Stewart-Gough Platform". Ph.D. thesis, Dept. of Mech. Eng., McGill University.

$$d_2 = c_1 b_2 + 2c_2 b_1 \quad (48)$$

$$d_3 = c_1 a_2 + 2c_3 a_1 \quad (49)$$

$$d_4 = c_1 a_2 b_2 + 2c_2 a_2 b_1 + 2c_3 a_1 b_2 + 4c_4 a_1 b_1 \quad (50)$$

با حل این چندجمله‌ای سینماتیک مستقیم ربات به صورت تحلیلی حل گردیده است. با توجه به اینکه دو جواب برای W_t و W_s وجود دارد، به منظور اجتناب از آن کافی است، با به توان ۲ رساندن معادله‌ی ۴۶ داریم:

$$2(d_1 d_4 - d_2 d_3) a_4 b_4 = -d_1^2 a_4^2 b_4^2 + d_2^2 a_4^2 + d_3^2 b_4^2 - d_4^2 \quad (51)$$

به منظور محاسبه‌ی سمت راست معادله‌ی ۵۱ با جایگذاری معادلات ۴۷ تا ۵۰ می‌توان نوشت:

$$2(d_1 d_4 - d_2 d_3) a_4 b_4 = 8a_1 b_1 (c_1 c_4 - c_2 c_3) a_4 b_4 \quad (52)$$

حال با جایگذاری مقادیر C_i داریم:

$$\begin{aligned} c_1 c_4 - c_2 c_3 = & a_1 b_1 \{ (F_4 F_9 - F_7 F_8) a_1 b_1 \\ & + (F_3 F_9 - F_6 F_8) a_1 b_2 \\ & + (F_4 F_6 - F_3 F_8) a_1 b_3 \\ & + (F_2 F_9 - F_5 F_8) a_2 b_1 \\ & + (F_1 F_9 - F_5 F_6) a_2 b_2 \\ & + (F_2 F_6 - F_1 F_8) a_2 b_3 \\ & + (F_4 F_5 - F_2 F_7) a_3 b_1 \\ & + (F_3 F_5 - F_1 F_7) a_3 b_2 \\ & + (F_1 F_4 - F_2 F_3) a_3 b_3 \} \end{aligned} \quad (53)$$

مجدداً با به توان ۲ رساندن معادله‌ی ۵۲ داریم:

$$4(d_1 d_4 - d_2 d_3)^2 a_4^2 b_4^2 = 64 a_1^2 b_1^2 (c_1 c_4 - c_2 c_3)^2 a_4^2 b_4^2 \quad (54)$$

در نتیجه:

$$64 a_1^2 b_1^2 (c_1 c_4 - c_2 c_3)^2 a_4^2 b_4^2 = (-d_1^2 a_4^2 b_4^2 + d_2^2 a_4^2 + d_3^2 b_4^2 - d_4^2)^2 \quad (55)$$

با جایگذاری معادله‌ی ۵۵ و مقادیر a_4, b_4 از معادلات ۴۴ و ۴۵ در معادله‌ی ۵۱ تمامی پارامترها بر حسب متغیر W_r خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{32} e_i W_r^i = 0 \quad (56)$$

معادله‌ی ۵۶ از درجه‌ی ۳۲ می‌باشد. با حل این چندجمله‌ای سینماتیک مستقیم ربات به صورت تحلیلی حل گردید.

نتایج مثال عددی سینماتیک مستقیم

بر خلاف سینماتیک معکوس، در سینماتیک مستقیم هدف بدست آوردن موقعیت مکانی و دورانی صفحه‌ی متحرک ربات با توجه به معلوم بودن طول محرک‌های خطی است. در این بخش مثال عددی برای تأیید صحت پاسخ‌های سینماتیک مستقیم آورده شده است. با اعمال مقادیر طول محرک‌های خطی، که در جدول ۲ لیست شده است، جواب‌های ممکن سینماتیک مستقیم در شکل ۷ آورده شده‌اند. از آنجا که مقادیر Z با توجه به ساختار ربات نمی‌تواند منفی