ناهم‌خوانی هندسی حالت‌های گاوسی دوقسمتی بدون تقریب اندازه‌گیری گاوسی

تقی‌آبادی، راضیه[۱] ؛ اخترشناس، سیدجواد[1]؛ سربیشه‌ای، محسن[۱]

دانشکده فیزیک دانشگاه فردوسی مشهد[۱]

چکیده

ناهم‌خوانی هندسی کوانتومی که برای محاسبه و تعیین هم‌بستگی غیرکلاسیک حالت‌های دوقسمتی معرفی شده بود، به عنوان معیاری برای تعیین هم‌بستگی کوانتومی حالت‌های گاوسی در سامانه‌های با متغیر پیوسته نیز مورد مطالعه قرار گرفته است، اما تا کنون حل تحلیلی برای ساده‌ترین سامانه‌های دوقسمتی نیز ارائه نشده و فقط با استفاده از روش‌های تقریبی به حل دسته خاصی از حالت‌ها پرداخته‌اند. در این مقاله با حل تحلیلی این معیار، رابطه صریح و دقیقی برای محاسبه همبستگی کوانتومی در دسته پراهمیتی ازحالت‌های فشرده حرارتی دوقسمتی ارائه کرده‌ایم. نتایج بدست آمده تفاوت چندانی با روش تقریبی پیشین برای محاسبه این کمیت نشان نمی دهد.

Geometric discord of two-mode Gaussian states without Gaussian measurements approximation

Razieh, Taghiabadi[1]; Akhtarshenas, Seyed Javad[1]; Mohsen, Sarbishei [1]

[1]Department of Physics, FerdowsiUniversity of Mashhad

Abstract

Quantum geometric discord, which had been introduced to calculate and determine the non-classical correlation of bipartite quantum states, has also been studied as a measure for determining the quantum correlations of Gaussian states in continuous variable system. However, so far no analytical solutions has been provided, even for the simplest bipartite systems, and only some approximate solutions for special classes of states have been considered. In this paper, solving this measure analytically, we have provided an explicit and exact formula for the quantum correlation of a significant class of two-mode squeezed thermal states. The results do not show significant difference with the previous approximate method.

PACS No.3

مقدمه

در دو دهه اخیر هم‌بستگی‌های کوانتومی به یکی از موضوعات مورد علاقه محققان تبدیل شده است، چرا که به عنوان منبعی اساسی برای پردازش اطلاعات کوانتومیی کاربرد فراوانی دارند [1] . یکی از سنجه‌های بسیار مهم برای اندازه‌گیری هم‌بستگی‌های کوانتومی، هم‌بستگی‌های کوانتومی است که به صورت مستقیم ریشه در غیر جابه‌جاپذیر بودن مشاهده‌پذیرهای کوانتومی دارد. این معیار به صورت عدم تطابق کوانتومی بین دو تعریف معادل کلاسیک از اطلاعات متقابل بیان می‌شود و ناهم‌خوانی کوانتمی[۱] خوانده می‌شود. نشان داده شده است که ناهم‌خوانی کوانتمی مفهومی فراتر از درهم‌تنیدگی کوانتومی است به‌طوری که حتی

حالت‌هایی که جداپذیرند نیز ممکن است ناهم‌خوانی کوانتمی غیر صفر داشته باشند. به بیان دیگر، ارتباطات کلاسیکی که در تهیه حالت‌های جداپذیر بکار می‌روند نیز می‌توانند باعث تولید همبستگی‌های کوانتمی شوند. با توجه به اینکه هنوز روشی تحلیلی برای محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی ساده ترین سامانه‌ی مرکب یعنی سامانه دو کیوبیتی ارائه نشده است، جست‌وجو برای معرفی سنجه‌ی محاسبه پذیری که بتوان جایگزین ناهم‌خوانی کرد ادامه دارد. در سال ۲۰۱۰ داکیک و همکارانش روش هندسی برای محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی مطرح کردند که ناهم‌خوانی هندسی کوانتومی نام گرفت و با تعریف حالت‌هایی که ناهم‌خوانی کوانتومی صفر دارند و محاسبه کمترین فاصله حالت مورد نظر از این حالت‌ها با استفاده از نرم هیلبرت–اشمیت، هم‌بستگی کوانتومی سامانه را محاسبه کرده‌اند [2]. حالت‌هایی که ناهم‌خوانی کوانتمی صفر دارند به شکل زیر نمایش داده می‌شوند

