ISME2015-XXXX

تحلیل خمش صفحات چند لایه ای مستطیلی بر مبنای نظریه زیگزاگ بهبود یافته

علیرضا پهلوانی[1] ، بهروز حسنی[2]

[1]دانشجوی کارشناسی ارشد ، گروه مکانیک ، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد
[2]استاد ، گروه مکانیک ، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

نظریه زیگزاگ بهبود یافته[1] در مورد صفحات چند لایه براساس نظریه تغییر شکل مرتبه اول ارائه شده است که برپایه این فرضیات، معادلات و شرایط مرزی حاکم بر خمش صفحات با استفاده از اصل کار مجازی استخراج شده و روش تحلیلی برای حل این معادلات معرفی شده است. در تئوری زیگزاگ بهبود یافته نیازی به ضریب تصحیح برشی که در تئوری مرتبه اول بکار رفته است ندارد و براساس این تئوری، منجر به تغییرات سهموی تنش برشی عرضی در امتداد ضخامت میشود بطوریکه شرایط سطح تنش برشی آزاد را برآورده می کند. در واقع وجود توابع زیگزاگ تکه تکه خطی در این نظریه، نمایش واقعی تری از کمیت های مهم طراحی مانند تغییر شکل ها و تنش ها نسبت به دیگر نظریه های لایه معادل (ESL)[2] نشان می دهد. با بکارگیری روش فوق و به منظور حل مسئله نمونه، خمش یک صفحه چند لایه مورد تحلیل قرار گرفته است و پس از اعتبار سنجی نتایج آن بر روی نمودار ارائه شده است.

واژه های کلیدی

خمش صفحات چند لایه ای، نظریه زیگزاگ بهبود یافته، حل تحلیلی

مقدمه

ساختارهای جدارهای نازک به شکل پوسته و صفحه در صنایع مختلف از جمله کشتی سازی، هوافضا، راکتورها و در شاخه های مختلف مهندسی از جمله مهندسی مکانیک و هوافضا کاربرد دارد . این کاربرد گسترده صفحات ناشی از خصوصیات ذاتی آنهاست در صورت طراحی مناسب، حتی صفحات نازک قادر به تحمل بارهای سنگین هستند به همین دلیل صفحات بخصوص در سفینه ها و فضاپیماها که در آن وزن کم، اهمیت فراوان دارد، دارای کاربرد گسترده ای هستند. برای مطالعه رفتار مکانیکی صفحات، روشهای متنوعی ارائه شده است این روش ها شامل تحلیل سه بعدی رفتار صفحه با استفاده از تئوری الاستیسیته و تحلیل دو بعدی بر پایه تئوری های مختلف است. تحلیل سه بعدی صفحه با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی اگر چه روشی دقیق محسوب میشود اما با سختی هایی همراه است. به منظور کاهش دشواری های ناشی از این نوع تحلیل تئوری موسوم به تئوری های صفحه بر پایه فرض کوچک بودن ضخامت نسبت به دیگر ابعاد ارائه شده اند. در تمامی تئوری های ارائه شده، تحلیل صفحه در دو بعد و بسط میدان جابجایی در راستای ضخامت انجام می پذیرد با اضافه کردن تعداد جملات کافی بسط میدان جابجایی در راستای ضخامت میتوان دقت این تئوری را افزایش داد. بر پایه کار انجام شده توسط لوسیانو[3] [۵- ۱] نظریه های صفحه به سه دسته اصلی تقسیم میشود: نظریه کلاسیک صفحه (CPT)[4]، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)[5] و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا(HSDT)[6]. در بین این تئوری ها، تئوری کلاسیک صفحه ساده ترین تئوری است که بر پایه فرضیات کیرشهف استوار است. کاربرد این تئوری برای صفحات نازک منجر به نتایج قابل قبولی میشود اما در ضخامت های بالاتر، منجر به خطا است. در نتیجه تئوری کلاسیک صفحه برای تحلیل صفحات ضخیم از دقت مناسب برخوردار نمی باشد به منظور کاهش خطا در تحلیل صفحات ضخیم، نظریه دیگری موسوم به نظریه تغییر شکل برشی ارائه شده است مرتبه این تئوری ها که در آن اثر تغییر شکل برشی نیز در نظر گرفته می شود با توجه به تعداد جملات نگاه داشته شده در بسط میدان جابجایی در راستای ضخامت تعیین می‌شود. از آنجاییکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول شرایط تعادل را در سطوح بالایی و پایینی نقص میکند برای کم کردن خطای ناشی از فرض کرنش برشی ثابت در امتداد ضخامت که منجر به توزیع تنش برشی ثابت

