



بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح در تحلیل ایزوژئومتریکی

بهروز حسنی^۱، مهدی توکلی^۲، حسین قاسم نژاد مقری^۳

۱- دانشیار دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

۲- استادیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳- دانشجوی دکتری مهندسی عمران، سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

hossein.ghasemnejad@yahoo.com

خلاصه

در این مقاله از روش ایزوژئومتریکی جهت تحلیل و طراحی توپولوژی سازه استفاده شده است. این روش در مقایسه با اجزا محدود معمول از توابع پایه نریز به جای توابع شکل متداول در برای تقریب هندسه و تغییر مکان استفاده می‌کند که این امر منجر به مدل سازی دقیق هندسه و حصول جواب‌های دقیقتر در مقایسه با اجزا محدود می‌شود. در این مقاله از این توابع برای تقریب تابع چگالی مصنوعی استفاده می‌شود و مقادیر بهینه چگالی مصالح در نقاط کنترلی به دست می‌آیند و در نهایت توپولوژی بهینه سازه حاصل می‌شود. جهت نشان دادن درستی روش مذکور مثال‌های متنوعی حل شده‌اند و نتایج آنها مورد بحث قرار گرفته‌اند.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی توپولوژی، روش ایزوژئومتریکی، روش مجانب‌های پویا

۱. مقدمه

روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای در سال‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی داشته‌اند. این نوع از بهینه‌سازی در واقع برای تعیین تعداد و محل سوراخ‌ها در شکل بندی سازه به کار می‌رود و معمولاً با بهینه‌سازی شکل جهت هموار سازی مرزها توام می‌شود. اگر چه پیدایش بهینه‌سازی توپولوژی به حداقل سازی وزن توسط مایکل [۱] برمی‌گردد، اما بعد از معرفی روش همگن سازی توسط بندسو و کیکوچی [۲] بود که این نوع از بهینه‌سازی بیش از پیش مورد توجه قرار گرفت.

برای حل مسائل بهینه‌سازی می‌توان از هر یک از روش‌های غیر خطی برنامه ریزی ریاضی استفاده نمود. علاوه بر داشتن کارایی لازم برای حل، با توجه به تعداد زیاد متغیرهای طراحی، کاربرد اکثر این روش‌ها در مسائل طراحی توپولوژی پر هزینه و زمان بر است. روش‌های معیار بهینگی^۴ (OC) که روش‌های غیرمستقیم بهینه‌سازی هستند جز کاراترین روش‌ها جهت حل این مسائل می‌باشند [۳] و در سال‌های گذشته بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از روش‌های دیگری مانند روش‌های تقریبی [۴] و روش کانلین [۵] نیز در برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی استفاده شده است. اما یکی از روش‌های بهینه‌سازی که بیشترین کاربرد را در این زمینه در سال‌های گذشته داشته است روش مجانب‌های پویا^۵ (MMA) [۶] است. این روش نشان داده که برای حل مسائل توپولوژی با متغیرهای طراحی زیاد می‌تواند بسیار کارا باشد [۷]. از این رو در مقاله حاضر از هر دو روش معیار بهینگی و مجانب‌های پویا استفاده شده است. دسته روش‌های دیگری مانند الگوریتم ژنتیک [۸] و لانه مورچگان [۹] را نیز می‌توان نام برد که در حل مسائل توپولوژی به کار

^۱ دانشیار دانشکده فنی و مهندسی

^۲ استادیار دانشکده عمران

^۳ دانشجوی دکتری مهندسی عمران، سازه

^۴ OC: Optimality Criteria

^۵ MMA: Method of Moving Asymptotes

رفته‌اند. همچنین روش‌هایی که کمتر مبتنی بر ریاضی بوده‌اند را نیز می‌توان بیان نمود. از این دست می‌توان به روش تکاملی بهینه‌سازی سازه‌ای [۱۰] اشاره نمود. اخیراً مروری بر روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی توسط روزوانی [۱۱] عرضه شده است. اکثر روش‌هایی که به آنها اشاره شد، روش‌های مبتنی بر المان هستند، که در آنها مقدار تابع چگالی در هر المان محدود ثابت است. روش‌های مبتنی بر گره اخیراً توسط بلیشکو و همکاران [۱۲] معرفی شده و همراه با روش‌های بدون مش [۱۳] در بهینه‌سازی توپولوژی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این روش‌ها چگالی‌های مواد در نقاط گرهی گسسته‌سازی تعیین می‌شوند. روش ارائه شده در این مقاله جز روش‌های مبتنی بر گره می‌باشد با این تفاوت که از نقاط کنترلی تحلیل ایزوژئومتریک به جای نقاط گرهی اجزا محدود استفاده می‌کند. تحلیل ایزوژئومتریک^۱ (IA) [۱۴] یک روش نسبتاً جدید تحلیل است که از تعمیم روش کلاسیک اجزا محدود حاصل شده و ویژگی‌های مشترک بسیاری با این روش دارد. این روش بیشتر مبتنی بر هندسه و ملهم از روش طراحی کامپوتری^۲ (CAD) است. هدف اصلی IA مدل‌سازی دقیق هندسه فارغ از اندازه مش بندی به کار رفته است. علاوه بر آن این روش نیاز به ارتباط با CAD را مرتفع می‌سازد. اما ایده اصلی این روش استفاده از توابع پایه یکسان برای مدل‌سازی هندسه و تقریب متغیر مجهول است. با توجه به برخی ویژگی‌های توابع پایه اسپلاین و نرئز، این توابع برای این منظور بسیار مناسب هستند.

