بررسی نظریه های زیگزاگ در تحلیل خمش صفحات مستطیلی چند لایه

علیرضا پهلوانی[1] ، بهروز حسنی[2]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ، گروه مکانیک دانشکده مهندسی ، دانشگاه فردوسی مشهد
۲- استاد ، گروه مکانیک دانشکده مهندسی ، دانشگاه فردوسی مشهد

Pahlevani.alireza@yahoo.com
b_hassani@um.ac.ir

خلاصه

در این مقاله از نظریه های زیگزاگ بهبود یافته برای تحلیل صفحات چند لایه ضخیم بکار رفته است. پارامترهای مجهول در این نظریه، همان مجهولات نظریه تغییر شکل برشی میباشد با این تفاوت که در این نظریه ، علاوه برآوردن شرایط مرزی در بالا و پایین صفحه ، پیوستگی تنش برشی در سطح تماس لایه ها را در نظر گرفته است و منجر به نتایج بهتری میگردد. بدین منظور یک صفحه چند لایه ای مستطیلی با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در نظر گرفته و با استفاده از اصل کار مجازی، روشی تحلیلی برای حل معادلات تعادل معرفی شده است. به منظور بررسی دقت روشهای مذکور، نتایج مورد نظر شامل خیز صفحه ، تنشهای برشی عرضی و قائم بدست آمده و با نتایج حاصل از نظریه های تغییر شکل برشی و روش اجزاء محدود مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: نظریه زیگزاگ بهبود یافته، نظریه تغییر شکل برشی، حل تحلیلی

۱. مقدمه

ساختارهای جدار نازک به شکل پوسته و صفحه های چند لایه در صنایع و در شاخه های مختلف مهندسی از جمله مهندسی مکانیک و هوافضا کاربرد دارد. برای مطالعه رفتار مکانیکی صفحات روشهای متنوعی ارائه شده است. این روش ها شامل تحلیل سه بعدی رفتار صفحه با استفاده از تئوری الاستیسیته و تحلیل دو بعدی بر پایه تئوری های مختلف است. تحلیل سه بعدی صفحه با استفاده از نظریه الاستیسیته سه بعدی اگر چه روشی دقیق محسوب میشود اما با سختی هایی همراه است. به منظور کاهش دشواری های ناشی از این نوع تحلیل تئوری موسوم به تئوری های صفحه بر پایه فرض کوچک بودن ضخامت نسبت به دیگر ابعاد ارائه شده اند. بر پایه کار انجام شده توسط لوسیانو[1] [۵- ۱] نظریه های صفحه به سه دسته اصلی تقسیم میشود: نظریه کلاسیک صفحه (CPT)[2]، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)[3] و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا[4](HSDT). در بین این تئوری ها، تئوری کلاسیک صفحه ساده ترین تئوری است که بر پایه فرضیات کیرشهف استوار است. کاربرد این تئوری برای صفحات نازک منجر به نتایج قابل قبولی میشود اما در ضخامت های بالاتر، خطا افزایش می یابد. به منظور کاهش خطا در تحلیل صفحات ضخیم، نظریه دیگری موسوم به نظریه تغییر شکل برشی ارائه شده است. مرتبه این تئوری ها که در آن اثر تغییر شکل برشی نیز در نظر گرفته می شود با توجه به تعداد جملات نگاه داشته شده در بسط میدان جابجایی در راستای ضخامت تعیین می‌شود. از آنجاییکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول شرط تنش صفر در سطوح بالایی و پایینی را نقص میکند. برای کم کردن خطای ناشی از آن به ضریب تصحیح برشی نیاز است. بدلیل اینکه تعیین ضریب تصحیح برشی راحت نیست و به منظور اجتناب ازآن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر که شامل تعداد متعددی تابع مجهول هستند بسط داده شده اند. پژوهشهایی که در زمینه رفتار برشی صفحات چند لایه انجام پذیرفته است این را نشان میدهد که جابجایی های درون صفحه ای بصورت تکه ای در راستای ضخامت هر لایه میباشد و شکل آن بصورت زیگزاگی میباشد . هرچند از امتیازات نظریه های مرتبه بالا، این است که به ضریب تصحیح برشی نیاز ندارد، ولی این نظریه ها قادر نمیباشند تغییرات زیگزاگ درون صفحه ای در راستای ضخامت را بخوبی تحلیل نماید. لذا برای رفع این ایراد، نظریه های مختلفی زیگزاگ ارائه