[1] Refined Zigzag Theory
[2] Equivalent Single Layer
[3] Luciano
[4] Classical Plate Theory
[5] First Order Shear Deformation Theory
[6] Higher Order Shear Deformation Theory

در این امتداد میشود به ضریب تصحیح برشی نیاز است بدلیل اینکه تعیین ضریب تصحیح برشی راحت نیست و به منظور اجتناب از کاربرد آن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر که شامل تعداد متعددی تابع مجهول هستند بسط داده شده اند. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا، بدلیل اینکه رفتار کلی صفحه چند لایه ای را بدرستی در نظر میگیرد، جوابهای قابل قبولی را بدست می آورد هرچند برای صفحات که لایه بندی نامتقارن و کلی دارند، جوابهای رضایت بخشی نمی دهند. برای رفع این مشکل دای سووا[1]، نظریه را بنام نظریه زیگزاگ پیشنهاد داد[۶-۷]. پارامترهای مجهول در تئوری زیگزاگ همان پارامترهایی هستند که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه بالا بکار میرود عیب دیگری که تئوری مرتبه بالا آن را در نظر نمی گیرد پیوستگی تنش برشی در سطح تماس لایه ها می باشد که در تئوری زیگزاگ این شرط بر آورده شده است. در واقع در این نظریه، متغیر خطی، متغیر خطی زیگزاگ به میدان جابجایی برای جابجایی های درون صفحه اضافه شده است در این نظریه که بر پایه تئوری مرتبه اول میباشد میدان جابجایی رفتار کلی لایه ها و قسمت زیگزاگ رفتار بین لایه ها را به منظور برآورده کردن پیوستگی تنش برشی در نظر می گیرد بدین منظور برنامه ای در محیط نرم افزار متلب تدوین شده است جزئیات روش در بخشهای بعدی آورده شده است در نهایت نتایج عددی بدست آمده از این روش با روشهای دیگر مقایسه شده است.

فرمول بندی ریاضی برای یک ورق مستطیلی چند لایه ای

یک صفحه چند لایه ای با ضخامت 2h که از N لایه تشکیل شده است مورد بررسی قرار گرفته است. چنانچه مختصات کارتزین (x,y,z) را برای این صفحه در نظر بگیریم و z مختصات در راستای ضخامت باشد بطوریکه z =0 برصفحه میانی قرار گرفته باشد معادله حاکم جابجایی بصورت زیر تعریف میشود:

$$U^{(k)}(x,y,z)=u(x,y)+z\theta_1(x,y)+\phi_1^{(k)}(z)\varphi_1(x,y) \qquad (۱)$$

$$V^{(k)}(x,y,z)=V(x,y)+z\theta_2(x,y)+\phi_2^{(k)}(z)\varphi_2(x,y) \qquad (۲)$$

$$W^{(k)}(x,y,z)=w(x,y) \qquad (۳)$$

جاییکه $U^{(k)}$ ، $V^{(k)}$ و $W^{(k)}$ به ترتیب مولفه های جابجایی در جهات x ، y و z میباشد k به شماره لایه دلالت دارد که ضخامت لایه k ام بوده و هریک از توابع $\phi_1^{(k)}$ و $\phi_2^{(k)}$ تابع زیگزاگ است که چنانچه در روابط (۱) و (۲) دارای مقدار صفر باشد رابطه مزبور به معادله مرتبه اول تبدیل میشود و φ_1 و φ_2 چرخش زیگزاگ میباشد که بایستی تعیین شود .بنابراین میتوان کرنش ها را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\varepsilon_{11}^{(k)}=u_{,1}+z\theta_{1,1}+\phi_1^{(k)}\varphi_{1,1} \qquad (۴)$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)}=v_{,2}+z\theta_{2,2}+\phi_2^{(k)}\varphi_{2,2} \qquad (۵)$$

$$\gamma_{12}^{(k)}=u_{,2}+v_{,1}+z(\theta_{1,2}+\theta_{2,1})+\phi_1^{(k)}\varphi_{1,2}+\phi_2^{(k)}\varphi_{2,1} \qquad (۶)$$

$$\gamma_{\alpha z}^{(k)}=\gamma_\alpha+\beta_\alpha^{(k)}\varphi_\alpha \qquad (\alpha=1,2) \qquad (۷)$$

دررابطه (۶) و (۷) ، γ_α زاویه برش است که در طول ضخامت هر لایه ثابت میباشد و $\beta_\alpha^{(k)}$ تابعی ثابت، که در امتداد ضخامت هر لایه بصورت جداگانه تقسیم شده است.