در بهینه‌سازی توپولوژی، توزیع مناسب مقدار مشخصی مصالح در یک دامنه معین مورد جستجو قرار می‌گیرد. مقدار مصالح اختصاص یافته به هر نقطه از دامنه می‌تواند با یک تابع توزیع مصالح بیان شود. برخلاف روش‌های مبتنی بر المان که این توابع به صورت توابع ثابت در هر یک از المان‌های محدود هستند، در این مقاله توابع توزیع مصالح با استفاده از توابع نرئز روی کل دامنه تقریب زده می‌شوند و میان دو مقدار صفر برای نقاط بدون مصالح و یک برای نقاط پر شده توسط مصالح محدود می‌شوند. علاوه بر این مشابه روش SIMP^۳ [۱۵] جهت جلوگیری از تشکیل نقاط با مقادیر چگالی بینابین، از یک توان جریمه استفاده می‌شود. به بیان دیگر با این کار تابع توزیع مصالح مانند یک تابع فرضی روی دامنه سازه فرض می‌شود.

۲. تحلیل ایزوژئومتریک

در این روش از توابع پایه نرئز جهت انجام تحلیل سازه استفاده می‌شود. این توابع حالت خاصی از توابع پایه اسپلاین هستند که در مدل‌سازی هندسی کامپیوتری از ده سال پیش مورد استفاده قرار می‌گیرند. به کمک این توابع می‌توان مدل‌سازی هندسه را به طور دقیق انجام داد. ایده اصلی این روش این است که هر یک از مولفه‌های متغیرهای میدان که یک معادله دیفرانسیل حاکم را اقلان می‌کنند را به عنوان یک سطح توسط نرئز تصور می‌کند. می‌توان گفت ویژگی برجسته این روش این است که از توابع پایه نرئز هم برای تعریف هندسه و هم جهت تقریب متغیرهای مجهول استفاده می‌کند و از این جهت شباهت زیادی به ایده ایزوپارامتریک در اجزا محدود دارد.

روند تحلیل به روش ایزوژئومتریک شامل گام‌های زیر می‌شود. در ابتدا هندسه دامنه با استفاده از توابع پایه نرئز تولید می‌شود. گسسته‌سازی دامنه در این روش توسط نقاط کنترلی اسپلاینها انجام می‌شود. برای هندسه‌های پیچیده می‌توان از چند وصله نیز استفاده نمود. سپس هندسه و مولفه‌های تغییر مکان با استفاده از این توابع پایه تقریب زده می‌شوند. در مرحله بعد همانند اجزا محدود با پیروی از روشهای باقی مانده وزن دار یا روشهای حساب تغییراتی، مقادیر تقریب زده شده در روابط بدست آمده قرار داده می‌شوند و یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آید. با حل این دستگاه مقادیر تغییر مکان در نقاط کنترلی به دست می‌آیند. در ادامه یک معرفی اجمالی از توابع پایه بی اسپلاین و نرئز و نیز رابطه‌سازی متداول در تحلیل ایزوژئومتریک ارائه خواهد شد.

توابع بی اسپلاین کسری غیر یکنواخت^۴ (NURBS) ابزارهای استاندارد برای مدل‌سازی منحنی‌ها و سطوح در طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) هستند. در این بخش اجمالاً به شرح این توابع پرداخته می‌شود. یک تابع نرئز به صورت پارامتری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(r, s) = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{N_{i,p_1}(r) N_{j,p_2}(s) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} N_{k,p_1}(r) N_{l,p_2}(s) w_{k,l}}}{(1)}$$

که $P_{i,j}$ ، $(n_1+1) \times (n_2+1)$ نقطه کنترلی، $w_{i,j}$ وزن‌های مرتبط و $N_{i,p_1}(r)$ و $N_{j,p_2}(s)$ توابع پایه بی اسپلاین نرمال از درجه p_1 و p_2 هستند. i امین تابع بی اسپلاین از درجه p_1 ، که با $N_{i,p_1}(r)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

^۱ Isogeometric Analysis

^۲ CAD: Computer Aided Design

^۳ SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

^۴ NURBS: Non Uniform Rational B-Spline

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{if } r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p_1} = \frac{r-r_i}{r_{i+p_1}-r_i} N_{i,p_1-1}(r) + \frac{r_{i+p_1+1}-r}{r_{i+p_1+1}-r_{i+1}} N_{i+1,p_1-1}(r) \quad (2)$$