$$\chi_{AB} = \sum \quad p_i p_{Ai} \otimes |i\rangle\langle i|.$$

اگر تمام این حالت‌ها یک مجموعه با نام Λ بسازند ناهم‌خوانی هندسی را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد

$$D_{\mathrm{G}}(\rho_{\mathrm{AB}}) = \inf_{\chi_{AB}\in\Lambda} \|\rho_{\mathrm{AB}} - \chi_{AB}\|_2^2, \qquad (1)$$

که اینجا $\|M\|_2^2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathrm{MM}^\dagger)}$ نرم هیلبرت–اشمیت می‌باشد.این فرمول توسط لو و همکارانش در سال ۲۰۱۱ به شکل زیر بازنویسی شد[3]

$$D_{\mathrm{G}}(\rho_{\mathrm{AB}}) = \inf_{\Pi_B} \|\rho_{\mathrm{AB}} - \Pi_B(\rho_{\mathrm{AB}})\|_2^2\,, \qquad (2)$$

که فاصله هیلبرت–اشمیت ρ_{AB} از حالت $\Pi_B(\rho_{\mathrm{AB}})$ است که از اندازه‌گیری تصویری Π_B روی زیرسامانه B بدست می آید. در اینجا ذکر این نکته لازم است که ناهم‌خوانی هندسی در حالت کلی کمیتی نامتقارن است و با اندازه گیری روی زیر سامانه A و B مقدار آن تغییر می‌کند.

در سال۲۰۱۱ آدسو و همکارانش با استفاده از تعریف (2) و همین نرم و با استفاده از اندازه‌گیری گاوسی ناهم‌خوانی هندسی را برای حالت‌های گاوسی دوقسمتی در فضای پیوسته به شکل زیر تعریف کرده‌اند که به آن ناهم‌خوانی هندسی گاوسی می‌گویند.

$$D_{\mathrm{G}}^{g}(\rho_{\mathrm{AB}}{}^{g}) = \inf_{\Pi_B} \|\rho_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{g}} - \Pi_B{}^{g}(\rho_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{g}})\|_2^2. \qquad (3)$$

لازم به ذکر است که رابطه (3) یک تقریب از رابطه (۱) محسوب می‌شود، چرا که فضای حالت‌های $\Pi_B{}^{g}(\rho_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{g}})$ زیرفضایی از فضای حالت‌های با ناهم‌خوانی صفرΛ می‌باشد و اندازه‌گیری گاوسی نمی‌تواند فضای حالت‌های جداپذیر $\chi_{AB} = \chi_A \otimes \chi_B$ را پوشش دهد. می‌دانیم حالت بعد از اندازه‌گیری گاوسی یک حالت گاوسی است که از خروجی اندازه‌گیری مستقل است [4].

اگر حالت بعد اندازه‌گیری برای زیر سامانه B با $\overline{\omega}_B$ و برای زیر سامانه A را با $\overline{\omega}_A$ نشان دهیم معادله (3) به شکل زیر در می‌آید

$$D_{\mathrm{G}}^{g}(\rho_{\mathrm{AB}}{}^{g}) = \inf_{\overline{\omega}_B} \|\rho_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{g}} - \overline{\omega}_A \otimes \overline{\omega}_B\|_2^2. \qquad (4)$$

آدسو و همکارانش برای بدست آوردن یک رابطه بسته ساده فقط به محاسبه ناهم‌خوانی هندسی بر حسب عناصر ماتریس هم‌وردای حالت گاوسی به حالت‌هایی خاصی اکتفا کرده‌اند. بعد از انجام محاسبات در نهایت به رابطه تقریبی زیر برای ناهم‌خوانی هندسی (برای حالت‌های خاص فشرده حرارتی دوقسمتی گاوسی) رسیده‌اند[5].