---

[1] Luciano
[2] Classical Plate Theory
[3] First Order Shear Deformation Theory
[4] Higher Order Shear Deformation Theory

شده است. [۶-۷]. پارامترهای مجهول در تئوری زیگزاگ همان پارامترهایی هستند که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه بالا بکار میرود با این تفاوت که متغیر زیگزاگ به میدان جابجایی های درون صفحه ای اضافه میشود. در تحقیق که انجام پذیرفته است بر پایه تئوری مرتبه های اول وسوم میباشدومیدان جابجایی رفتار کلی لایه ها و قسمت زیگزاگ رفتار بین لایه ها را به منظور برآورده کردن پیوستگی تنش برشی در نظر می گیرد جزئیات روش در بخشهای بعدی آورده شده است بدین منظور برنامه ای در محیط نرم افزار متلب تدوین شده است و با استفاده از آن نتایج بدست آمده از این روش با روشهای دیگر مقایسه شده است.

۲. فرمول بندی ریاضی برای یک ورق مستطیلی چند لایه ای :

یک صفحه مستطیلی با شرایط ابعاد $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$ و ضخامت $-h/2 \le z \le +h/2$ در نظر میگیریم. با توجه به توضیحات بالامعادله جابجایی در این نظریه را براساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_1(x,y) + \phi_1^{(k)}(z)\psi_1(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_2(x,y) + \phi_2^{(k)}(z)\psi_2(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{۱}$$

و همچنین معادله جابجایی این مدل براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بصورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_1(x,y) - \frac{4}{3h^3}z^3(\theta_1(x,y) + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + \phi_1^{(k)}(z)\psi_1(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_2(x,y) - \frac{4}{3h^3}z^3(\theta_2(x,y) + \frac{\partial w_0}{\partial y}) + \phi_2^{(k)}(z)\psi_2(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{۲}$$

که در رابطه (۱) و (۲) متغیرهای $u(x,y,z)$، $v(x,y,z)$ و $w(x,y,z)$ به ترتیب مولفه های جابجایی در جهات x، y و z میباشد همچنین θ_1 و θ_2 چرخش عمود بر صفحه میانی حول محورهای x و y بوده و ψ_1 و ψ_2 چرخش زیگزاگ میباشد. k به شماره لایه دلالت دارد ضخامت لایه k ام بوده و هریک از توابع $\phi_1^{(k)}$ و $\phi_2^{(k)}$ تابع زیگزاگ است که چنانچه در رابطه های مذکور دارای مقدار صفر باشد به معادله تغییر شکل برشی تبدیل میگردد. بنابراین کرنش ها بصورت زیر تعیین میگردد :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{1z} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{2z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{۳}$$

رابطه بین تنش و کرنش در مختصات دکارتی برای لایه k ام را بصورت زیر میتوان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{2z} \\ \tau_{1z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{2z} \\ \gamma_{1z} \end{bmatrix}^{(k)} \tag{۴}$$

که درآن $Q_{ij}^{(k)}$ و $C_{ij}^{(k)}$ اعضای ماتریس خواص مصالح میباشد.

۳. تابع زیگزاگ بهبود یافته و روابط ساختاری برشی عرضی :

تابع زیگزاگ بهبود یافته در این نظریه، توسط توابعی تکه تکه خطی با پیوستگی C^0 در راستای ضخامت هر لایه تعریف شده است. برای سهولت تعیین جابجایی های u_i و v_i توابع $\phi_1^{(k)}$ و $\phi_2^{(k)}$ بکار گرفته شده است:

$$\phi_1^{(k)} = 1/2(1-\zeta^{(k)})u_{(k-1)} + 1/2(1+\zeta^{(k)})u_{(k)} \tag{۵}$$

$$\phi_2^{(k)} = 1/2(1-\zeta^{(k)})v_{(k-1)} + 1/2(1+\zeta^{(k)})v_{(k)} \tag{۶}$$