که $\mathbf{r} = \{r_0, r_1, \dots, r_{m_1}\}$ بردار گرهی و r_i دنباله ای غیر نزولی از اعداد حقیقی به نام گره هستند که مختصات فضای پارامتری منحنی ها را بیان می کنند. به همین طریق بردار گرهی $s = \{s_0, s_1, \dots, s_{m_2}\}$ نیز برای تعریف توابع پایه N_{j,p_2} برای جهت دیگر به کار می رود. دهانه $[r_0, r_{m_1}] \times [s_0, s_{m_2}]$ یک وصله را تشکیل می دهد. یک بردار گرهی به عنوان مثال در جهت Γ ، بردار باز خوانده می شود اگر اولین و آخرین گره ها به اندازه $P_1 + 1$ بار تکرار شوند. در این صورت تعداد گره ها برابر $m_1 = n_1 + p_1 + 1$ می باشد. همچنین دهانه $[r_i, r_{i+1}]$ یک دهانه گرهی نامیده می شود که می تواند در حداکثر $p_1 + 1$ تابع پایه $N_{i,p_1}(r)$ غیر صفر باشد که شامل توابع $N_{i-p_1,p_1}(r), \dots, N_{i,p_1}(r)$ است. جهت مطالعه بیشتر مرجع [۱۶] می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

در مقایسه با روش اجزا محدود در روش ایزوژنومتری یک ماتریس سختی به جای المان برای یک وصله تشکیل می شود. بعد از اسمبل کردن ماتریس های وصله های مختلف، ماتریس سختی کل بدست می آید. در واقع تمام تقریب زدن هندسه و تابع تغییر مکان در روی یک وصله و به صورت محلی انجام می شود. در این قسمت با استفاده از روشی مشابه اجزا محدود رابطه ماتریس سختی یک وصله ارائه می شود. مطابق رابطه (۱) می توان هندسه را با استفاده از توابع پایه بی اسپلاین تقریب زد. اگر عبارت کسری رابطه (۱) را با $R_{i,j}(r,s)$ نمایش دهیم، می توان مختصات نقاط روی وصله p را به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{x}^p(r,s) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(r,s) \mathbf{x}_{i,j}^p \quad (3)$$

با در نظر گرفتن تابع تغییر مکان به عنوان تابع مجهول، می توان تغییر مکان وصله $p = [u, v]$ به صورت زیر تقریب زد:

$$\mathbf{u}^p(r,s) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(r,s) \mathbf{u}_{i,j}^p \quad (4)$$

با استفاده از ویژگی تاثیر گذاری محلی توابع پایه نرئز می توان روابط بالا را برای هر $(r,s) \in [r_i, r_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ به صورت زیر باز نویسی نمود:

$$\mathbf{u}^p(r,s) = \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j R_{e,f}(r,s) \mathbf{u}_{e,f}^p = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^p(r,s) = \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j R_{e,f}(r,s) \mathbf{x}_{e,f}^p = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (6)$$

ماتریس کرنش تغییر مکان \mathbf{B} را می توان از معادلات اساسی زیر تشکیل داد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{U} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (7)$$

که \mathbf{D} ماتریس اپراتور دیفرانسیلی است. حال با انجام یکی از روش های معمول مانند روش کار مجازی، می توان ماتریس ضرایب را به آسانی تشکیل داد. اگر \mathbf{b} نشان دهنده نیروی پیکره و \mathbf{t} نیروی سطحی باشد، داریم:

$$\int_{V^p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{V^p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma^p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (8)$$

که V^p و Γ^p به ترتیب حجم و مرز وصله p هستند. در نهایت با جایگزینی $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta \mathbf{U}$ از (۷) و معادله $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ ، در (۸) و ساده کردن $\delta \mathbf{U}^T$ ، ماتریس ضرایب را می توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\mathbf{K}^p = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (9)$$

توجه شود که تمام روابط به دست آمده در فضای پارامتریک Γ, S به دست آمده اند. محاسبات عددی به دست آوردن ماتریس سختی (۹) مشابه روش اجزا محدود است. در این مقاله از روش انتگرال گیری گوس برای این کار استفاده می شود. به این ترتیب علاوه بر فضای فیزیکی و فضای پارامتری، فضای انتگرال گیری هم وجود دارد که در محدوده هر المان گرهی، یعنی $(r,s) \in [r_i, r_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ به صورت محلی تعریف می شود. توجه شود که روابط فوق به صورت مشابه برای تغییر مکان v نیز به دست می آیند.