رابطه بین تنش و کرنش در مختصات کارتزین برای لایه k ام بصورت زیر میتوان نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\\ \tau_{2z}\\ \tau_{1z}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{16}&0&0\\ Q_{12}&Q_{22}&Q_{26}&0&0\\ Q_{16}&Q_{26}&Q_{66}&0&0\\ 0&0&0&Q_{55}&Q_{45}\\ 0&0&0&Q_{45}&Q_{44}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{2z}\\ \gamma_{1z}\end{bmatrix}^{(k)} \qquad (۸)$$

که در $Q_{ij}^{(k)}$ ضریب سختی انتقال یافته میباشد.

تابع زیگزاگ بهبود یافته و روابط ساختاری برشی عرضی

تابع زیگزاگ بهبود یافته در این نظریه، توسط توابعی تکه تکه خطی با پیوستگی C^0 در راستای ضخامت هر لایه مطابق شکل (۱) تعریف شده است. برای سهولت تعیین جابجایی های u_i و v_i توسط توابعی مشخص $\phi_1^{(k)}$ و $\phi_2^{(k)}$ بکار گرفته شده است:

$$\phi_1^{(k)}=1/2(1-\zeta^{(k)})u_{(k-1)}+1/2(1+\zeta^{(k)})u_{(k)} \qquad (۹)$$

$$\phi_2^{(k)}=1/2(1-\zeta^{(k)})v_{(k-1)}+1/2(1+\zeta^{(k)})v_{(k)} \qquad (۱۰)$$

جاییکه $\zeta^{(k)}\in[-1,1]$ بوده طبق رابطه زیر تعیین میگردد:

$$\zeta^{(k)}=\frac{z-z_{k-1}}{h^k}-1 \qquad (۱۱)$$

برای شروع اولین لایه $z_{(0)}=-h$ و در آخرین لایه (لایه N ام) $z_{(N)}=h$ میباشد لذا در انتهای لایه k ام بصورت $z_k=z_{(k-1)+2h^{(k)}}$ میباشد که $2h^{(k)}$ ضخامت لایه kام است بنابرفرض جابجایی های بین لایه ای در بالا و پایین سطح صفحه بایستی صفر باشد:

[1] Di Scuvia

$$u_{(0)} = u_{(N)} = v_{(0)} = v_{(N)} = 0 \quad (۱۲)$$

از نتایج رابطه های (۹)و (۱۰) تابع $\beta_\alpha^{(k)}$ حاصل میشود :

$$\beta_1^{(k)} = \frac{1}{2h^{(k)}}(u_{(k)} - u_{(k-1)}) \quad (۱۳)$$

$$\beta_2^{(k)} = \frac{1}{2h^{(k)}}(v_{(k)} - v_{(k-1)}) \quad (۱۴)$$

در روابط کرنش برشی عرضی مربوط به روابط (۴) تا (۷) ، $\eta_\alpha = \gamma_\alpha - \varphi_\alpha$ بوده .چنانچه η_α را مقیاس کرنش بنامیم لذا رابطه زیر بدست می آید :

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix}\eta_x\\ \eta_y\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}(1+\beta_1^{(k)}) & 0\\ 0 & (1+\beta_2^{(k)})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{Bmatrix} \quad (۱۵)$$

در رابطه فوق γ_α در نظریه دای سووا به صراحت صرف نظر شده است [7] .بنابراین مقادیر γ_α و φ_α با هم برابر میشود ولی درحال حاضر چنین محدودیتی برای η_α تحمیل نشده است . از نتایج روابط (۸) و (۱۵) ، تنشهای عرضی بدست می آید :

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}Q_{44} & Q_{45}\\ Q_{45} & Q_{55}\end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}(1+\beta_1^{(k)}) & 0\\ 0 & (1+\beta_2^{(k)})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{Bmatrix}\right) \quad (۱۶)$$