$$\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{g}}(\rho_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{sts}}) = \frac{1}{\mathrm{ab}-\mathrm{c}^2} - \frac{9}{(\sqrt{4\mathrm{ab}-3\mathrm{C}^2} + \sqrt{\mathrm{ab}})^2}.$$

در بخش یک این مقاله ما ابتدا به معرفی مختصری از حالت‌های گاوسی می‌پردازیم. سپس در بخش دوم برای فضای حالت‌های گاوسی که ناهم‌خوانی هندسی صفر دارند تعریفی دیگر ارائه می‌کنیم و به روش محاسبه ناهم‌خوانی هندسی با استفاده از رابطه دقیق (۱) می‌پردازیم و در آخر نتایج را به صورت مختصر بیان می کنیم و با نتایج تقریبی قبل مقایسه می‌کنیم.

حالت‌های گاوسی دوقسمتی

حالت‌هایی را گاوسی می‌نامند که تابع ویگنر حالت ρ آنها به شکل گاوسی باشد[6].

$$W(\boldsymbol{K}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{K}^T\sigma^{-1}\boldsymbol{K}\right]}{\pi^2\sqrt{\mathrm{Det}[\sigma]}}, \qquad (5)$$

در اینجا $\boldsymbol{K} \equiv (X_1, P_1, X_2, P_2)$، $X_i = (a^\dagger{}_i + a_i)/2$ و $P_i = i(a^\dagger{}_i - a_i)/2$ که a_i و $a^\dagger{}_i$ عملگرهای خلق و نابودی برای سامانه‌های ۱ و۲ با رابطه جابه‌جایی $[a_i, a_j] = \delta_{\mathrm{ij}}$ می‌باشند. همچنین σ را ماتریس هم‌وردای (CM)متناظر با ρ گویند که

عناصر آن به‌شکل $\sigma_{kh} \equiv \frac{1}{2}\langle\{K_k, K_h\}\rangle - \langle K_k\rangle\langle K_h\rangle$ تعریف می‌شود. با استفاده از تبدیلات هم‌تافته[۲] موضعی که هم‌بستگی کوانتومی را ناوردا می‌گذارند، ماتریس σ را می‌توان به شکل استاندارد زیر نوشت.

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & d \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & b \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

که در آن A و B و C ماتریس‌های حقیقی 2×2 می‌باشند. کمیت-های a، b، c و d توسط کمیت‌های ناوردای

$$I_1 = \det A = a^2, \quad I_2 = \det B = b^2\, I_3 = \det C = cd\,, \quad I_4 = \mathrm{tr}\, AJCJBJC^TJ, \quad \det\sigma = I_1 I_2 + I_3^2 - I_4 = (ab - c^2)(ab - d^2)$$

محاسبه می‌شوند. اینجا $1 \le a\,, b$ و $|d| \le c \le \sqrt{ab - 1}$

محاسبه ناهم‌خوانی هندسی

در این مقاله برای محاسبه ناهم‌خوانی هندسی حالت‌های گاوسی دو قسمتی از تعریف دقیق ناهم‌خوانی هندسی شروع می‌کنیم و همان رابطه (۱) را برای حالت‌های گاوسی دو قسمتی به کار می بریم وتعریف دقیق‌تری از حالت‌های گاوسی که ناهم‌خوانی کوانتمی صفر دارند ارائه می‌کنیم، درنتیجه انتظار داریم به پاسخ های بهینه‌تری برای محاسبه ناهم‌خوانی هندسی نسبت به روش های قبل دست یابیم، نهایتاً به حل تحلیلی رابطه ناهم‌خوانی هندسی می‌پردازیم و به یک رابطه روشن برای آن می‌رسیم. ناهم-خوانی هندسی را برای حالت‌های گاوسی به صورت دقیق به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$D_G(\rho_{AB}) = \inf_{\substack{m_1,\theta_1,\lambda_1;\\ m_2,\theta_2,\lambda_2}} \|\rho_{AB} - \chi(m_1, \theta_1, \lambda_1; m_2, \theta_2, \lambda_2)\|_2^2\,, \qquad (7)$$