۳. بهینه‌سازی توپولوژی

در این بخش کلیات انجام بهینه‌سازی توپولوژی از طریق توزیع مصالح بیان می‌شود. این مسئله به صورت پیدا کردن سخت‌ترین سازه ممکن با استفاده از مقدار مشخصی مصالح مطرح می‌شود. سازه دارای حداکثر سختی منجر به حداقل مقدار کار خارجی حاصل از میدان تغییر مکان حقیقی می‌شود. بنابراین مسئله بهینه‌سازی توپولوژی سازه با در نظر گرفتن کار خارجی حقیقی به عنوان تابع هدف به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & l(\mathbf{u}) \\ \text{subject to} \quad & \Omega_s \leq \bar{\Omega}_s \\ \text{and} \quad & \text{design restrictions} \end{aligned} \quad (10)$$

که \mathbf{u} میدان تغییر مکانی است که تعادل الاستیک سازه را بیان می‌کند. l کار خارجی و $\bar{\Omega}_s$ حد بالای مصالح است. Ω_s مقدار مصالح در هر تکرار است. $l(\mathbf{u})$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$l(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (11)$$

چنانچه پیشتر ذکر شد روش کار بر مبنای مسئله توزیع مصالح است. به عبارت دیگر هدف پیدا کردن بهترین نحوه توزیع مصالح است طوری که تابع هدف بهینه شود. بدین منظور یک تابع چگالی $\Phi(\mathbf{x})$ برای هر نقطه از دامنه طراحی تعریف می‌شود.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_s \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega / \Omega_s \end{cases} \quad (12)$$

در اینجا می‌توان ایده تقریب هندسه و تغییر مکان را به این تابع چگالی نیز تعمیم داد. تابع توزیع مصالح مذکور را می‌توان با استفاده از توابع نریز در محدوده وصله به صورت زیر تقریب زد:

$$\Phi^p(r, s) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(r, s) \Phi_{i,j}^p \quad (13)$$

که $\Phi_{i,j}^p$ نقاط کنترلی سطح نریز در وصله p هستند و می‌توانند به عنوان متغیر طراحی در مسئله بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گیرند. با بهره‌گیری از مفهوم SIMP، جهت جلوگیری از تشکیل نقاط متخلخل می‌توان از توان جریمه برای تشکیل ماتریس الاستیسیته مصالح مصنوعی استفاده نمود:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \Phi(\mathbf{x}) \rho^0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}) &= \Phi(\mathbf{x})^n \mathbf{C}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

که ρ^0 و \mathbf{C}^0 به ترتیب ماتریس‌های چگالی و الاستیسیته مصالح جامد هستند. در صورتی که از مقادیر چگالی نقاط کنترلی به عنوان متغیر طراحی استفاده شود، فرم گسسته مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min_{\Phi_{i,j}} \quad & l(\mathbf{u}) \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq \Phi_{i,j} \leq 1 \quad i=1, \dots, n_1, \quad j=1, \dots, n_2 \\ \text{and} \quad & \Omega_s \leq \bar{\Omega}_s \end{aligned} \quad (15)$$

مسئله (۱۵) از نظر تعداد متغیرهای طراحی مسئله بزرگی است. در این مسئله تعداد متغیرهای طراحی با تعداد پارامترهای تحلیل برابر است. بنابراین پیدا کردن الگوریتم بهینه‌سازی مناسب برای حل این مسئله اهمیت زیادی دارد. یکی از روش‌هایی که برای حل مسائل توپولوژی بسیار مورد استفاده قرار گرفته است روش معیار بهینگی [۱۷] است. نویسندگان این مقاله قبلاً به حل مسائل توپولوژی در ایزوژنومتری با استفاده از معیار بهینگی پرداخته‌اند [۱۸]. روش دیگری که بسیار مورد استفاده قرار گرفته است روش MMA [۶] است. در ادامه این روش به عنوان روش مورد استفاده در این مقاله تشریح می‌شود.

۴. الگوریتم مجانب‌های پویا (MMA)

روش مجانب‌های پویا (MMA) یک برنامه‌ریزی ریاضی است که برای طراحی توپولوژی بسیار مناسب است [۷]. در این روش برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار و غیر خطی، زیر مسئله‌های تقریبی ساده تری تولید می‌شود. این زیرمسئله‌ها تفکیک پذیر و محدب هستند و بر اساس اطلاعات

حساسیت در نقطه تکرار جاری و نقاط قبلی ساخته می‌شوند. در هر نقطه تکرار با استفاده از روش دوگان این زیر مسئله حل شده و جواب آن به عنوان نقطه تکرار بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این روش تقریب تابع F شامل n متغیر حقیقی $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ در اطراف نقطه تکرار \mathbf{x}^0 به شکل زیر می‌باشد:

$$F(\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{U_i - x_i} + \frac{s_i}{x_i - L_i} \right) \quad (16)$$

که مقادیر r_i و s_i به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\begin{aligned} \text{if } \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) > 0 \text{ then } r_i &= (U_i - x_i^0)^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \text{ and } s_i = 0, \\ \text{if } \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) < 0 \text{ then } r_i &= 0 \text{ and } s_i = -(x_i^0 - L_i)^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0), \end{aligned} \quad (17)$$

پارامترهای مثبت U_i و L_i مجانب‌های قائم تقریب‌های تابع F هستند که محدوده‌ای که تقریب این تابع می‌تواند جواب‌های معقول برای مسئله بهینه‌سازی تولید کند را کنترل می‌کنند. این مقادیر در هر تکرار براساس تاریخچه تکرار به روز می‌شوند.