و یا می‌توان بصورت زیر بیان نمود :

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}Q_{44} & Q_{45}\\ Q_{45} & Q_{55}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Bmatrix} + Q_{44}^{(k)}(1+\beta_1^{(k)})\begin{Bmatrix}1\\ \dfrac{Q_{45}^{(k)}}{Q_{44}^{(k)}}\end{Bmatrix}\varphi_1 + Q_{55}^{(k)}(1+\beta_2^{(k)})\begin{Bmatrix}\dfrac{Q_{45}^{(k)}}{Q_{55}^{(k)}}\\ 1\end{Bmatrix}\varphi_1 \quad (۱۷)$$

در این شکل از تنش برشی عرضی ، جمله اول مقیاس کرنش η_α مستقل از تابع زیگزاگ است حال آنکه در جملا دوم و سوم ضرایب $Q_{44}^{(k)}(1+\beta_1^{(k)})$ و $Q_{55}^{(k)}(1+\beta_2^{(k)})$ به واسطه وجود $\beta_\alpha^{(k)}$ وابسته به تابع زیگزاگ میباشد بنابراین برای تابع ثابت $\beta_\alpha^{(k)}$ رابطه زیر را میتوان بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix}\beta_1^{(k)}\\ \beta_2^{(k)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{G_1}{Q_{44}^{(k)}} - 1\\ \dfrac{G2}{Q55} - 1\end{Bmatrix} \quad (۱۸)$$

جاییکه ضرایب G_1 و G_2 از رابطه زیر بدست می آید:

$$G_1 = \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{dz}{Q_{44}^{(k)}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{Q_{44}^{(k)}}\right)^{-1} \quad (۱۹)$$

$$G2 = \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{dz}{Q_{55}^{(k)}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{Q_{55}^{(k)}}\right)^{-1} \quad (۲۰)$$

و تابع زیگزاگ از رابطه های زیر بدست می آید:

$$\phi_1^{(k)} = (z+h)\left(\frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}} - 1\right) \qquad k=1 \quad (۲۱)$$

$$\phi_2^{(k)} = (z+h)\left(\frac{G2}{Q_{55}^{(k)}} - 1\right) \qquad k=1 \quad (۲۲)$$

$$\phi_1^{(k)} = (z+h)\left(\frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}} - 1\right) + \sum_{i=2}^{k} 2h^{(i-1)}\left(\frac{G_1}{Q_{44}^{(i-1)}} - \frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}}\right) \qquad k = 2,\ldots,N \quad (۲۳)$$

$$\phi_2^{(k)} = (z+h)\left(\frac{G2}{Q_{55}^{(k)}} - 1\right) + \sum_{i=2}^{k} 2h^{(i-1)}\left(\frac{G2}{Q_{55}^{(i-1)}} - \frac{G2}{Q_{55}^{(k)}}\right) \qquad k = 2,\ldots,N \quad (۲۴)$$

معادلات حاکم و شرایط مرزی

برای بدست آوردن معادلات و شرایط مرزی حاکم بر صفحه از اصل کار مجازی استفاده می کنیم که بصورت زیر تعریف میگردد:

$$\int(\delta U + \delta V - \delta K)dt = 0 \quad (۲۵)$$

که در این رابطه δ بیانگر وردش نسبت به میدانهای جابجایی، U بیانگر انرژی کرنشی مجازی، V بیانگر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی و K بیانگرانرژی پتانسیل مجازی صفحه میباشد چنانچه معادلات تعادل طبق رابطه های زیر باشد:

$$N_{1,1} + N_{12,2} = 0 \qquad (۲۶)$$

$$N_{12,1} + N_{2,2} = 0 \qquad (۲۷)$$

$$Q_{1,1} + Q_{12,2} + q = 0 \qquad (۲۸)$$

$$M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 = 0 \qquad (۲۹)$$

$$M_{12,1} + M_{2,2} - Q2 = 0 \qquad (۳۰)$$

$$M^{\phi}{}_{1,1} + M^{\phi}{}_{12,2} - Q^{\phi}{}_1 = 0 \qquad (۳۱)$$

$$M^{\phi}{}_{12,1} + M^{\phi}{}_{2,2} - Q^{\phi}2 = 0 \qquad (۳۲)$$

لذا از نتایج روابط تشکیل دهنده سبب ایجاد نظریه جدیدی زیگزاگ شده که بصورت خلاصه ماتریس آن بصورت زیر میباشد:

$$\begin{Bmatrix} N_m \\ M_b \\ Q_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^T & D & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_m \\ e_b \\ e_s \end{Bmatrix} \qquad (۳۳)$$

نتایج عددی

یک ورق مستطیلی چند لایه ای بطول a ، عرض b و ضخامت $2h$ که بروی تکیه گاههای ساده قرار گرفته مورد بررسی قرار گرفته است نتایج بدست آمده در این نظریه برای یک صفحه چند لایه Cross Ply با دیگر روشها، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم و حل دقیق [۸] مقایسه شده است.