که در آن $\zeta^{(k)} \in [-1,1]$ بوده طبق رابطه زیر تعیین میگردد:

$$\zeta^{(k)} = \frac{z - z_{k-1}}{h^k} - 1 \tag{۷}$$

برای شروع اولین لایه $z_{(0)}=-h$ و در آخرین لایه (لایه N ام) $z_{(N)}=h$ میباشد. لذا در انتهای لایه k ام بصورت $z_k = z_{(k-1)} + 2h^{(k)}$ میباشد که $2h^{(k)}$ ضخامت لایه kام است. بنابرفرض جابجایی در بالا و پایین سطح صفحه بایستی صفر باشد:

$$u_{(0)} = u_{(N)} = v_{(0)} = v_{(N)} = 0 \tag{۸}$$

از نتایج رابطه های (۵) و (۶) تابع $\beta_\alpha^{(k)}$ $(\alpha = 1,2)$ حاصل میشود :

$$\beta_1^{(k)} = \frac{1}{2h^{(k)}}(u_{(k)} - u_{(k-1)}) \tag{۹}$$

$$\beta_2^{(k)} = \frac{1}{2h^{(k)}}(v_{(k)} - v_{(k-1)}) \tag{۱۰}$$

در روابط کرنش برشی عرضی مربوط به رابط (۳) ، $\eta_\alpha = \gamma_\alpha - \psi_\alpha (\alpha = 1,2)$ بوده .چنانچه η_α را مقیاس کرنش بنامیم لذا رابطه زیر بدست می آید :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1+\beta_1^{(k)}) & 0 \\ 0 & (1+\beta_2^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \tag{۱۱}$$

در رابطه (۱۱) η_α در نظریه دای سووا به صراحت صرف نظر شده است [7]. بنابراین مقادیر γ_α و φ_α با هم برابر میشود ولی درحال حاضر چنین محدودیتی برای η_α تحمیل نشده است. از نتایج روابط (۴) و (۱۱) ، تنشهای عرضی بدست می آید:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{1z} \\ \tau_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1+\beta_1^{(k)}) & 0 \\ 0 & (1+\beta_2^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \right) \tag{۱۲}$$

و یا می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} + Q_{44}^{(k)}(1+\beta_1^{(k)}) \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{Q_{45}^{(k)}}{Q_{44}^{(k)}} \end{Bmatrix} \psi_1 + Q_{55}^{(k)}(1+\beta_2^{(k)}) \begin{Bmatrix} \frac{Q_{45}^{(k)}}{Q_{55}^{(k)}} \\ 1 \end{Bmatrix} \psi_1 \tag{۱۳}$$

در این شکل از تنش برشی عرضی ، جمله اول مقیاس کرنش η_α مستقل از تابع زیگزاگ است حال آنکه در جملات دوم و سوم ضرایب $Q_{44}^{(k)}(1+\beta_1^{(k)})$ و $Q_{55}^{(k)}(1+\beta_2^{(k)})$ به واسطه وجود $\beta_\alpha^{(k)}$ وابسته به تابع زیگزاگ میباشد بنابراین برای تابع ثابت $\beta_\alpha^{(k)}$ رابطه زیر را میتوان بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} \beta_1^{(k)} \\ \beta_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}} - 1 \\ \frac{G2}{Q^{(k)}55} - 1 \end{Bmatrix} \tag{۱۴}$$

جاییکه ضرایب G_1 و G_2 از رابطه زیر بدست می آید:

$$G_1=\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{dz}{Q_{44}^{(k)}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{Q_{44}^{(k)}}\right)^{-1} \quad (۱۵)$$

$$G2=\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{dz}{Q_{55}^{(k)}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{Q_{55}^{(k)}}\right)^{-1} \quad (۱۶)$$

و تابع زیگزاگ از رابطه های زیر بدست می آید:

$$\phi_1^{(k)}=(z+h)\left(\frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}}-1\right) \qquad k=1 \quad (۱۷)$$

$$\phi_2^{(k)}=(z+h)\left(\frac{G2}{Q_{55}^{(k)}}-1\right) \qquad k=1 \quad (۱۸)$$

$$\phi_1^{(k)}=(z+h)\left(\frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}}-1\right)+\sum_{i=2}^{k}2h^{(i-1)}\left(\frac{G_1}{Q_{44}^{(i-1)}}-\frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}}\right) \qquad k=2,\ldots,N \quad (۱۹)$$

$$\phi_2^{(k)}=(z+h)\left(\frac{G2}{Q_{55}^{(k)}}-1\right)+\sum_{i=2}^{k}2h^{(i-1)}\left(\frac{G2}{Q_{55}^{(i-1)}}-\frac{G2}{Q_{55}^{(k)}}\right) \qquad k=2,\ldots,N \quad (۲۰)$$