توجه شود که در مسئله بهینه‌سازی مطرح شده در این مقاله حساسیت کارخارجی نسبت به متغیرهای طراحی همواره منفی است. با توجه به این نکته تقریب این تابع با الگوی MMA در نقطه تکرار k به شکل کلی زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min l(\mathbf{u}^k) - \sum_{i,j=1}^{n \times m=N} \frac{(\Phi_{i,j}^k - L_{i,j})^2}{(\Phi_{i,j} - L_{i,j})} \frac{\partial}{\partial \Phi_{i,j}} l(\mathbf{u}^k) \\ \text{subject to } 0 \leq \Phi_{i,j} \leq 1 \quad i, j = 1, \dots, N \\ \text{and } \Omega_s \leq \bar{\Omega}_s \end{aligned} \quad (18)$$

حل این مسئله با استفاده از روش دوگان امکان پذیر است. ابتدا باید تابع لاگراژین زیر نسبت به متغیرهای طراحی $i, j = 1, \dots, N$ $0 \leq \Phi_{i,j} \leq 1$ حداقل شود.

توجه شود که در مسئله بهینه‌سازی مطرح شده در این مقاله حساسیت کارخارجی نسبت به متغیرهای طراحی همواره منفی است. با توجه به این نکته تقریب این تابع با الگوی MMA در نقطه تکرار k به شکل کلی زیر خواهد بود:

$$L = l(\mathbf{u}^k) - \sum_{i,j=1}^{n \times m=N} \frac{(\Phi_{i,j}^k - L_{i,j})^2}{(\Phi_{i,j} - L_{i,j})} \frac{\partial}{\partial \Phi_{i,j}} l(\mathbf{u}^k) + \Lambda (\Omega_s - \bar{\Omega}_s) \quad (19)$$

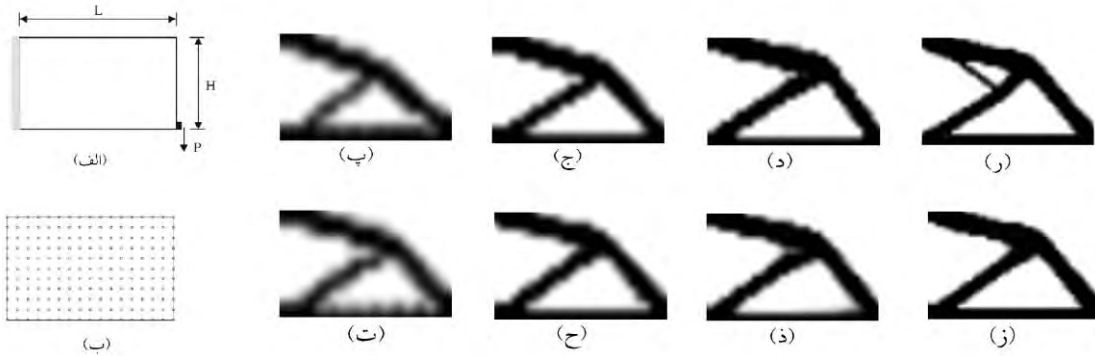
با توجه به محدب و تفکیک پذیر بودن L ، این مسئله بهینه‌سازی به آسانی به صورت متغیر به متغیر قابل حل است. در گام دوم روش دوگان تابع لاگراژین نسبت به Λ حداکثر می‌شود. این کار با تنظیم مقدار Λ به طوری که مقادیر $\Phi_{i,j}^{k+1}$ قید حجم را اقلان کنند، انجام می‌شود.

۵. مثال‌های عددی

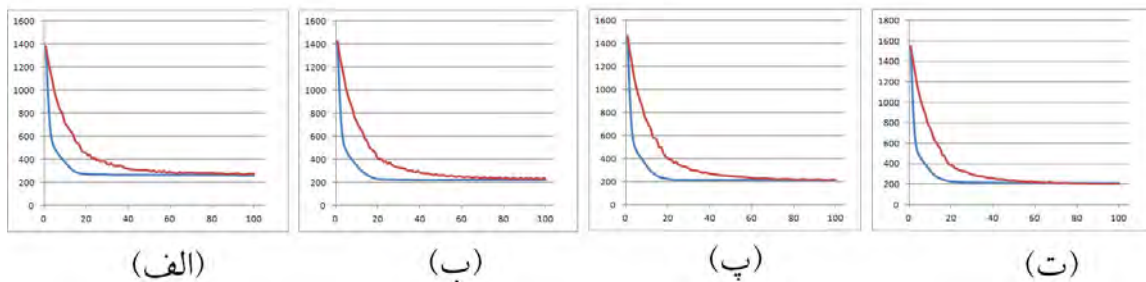
در این بخش برای نشان دادن کارایی روش مثال‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرند. مثال‌ها از کار قبلی نویسندگان [۱۸] انتخاب شده‌اند، که در آنها این مسائل با استفاده از روش معیار بهینگی حل شده‌اند. بنابراین با حل این مثال‌ها با استفاده از روش MMA در این مقاله امکان مقایسه نتایج وجود دارد. در تمامی مثال‌ها مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر 1500 kgf/cm^2 و 0.3 می‌باشند. مقدار ضریب جریمه $\mu = 3$ و درجه توابع پایه برابر $p_1 = p_2 = 2$ در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای طولی برابر $L = 8 \text{ cm}$ و $H = 5 \text{ cm}$ مقدار بار نقطه ای برابر $P = 100 \text{ kgf}$ می‌باشند.