اینجا ρ_{AB} حالت گاوسی دو قسمتی با ماتریس هم‌وردای σ است که در بخش ۲ معرفی کرده‌ایم و χ حالت‌های گاوسی دو قسمتی با ناهم‌خوانی کوانتمی صفر می‌باشند که به زیرفضای حالت‌هایی با ماتریس هم‌وردای $\sigma_A = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ محدود می‌شوند. از آنجا که شکل کلی ماتریس چگالی حالت گاوسی تک‌قسمتی را می‌توان به شکل زیر بسط داد [5]

$$\rho = U(\theta)S(\lambda)\nu_{th}(m)S^\dagger(\lambda)U^\dagger(\theta),$$

که در آن $U(\theta)$ عملگر دوران، $S(\lambda)$ عملگر چلاندن و $\nu_{th}(m)$ ماتریس چگالی حالت‌های حرارتی می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس هم‌وردای حالت‌هایی که ناهم‌خوانی هندسی صفر دارند (σ_χ) را می‌تواندر حالت کلی به شکل زیر نوشت.

$$\sigma_\chi = \begin{bmatrix} m_1\lambda_1 \cos{\theta_1}^2 + \frac{m_1 \sin{\theta_1}^2}{\lambda_1} & -\frac{m_1({\lambda_1}^2 - 1)\sin\theta_1\cos\theta_1}{\lambda_1} \\ -\frac{m_1({\lambda_1}^2 - 1)\sin\theta_1\cos\theta_1}{\lambda_1} & m_1\lambda_1 \sin{\theta_1}^2 + \frac{m_1 \cos{\theta_1}^2}{\lambda_1} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} m_2\lambda_2 \cos{\theta_2}^2 + \frac{m_2 \sin{\theta_2}^2}{\lambda_2} & -\frac{m_2({\lambda_2}^2 - 1)\sin\theta_2\cos\theta_2}{\lambda_2} \\ -\frac{m_2({\lambda_2}^2 - 1)\sin\theta_2\cos\theta_2}{\lambda_2} & m_2\lambda_2 \sin{\theta_2}^2 + \frac{m_2 \cos{\theta_2}^2}{\lambda_2} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

با $m_1, m_2 \ge 1$ و $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$. با توجه به رابطه (۷) و اینکه

$$tr(\rho_1\rho_2) = \frac{1}{\sqrt{det[(\sigma_1 + \sigma_2)/2]}}\,,$$

ناهم‌خوانی هندسی به شکل زیر بدست می آید

$$D_G = \inf_{\substack{m_1,\theta_1,\lambda_1;\\ m_2,\theta_2,\lambda_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\det(\sigma)}} + \frac{1}{\sqrt{\det(\sigma_\chi)}} - \frac{2}{\sqrt{\det[(\sigma + \sigma_\chi)/2]}}\right). \quad (9)$$

اکنون بایستی مقدار مینیمم رابطه بالا را نسبت به متغیرهای $m_1, \theta_1, \lambda_1; m_2, \theta_2, \lambda_2$ بدست آوریم. برای اینکه محاسبات انجام پذیر باشد به حالت‌های حرارتی فشرده اکتفا می‌کنیم. در شکل استاندارد ماتریس هم‌وردای (2) این حالت‌ها $c = \pm d$ می‌باشد. بعد از کمی محاسبات نه چندان ساده به این نتیجه می‌رسیم که ناهم‌خوانی هندسی از θ_1 و θ_2 مستقل است، هم‌چنین $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ بدست می‌آید.

افزون بر این می‌توان نشان داد که رابطه بین m_2 و m_1 به شکل زیر است.

$$m_2 = \frac{a.b - c^2 + b.\ m_1}{\sqrt{8\,.m_1.(a + m_1)} - (a + m_1)}\,,$$

و m_1 از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$m_1 = -0.142\,a + 0.058\left(g + \sqrt{\frac{hbg + 382.12\,a^3b - 617.27a^2c^2}{b\,g}}\right),$$