جدول شماره ۱ : مقایسه نظریه های مختلف با نظریه زیگزاگ

a/h	theory	$\overline{w}$	$\overline{\sigma_{xx}}$	$\overline{\sigma_{yy}}$	$\overline{\sigma_{xy}}$	$\overline{\sigma_{yz}}$	$\overline{\sigma_{xz}}$
4	FSDT	2.363	0.613	0.0934	0.0409	0.0308	0.47
	TSDT	2.641	1.036	0.1028	0.0263	0.0348	0.605
	present	2.648	1.081	0.1039	0.0263	0.0275	0.382
	Exact	2.820	1.140	0.1090	0.0281	0.0334	0.351
10	FSDT	0.803	0.621	0.0375	0.0210	0.0159	0.473
	TSDT	0.862	0.692	0.0398	0.0115	0.0170	0.635
	present	0.869	0.712	0.0401	0.0117	0.0135	0.430
	Exact	0.919	0.726	0.0418	0.0123	0.0152	0.420
20	FSDT	0.578	0.623	0.0283	0.0177	0.0135	0.471
	TSDT	0.594	0.641	0.0289	0.0088	0.0139	0.640
	present	0.596	0.646	0.0290	0.0091	0.0130	0.674
	Exact	0.610	0.650	0.0294	0.0093	0.0119	0.434
100	FSDT	0.506	0.623	0.253	0.0166	0.0127	0.474
	TSDT	0.507	0.624	0.0253	0.0083	0.0129	0.440
	present	0.507	0.624	0.0253	0.0083	0.0121	0.438
	Exact	0.508	0.624	0.0253	0.0083	0.0108	0.440

نتیجه گیری:

در این مقاله، نظریه زیگزاگ بهبود یافته در مورد صفحات چند لایه بر اساس نظریه تغییر شکل مرتبه اول ارائه شده است مجهولات این نظریه علاوه بر مجهولات نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، متغییر چرخش زیگزاگ φ_1 و φ_2 نیز میباشد با این تفاوت که بر خلاف تئوری های ذکر شده مشخصات لایه ها در میدان جابجایی در نظر گرفته میشود و به ضریب اصلاح برشی نیاز ندارد. نتایج عددی بدست آمده همگرایی خوبی برای ورقهای ضخیم که از دیگر تئوری های دیگر بدست آمده نشان میدهد.

مراجع

[1] Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 1 : governing equations , composite structures , 87(1) , 1-11

[2] Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 2 : Layerwise theories, 87(1),12-22

[3] Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 1 : 1:advanced mixed high order shear deformation theories, 87(3) , 183-94

[4] Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 4 :zigzag theories , 87(3),195-205

[5] Luciano D., 2009 , Mixed plated theories based on the generalized unified formulation , part 5 :result,88(1) , 1-16

[6] M . Di Sciuva, 1983 , A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered orthtropic plates , proceeding of 7th aidaa national congress, 62,84-92

[7] M . Di Sciuva , 1987, an improved shear deformation theory for moderately thick multilayer anisotropic shell and plates , ASME journal of applied Mechanics , 549-596

انجمن مهندسان مکانیک ایران

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گواهی نامه ارائه مقاله

بدین وسیله تایید می شود مقاله تحلیل خمش صفحات چندلایه ای مستطیلی بر مبنای نظریه زیگزاگ بهبود یافته

توسط علیرضا پهلوانی بهروز حسنی

در بیست و سومین همایش بین المللی مهندسان مکانیک ایران که در تاریخ ۲۲ الی ۲۴ اردیبهشت ماه ۱۳۹۴ در دانشگاه صنعتی امیرکبیر برگزار شد، ارائه گردید.

نادر منظرین
دبیر کنفرانس