مثال یک: در این مثال تاثیر نقاط کنترلی متفاوت در هر دو روش معیار بهینگی و مجانب‌های پویا مورد بررسی قرار گرفته است. یک تیر کنسول تحت یک بار متمرکز در گوشه انتهایی در نظر گرفته شده است (شکل ۱- الف). در تمام مش بندی‌ها بردارهای گرهی باز با فواصل مساوی در هر دو جهت مورد استفاده قرار می‌گیرند. درصد مصالح مورد استفاده در همه مصالح برابر $\Omega_s / \Omega_{total} = 40\%$ در نظر گرفته می‌شود. مش بندی‌های مورد استفاده در این مثال به ترتیب شامل ۱۸۷، ۴۰۰ نقطه کنترلی، ۴۰ وصله با ۱۰۹۳ نقطه و در نهایت ۹۶ وصله با ۱۶۱۷ نقطه کنترلی می‌باشد. نتایج به ترتیب برای MMA در شکل‌های ۱- پ تا ۱- ر و برای OC در ۱- ت تا ۱- ز نشان داده شده‌اند. چنانچه مشاهده می‌شود، در تمام موارد بالا نتایج به دست آمده از MMA بسیار مشابه نتایج حاصل از OC است. همچنین با افزایش تعداد نقاط کنترلی چه در حالت یک وصله و چه تعداد بیشتر وصله‌ها، ترکیب‌های

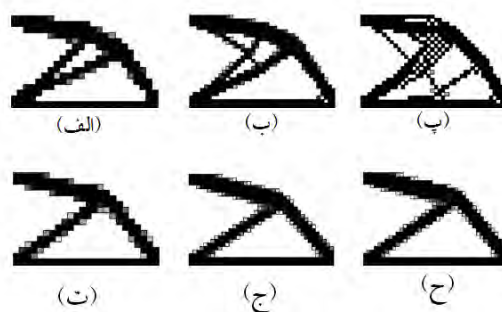
به دست آمده دارای نقاط خاکستری کمتری هستند. به علاوه مشاهده می شود که در بیشتر نتایج به دست آمده با گسسته سازی های متفاوت یکی است. تنها در شکل ۱- ر است که نتیجه به دست آمده از روش MMA تفاوت کمی با بقیه شکل ها دارد. این موضوع، یعنی وابسته بودن نتیجه بهینه سازی به نحوه مش بندی یکی از مباحث مهم و مورد توجه در بحث بهینه سازی توپولوژی به روش توزیع مصالح است. شکل ۲ تاریخچه تکرار انرژی کرنشی مربوط به این مثال را نشان می دهد. چنانچه مشاهده می شود در تمام موارد روند همگرایی تابع هدف، یعنی انرژی کرنشی در روش مبتنی بر MMA بهتر بوده است. به علاوه با افزایش تعداد نقاط کنترلی، مقادیر بهتری برای این تابع حاصل شده است.



شکل ۱- تیر کنسول کوتاه (الف) تعریف مسئله (ب) شبکه نقاط کنترلی با ۱۸۷ نقطه (پ) و (ت) توپولوژی بهینه با ۱۸۷ (ج) و (ح) ۴۰۰ (د) و (ذ) ۶۹۳ و (ر) و (ز) ۱۶۱۷ نقطه کنترلی به ترتیب از MMA و OC



شکل ۲- تاریخچه تکرار برای تیر کنسول کوتاه (الف) ۱۸۷ (ب) ۴۰۰ (پ) ۶۹۳ (ت) ۱۶۱۷ نقطه کنترلی

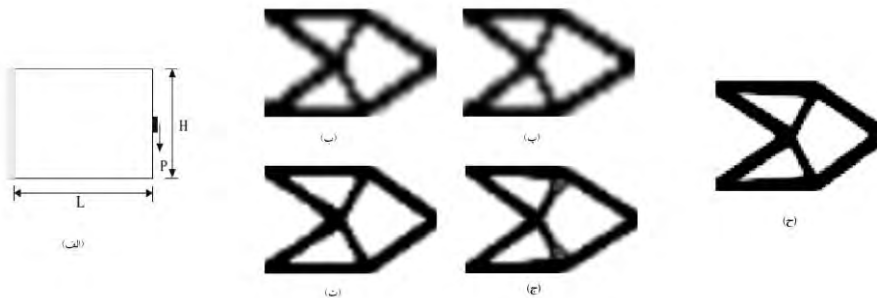


شکل ۳- SIMP با اجزا محدود (الف) ۳۸۴ و (ب) ۱۰۰۰ المان هشت گرهی (ج) المان چهار گرهی (ت و ج و ح) انجام تکنیک حذف نويز