[۲]symplectic

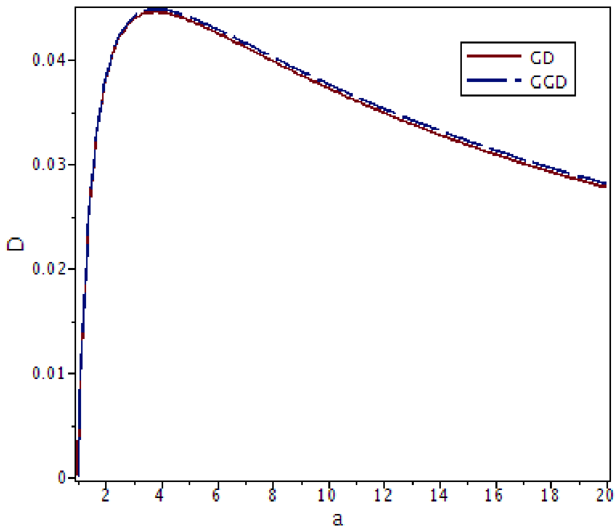
اینجا

$$g = (k_1 + k_2)^{1/2},$$

$$h = 2\,k_1 - 7\,k_2\,,$$

$$k_1 = 48a^2 - 14\frac{ac^2}{b}\ ,\ k_2 = 7\frac{af^{\frac{1}{3}}}{b} + 168\frac{c^2a^2}{f^{\frac{1}{3}}} - 140\frac{c^4a}{bf^{\frac{1}{3}}}$$

$$f = 216\,b^2a^2c^2 - 180\,bac^4 + 64\,c^6 - 108\,b^3a^3 + 20.784(-244\,b^3a^3 + 219\,b^2a^2c^8 - 120\,bac^{10} + 28\,c^{12} + 198\,b^4a^4c^4 - 108\,b^5a^5c^2 + 27\,b^6a^6)^{1/2}.$$



شکل ۱: مقایسه ناهم‌خوانی هندسی گاوسی و ناهم‌خوانی هندسی برای $b = 1 + x(a-1)\,, c = \sqrt{x(a^2-1)}$, $x = .1$, (حوزه مجاز تغییرات x $0 < x < 1$ می‌باشد) برحسب a

برای $a, b\,, c$ معین می‌توان ناهم‌خوانی هندسی را با توجه به $m_1, \theta_1, \lambda_1; m_2, \theta_2, \lambda_2$ بدست‌آمده در بالا محاسبه کرد. نتیجه بدست آمده را با روش تقریبی مقاله [5] مقایسه می‌کنیم و به روشنی می‌بینیم که نتایج بدست آمده از این روش با روش قبلی اختلاف چندانی ندارد.

نتیجه گیری

در این مقاله به حل دقیقی از ناهم‌خوانی هندسی برای دسته مهمی از حالت‌ها بدون در نظر گرفتن تقریب اندازه‌گیری گاوسی پرداخته‌ایم ونشان داده‌ایم که می‌توان ناهم‌خوانی هندسی را برای این حالت‌ها به صورت دقیق محاسبه کرد و نیازی به استفاده از تقریب‌های پیشنهادی در مقاله‌های پیشین نیست.

مرجع‌ها

[1] F. A. S. Barbosa, A. S. Coelho, A. J. de Faria, K. N. Cassemiro, A. S. Villar, P. Nussenzveig, and M. Martinelli,"Robustness of bipartite Gaussian entangled beam propagating in lossy channels", *Nat. Photonics* **4,**(2010) 858.

[2] B. Dakić, C. Brukner and V. Vedral,"Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord".*Phys. Rev. Lett.***105,**(2010) 190502.

[3] S. Luo and S. Fu,"Geometric measure of quantum discord".*Phys. Rev. A.* **82,** (2010) 034302.

[4] J. Eisert and M. Plenio, *Int. J. Quantum. Inform.* **1** (2003) 479; M. Takeoka and M. Sasaki, *Phys. Rev. A***78,**(2008) 022320.

[5] G.Adesso, D.Girolami,"Gaussian geometric discord".*International Journal of Quantum Information*. **9,** Nos. 7 & 8 (2011) 1773_1786

[6] S. Olivares, "Quantum optics in the phase space a tutorial on Gaussian states".*Eur. Phys. J. Special Topics***203,**(2012) 3–24.