٤. معادلات حاکم و شرایط مرزی:

برای بدست آوردن معادلات و شرایط مرزی حاکم بر صفحه از اصل کار مجازی استفاده می کنیم که بصورت زیر تعریف میگردد:

$$\int(\delta U+\delta V-\delta K)dt=0 \quad (۲۱)$$

که در این رابطه δ بیانگر وردش نسبت به میدانهای جابجایی، U بیانگر انرژی کرنشی مجازی، V بیانگر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی و K بیانگرانرژی پتانسیل مجازی صفحه میباشد چنانچه معادلات تعادل طبق رابطه های زیر باشد:

$$N_{1,1}+N_{12,2}=0 \quad (۲۲)$$

$$N_{12,1}+N_{2,2}=0 \quad (۲۳)$$

$$Q_{1,1}+Q_{12,2}+q=0 \quad (۲۴)$$

$$M_{1,1}+M_{12,2}-Q_1=0 \quad (۲۵)$$

$$M_{12,1}+M_{2,2}-Q2=0 \quad (۲۶)$$

$$M^{\phi}{}_{1,1}+M^{\phi}{}_{12,2}-Q^{\phi}{}_1=0 \quad (۲۷)$$

$$M^{\phi}{}_{12,1}+M^{\phi}{}_{2,2}-Q^{\phi}2=0 \quad (۲۸)$$

لذا از نتایج روابط تشکیل دهنده سبب ایجاد نظریه جدیدی زیگزاگ شده که بصورت خلاصه ماتریس آن بصورت زیر میباشد:

$$\begin{Bmatrix}N_m\\M_b\\Q_s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B & 0\\B^T & D & 0\\0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_m\\e_b\\e_s\end{Bmatrix} \quad (۲۹)$$

۵. نتایج عددی :

یک ورق مستطیلی چند لایه ای بطول a ، عرض b و ضخامت 2h که بروی تکیه گاههای ساده قرار گرفته مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده در این نظریه ها یعنی نظریه زیگزاگ اصلاح شده مرتبه اول RFZT و نظریه زیگزاگ اصلاح شده مرتبه سوم RTZT برای یک صفحه چند لایه Cross Ply با دیگر روشها، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول FSDT ، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم TSDT و حل دقیق[۹] در جدول (۱) مقایسه شده است.

جدول۱- مقایسه نظریه مرتبه سه با تابع زیگزاگ بهبود یافته با دیگر نظریه ها

a/h	Theory	$\overline{w}$	$\overline{\sigma_{xx}}$	$\overline{\sigma_{yy}}$	$\overline{\sigma_{xy}}$	$\overline{\sigma_{yz}}$	$\overline{\sigma_{xz}}$
4	FSDT	2.363	0.613	0.0934	0.0409	0.0308	0.47
	TSDT	2.641	1.036	0.1028	0.0263	0.0348	0.605
	RFZT	2.648	1.081	0.1039	0.0263	0.0275	0.382
	RTZT	2.683	1.105	0.1062	0.0271	0.0298	0.362
	Exact	2.820	1.140	0.1090	0.0281	0.0334	0.351
10	FSDT	0.803	0.621	0.0375	0.0210	0.0159	0.473
	TSDT	0.862	0.692	0.0398	0.0115	0.0170	0.635
	RFZT	0.869	0.712	0.0401	0.0117	0.0135	0.430
	RTZT	0.901	0.719	0.0402	0.0119	0.0151	0.026
	Exact	0.919	0.726	0.0418	0.0123	0.0152	0.420
20	FSDT	0.578	0.623	0.0283	0.0177	0.0135	0.471
	TSDT	0.594	0.641	0.0289	0.0088	0.0139	0.640
	RFZT	0.596	0.646	0.0290	0.0091	0.0130	0.674
	RTZT	0.598	0.647	0.0291	0.0091	0.0125	0.432
	Exact	0.610	0.650	0.0294	0.0093	0.0119	0.434
100	FSDT	0.506	0.623	0.0253	0.0166	0.0127	0.474
	TSDT	0.507	0.624	0.0253	0.0083	0.0129	0.440
	RFZT	0.507	0.624	0.0253	0.0083	0.0121	0.438
	RTZT	0.507	0.624	0.0253	0.0083	0.0121	0.439
	Exact	0.508	0.624	0.0253	0.0083	0.0108	0.440