جهت مقایسه روش ها، این مسئله در اینجا دوباره با استفاده از روش SIMP مبتنی بر اجزا محدود حل می شود. بدین منظور از مش هایی با ۳۸۴ و ۱۰۰۰ المان استفاده شده است که نتایج آنها به ترتیب در شکل های ۳- الف و ۳- ب نشان داده شده اند. مشاهده می شود که نتایج متفاوت است. به علاوه حل این مسئله با استفاده از المان چهار گرهی نیز منجر به ناپایداری ایجاد نقاط شطرنجی می شود که در شکل ۳- ج مشاهده می شود. چنانچه پیشتر ذکر گردید این موضوعات به عنوان یکی از مشکلات ناپایداری شناخته شده در این روش مطرح می باشد. خوانندگان برای مطالعه بیشتر در این مورد می توانند به مرجع [۱۹] این مقاله مراجعه نمایند. در میان روش های مختلفی که برای مرتفع ساختن این ناپایداری ها وجود دارد، استفاده از تکنیک حذف

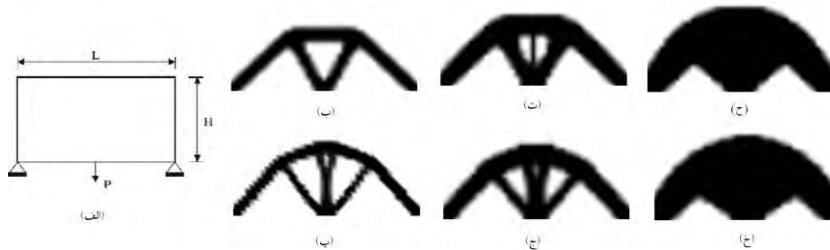
نویز که توسط بندسو و زیگموند [۷] پیشنهاد شد، منجر به پاسخ هایی می شود که برای هر یک از مش های نام برده شده به ترتیب در شکل های ۳- تا ۳- ح نشان داده شده است. توجه شود که توپولوژی حاصله برای همه مش بندی های مختلف یکسان بوده و در واقع مطابق با نتایج به دست آمده از ایزوژئومتریک (شکل ۱) می باشد.

مثال دو: در این مثال توانایی این روش در یافتن توپولوژی بهینه و تاثیر تعداد نقاط کنترلی مورد بررسی قرار می گیرد. بدین منظور دو مش کنترلی جداگانه با ۴۰۰ و ۱۶۱۷ نقطه کنترلی برای گسسته سازی دامنه و تابع چگالی مصالح به کار رفته اند. هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی در شکل ۴- الف نشان داده شده اند. درجه توابع پایه نریز برابر ۲ لحاظ می شود. نتایج حاصله از روش MMA در شکل های ۴- (ب و ت) نشان داده شده اند. شکل ۴- (پ و ج) نتایج OC را نشان می دهند. مشاهده می شود که نتایج یکسان است. علاوه بر این بار دیگر می بینیم که تعداد مش به کار رفته نتایج را تغییر نداده است. طراحی بهینه حاصل توسط زیگموند از مرجع [۲۰] به روش SIMP در شکل ۴- ج نشان داده شده است.



شکل ۴- (الف) هندسه اولیه، نتایج (ب) و (ت) MMA و (پ) و (ج) OC به ترتیب ۴۰۰ و ۱۶۱۷ نقطه کنترلی (ح) نتیجه SIMP

مثال سه: حد مصالح مورد استفاده در طراحی بر طرح به دست آمده موثر است. در این مثال این موضوع را با استفاده از یک تیر کوتاه با سه کسر حجمی مختلف ۲۰٪، ۳۰٪ و ۵۰٪ بررسی خواهیم نمود. دامنه طراحی به همراه شرایط تکیه گاهی و بارگذاری در شکل ۵- الف نشان داده شده است. برای این تیر ۹۶ وصله با ۱۶۱۷ نقطه کنترلی جهت گسسته سازی به کار رفته است و درجه تابع پایه نریز نیز برابر ۲ منظور شده است. نتایج این مثال نیز در شکل ۶ نشان داده شده اند. شکل های ۵- (ب و ت و ج و خ) نتایج مربوط به MMA و شکل های ۵- (پ و ج و خ) نتایج روش OC را نشان می دهند. تفاوت بین روش های مورد استفاده در این روش بهتر مشهود است. این تفاوت علاوه بر مرزها در توپولوژی های به دست آمده نیز نمایان است. با اضافه شدن مقدار کسر حجمی آیین اختلاف کمتر می شود.



شکل ۵- (الف) هندسه اولیه، نتایج با (ب و پ) ۲۰٪ (ت و ج) ۳۰٪ و (ح و خ) ۵۰٪ مصالح، به ترتیب MMA و OC

۱۰. نتیجه گیری

در این مقاله برای انجام بهینه سازی توپولوژی روشی برای توزیع مصالح اتخاذ شده است که بر مبنای تقریب تابع چگالی مصالح مصنوعی با استفاده از توابع پایه نریز در روی دامنه طراحی استوار است. همچنین روش تحلیل ایزوژئومتریک برای مسائل مسطح به کار رفته است. برخلاف روش های مبتنی بر اجزا محدود، در تحلیل ایزوژئومتریک نقاط کنترلی تابع توزیع مصالح که می تواند به صورت سطح فرضی در نظر گرفته شود به عنوان متغیر طراحی مسئله بهینه سازی لحاظ می شود. از این رو به نظر می رسد مسئله وابستگی به مش بندی در این گونه مسائل وجود ندارد. مثال های حل شده در این مقاله نیز این موضوع را تایید می کنند. هرچند در یکی از موارد استثنا هم وجود دارد. اما به طور کلی می توان گفت پاسخ تا حد زیادی مستقل از مش بندی است. با این حال این موضوع در مراحل اولیه پژوهش است و به نظر می رسد نیازمند مطالعات بیشتری در این زمینه باشد. علاوه بر این با مشاهده نتایج



مثال‌های حل شده ملاحظه می‌شود نتایج به دست آمده از روش‌های معیار بهینگی و مجانب‌های پویا مشابه هم هستند. در هر دو روش با افزایش تعداد نقاط کنترلی جوابهای بهتری حاصل شده است. با توجه به نتایج مثال‌های عددی حل شده، کار برد روش مجانب‌های پویا به جای معیار بهینگی باعث افزایش چشمگیر سرعت همگرایی پاسخ شده است. در عین حال تأثیری در بهبود پاسخ نداشته است و در هر دو حالت بهبود پاسخ و کمتر شدن نقاط خاکستری تنها با افزایش تعداد نقاط کنترلی حاصل می‌شود.

۱۲. مراجع

1. Michell, A. G. M, (1904),“ The limits of economy of material in frame structures”, Philos Mag 8:305–316
2. Bendsoe, M. P, Kikuchi, N. (1988),“Generating optimal topologies in structural design using homogenization,”Comput Methods Appl Mech Eng 71:197-224.
3. Rzvany, G. I. N. (1989),“Structural design via optimality criteria,”Kluwer, Dordrecht
4. Schmit, L. A, Farsi, B. (1974),“Some approximation concepts for structural synthesis,” AIAA J 12(5):692–699
5. Fleury, C. (1989),“CONLIN: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts, ” Struct Multidisc Optim 1:81-89
6. Svanberg, K (1987), “The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, ” Int J Numer Methods Eng 24:359–373
7. Bendsoe, M. P, Sigmund, O. (2003) “*Topology Optimization Theory, Methods and application*, ” Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag
8. Kane, C, Schoenauer, M. (1996) “Topological optimum design using genetic algorithms, ” Control Cybernetics (Special Issue on Optimum Design 25(5):1059–1088
9. Kaveh, A, Hassani, B, Shojaee, S, Tavakkoli, S. M. (2008) “Structural topology optimization using ant colony methodology, ” Eng Struct 0(9):2559–2565
10. Xie, Y. M, Steven, G. P. (1993) “A simple evolutionary procedure for structural optimization, ” Comput Struct 885–896
11. Rozvany, G. I. N, (2010) “A critical review of established methods of structural topology optimization, ” Struct Multidisc Optim 37:217–237
12. Belytschko, T, Xiao, S. P, Parimi, C. (2003) “optimization with implicit functions and regularization, ” Int J Numer Methods Eng 57:1177–1196
13. Zhou, J. X, Zou, W. (2008),“Meshless approximation combined with implicit topology description for optimization of continua,” Struct Multidisc Optim 36:347–353
14. Hughes, T. R, Cottrell, J. A, Bazilevs, Y. (2005),“Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement,” Comput Methods Appl Mech Eng 194:4135–4195
15. Rozvany, G. I. N, Zhou, M, Birker, T, (1992),“Generalized shape optimization without homogenization,” Struct Optim 4:250–254
16. Piegl, L, Tiller, W, (1997),“*The NURBS book*,” Springer, New York Tech Science Press, USA
17. Rozvany, G. I. N, (1989),“*design via optimality criteria*, ” Kluwer, Dordrecht
18. Hassani, B, Khanzadi, M, Tavakkoli, S. M, (2012),“An isogeometric approach to structural topology optimization by optimality criteria,” Struct Multidisc Optim 45:223-233
19. Hassani, B, Hinton, E, (1999),“*Homogenization and structural topology optimization: theory, practice and software*,” Springer, London
20. Sigmund, O, (2001),“A 99 line topology optimization code written in MATLAB,” Struct Multidisc Optim 21:120–127