٦. نتیجه گیری

در این مقاله، نظریه زیگزاگ بهبود یافته در مورد صفحات چند لایه بر اساس نظریه تغییر شکل برشی ارائه شده است مجهولات این نظریه علاوه بر مجهولات نظریه تغییر شکل برشی ، متغییر چرخش زیگزاگ ψ_1 و ψ_2 نیز میباشد با این تفاوت که بر خلاف تئوری های ذکر شده مشخصات لایه ها در میدان جابجایی در نظر گرفته میشود و به ضریب اصلاح برشی نیاز ندارد. نتایج عددی بدست آمده از این دو مدل همگرایی خوبی برای ورقهای ضخیم که از دیگر تئوری های دیگر بدست آمده نشان میدهد.

۷. مراجع

1. Luciano D., 2009 , “ Mixed plated theories based on the generalized unified formulation ”, part 1 : governing equations , composite structures , 87(1) , 1-11
2. Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 2 : Layerwise theories, 87(1),12-22
3. Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 1 : 1:advanced mixed high order shear deformation theories, 87(3) , 183-94
4. Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 4 :zigzag theories , 87(3),195-205
5. Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 5 :result,88(1) , 1-16
6. M . Di Sciuva, 1983 , A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered orthtropic plates , proceeding of 7th aidaa national congress, 62,84-92
7. M . Di Sciuva , 1987, an improved shear deformation theory for moderately thick multilayer anisotropic shell and plates , ASME journal of applied Mechanics , 549-596
8. Alexander Tessler , Marco Di Scuiva , Refined Zigzag theory for laminated composite and sandwich plates , Nasa /TP-2009-215561
9. Pagano,N.J, Exact Solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, journal of composite materials , 4-20-34 (1970)

پیوست

هریک از ضرایب سختی در معادله (۲۹) از روابط زیر بدست می آید :

۱-ماتریس متقارن ۳×۳ $A = \lfloor A_{ij} \rfloor (i, j = 1-3)$

$$A = \int_{-h}^{h} C dz$$

۲-ماتریس غیر متقارن ۳×۷ $B = \lfloor B_{ij} \rfloor (i = 1-3, j = 1-7)$

$$B = \int_{-h}^{h} C B_{\phi} dz$$

۳-ماتریس متقارن ۷×۷ $D = \lfloor D_{ij} \rfloor (i, j = 1-7)$

$$D = \int_{-h}^{h} B_{\phi}^{T} C B_{\phi} dz$$

۴- ماتریس متقارن ۴×۴ $G = \lfloor G_{ij} \rfloor (i, j = 1-4)$

$$G = \int_{-h}^{h} B_{\beta}^{T} Q B_{\beta} dz$$

جاییکه هریک از ضرایب ثابت بصورت زیر میباشد :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{55} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^{(k)}$$

$$B_{\phi} = \begin{bmatrix} z & \phi_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & \phi_1^{(k)} & \phi_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$B_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_2^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1^{(k)} \end{bmatrix}$$

Code:ELEM101331163
331

همایش ملی پژوهش های کاربردی در برق، مکانیک و مکاترونیک

گواهینامه ارائه مقاله

بدین وسیله گواهی می شود مقاله با عنوان:

بررسی نظریه های زیگزاگ در تحلیل خمش صفحات مستطیلی چند لایه

نویسنده مسئول: علیرضا پهلوانی

نویسندگان همکار:

در دومین همایش ملی پژوهش های کاربردی در برق، مکانیک و مکاترونیک، مورخ ۱۳۹۳/۱۱/۳۰ در دانشگاه تهران، با حضور ایشان به صورت سخنرانی ارائه گردید.

توفیق روز افزون شما را در عرصه های علمی و اجرایی کشور عزیزمان، ایران آرزومندیم.

دکتر سیروس صمدی
دبیر علمی همایش

همایش ملی پژوهش های کاربردی در برق، مکانیک و مکاترونیک

دکتر حسن کریمی مزرعه شاهی
رئیس همایش

نشر حافظ www.hafzi.ir
حق چاپ محفوظ. شماره: ۲۰۷۳