

شناسایی گذار فاز کوانتومی مدل آیزینگ یک بعدی با یک میدان عرضی با استفاده از سنجه هم‌بستگی کوانتومی کل

بهدانی، جواد^۱؛ اخترشناس، سید جواد^۱؛ سریشاهی، محسن^۱

^۱گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.

چکیده

گذار فاز کوانتومی یکی از مفاهیم بنیادی و مهم در فیزیک است که اخیراً به شدت مورد توجه قرار گرفته است. شناسایی نقاط بحرانی در سامانه‌های کوانتومی، یکی از ویژگی‌های مورد انتظار یک سنجه واجد شرایط هم‌بستگی‌های کوانتومی و نمادی از اعتبار آن است. در این مقاله قصد داریم یک سنجه هم‌بستگی کوانتومی کل معرفی کنیم و توانایی آن در شناسایی پدیده گذار فاز کوانتومی را در مدل آیزینگ یک بعدی با میدان عرضی بررسی کنیم.

Recognition of Quantum Phase Transition in the One-Dimensional Ising Model with a Transverse Field by a Total Quantum Correlation Measure

Behdani, Javad¹; Akhtarshenas, Seyed Javad¹; Sarbishaei, Mohsen¹

¹ Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract

Recently, quantum phase transition, as a principal concept in physics, has been considered vastly. Recognizing the critical points in quantum systems is one of the expected features for a bona fide measure of quantum correlation and shows its reliability. In this paper, we are going to introduce a measure of total quantum correlation and survey its capability of recognizing the quantum phase transition phenomenon in one-dimensional Ising model with a transverse field.

PACS No. 64.70.Tg, 05.30.Rt

مقدمه

یک حالت باشند. اخیراً تلاش‌های فراوانی در جهت استفاده از سنجه‌های مربوط به هم‌بستگی‌های کوانتومی، برای شناسایی نقاط بحرانی در نمودار فاز کوانتومی انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که شناسایی نقاط گذار فاز کوانتومی به این روش، در بسیاری از موارد ممکن است و حتی می‌توان آن را به عنوان معیاری از مفید بودن یک سنجه برای هم‌بستگی‌های کوانتومی استفاده کرد.

در این مقاله، ابتدا یک سنجه هم‌بستگی کوانتومی [1] را تعمیم می‌دهیم و سنجه‌ای برای هم‌بستگی کوانتومی کل یک سامانه معرفی می‌کنیم. سپس مدلی را معرفی می‌کنیم که در نمودار آن

گذار فاز کوانتومی یک پدیده کاملاً غیرکلاسیکی است که ریشه آن را می‌توان در خصوصیات کوانتومی یک سامانه دید. شناسایی و بررسی گذار فاز در مدل‌های مختلف، می‌تواند خصوصیات سامانه کوانتومی مذکور را بیشتر آشکار کند و منجر به دید روشن‌تری نسبت به مدل مذکور شود. از این منظر، کارهای متفاوتی صورت گرفته است تا در مدل‌های ارائه شده، ویژگی‌های سامانه، از جمله فرآیند گذار فاز کوانتومی شناسایی شوند. هم‌بستگی‌های کوانتومی نشان‌دهنده خصوصیات کوانتومی یک حالت کوانتومی هستند و باید قادر به بازتاب ویژگی‌های کوانتومی

کوانتومی می‌رسیم که اگر ناهم‌خوانی آن را نسبت به زیرسامانه دومش محاسبه کنیم، این امکان وجود دارد که مقداری غیرصفر به دست آوریم. به همین منظور، سنجه مذکور را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم

$$Q_{BA}(\rho) = \min_{P_A} \|C_l - P_A C_l\|^2 + \min_{P_B} \|C_r^{\tilde{P}_A} - P_A C_r^{\tilde{P}_A}\|^2 \quad (5)$$

که در رابطه بالا

$$C_r^{\tilde{P}_A} = (\bar{y} \quad [\tilde{P}_A T]^t) ; y_j = \text{Tr}[\rho(1^A \otimes \hat{\lambda}_j^B)] \quad (6)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که سنجه مذکور، برای هر حالت دلخواهی قابل محاسبه بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$Q_{BA}(\rho) = \sum_{k=d_A}^{d_A^2-1} \tau_k^{l,\downarrow} + \sum_{k=d_B}^{d_B^2-1} \tilde{\tau}_k^{r,\downarrow} \quad (7)$$

که در رابطه بالا، $\tilde{\tau}_k^{r,\downarrow}$ ویژه مقادیر $C_r^{\tilde{P}_A} [C_r^{\tilde{P}_A}]^t$ هستند که به صورت نزولی مرتب شده‌اند.

سنجه‌ای که به دست آوردیم را می‌توان مشابه فرآیند بالا، اما این بار با شروع اندازه‌گیری روی زیرسامانه دوم و سپس ادامه آن روی زیرسامانه اول تعریف کرد. ابتدا ماتریس هم‌بستگی راست و چپ را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$C_r = (\bar{y} \quad T^t) ; C_l^{\tilde{P}_B} = (\bar{x} \quad T\tilde{P}_B) \quad (8)$$

با داشتن این ماتریس‌ها، Q_{AB} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Q_{AB}(\rho) = \min_{P_B} \|C_r - P_A C_r\|^2 + \min_{P_A} \|C_l^{\tilde{P}_B} - P_A C_l^{\tilde{P}_B}\|^2 \quad (9)$$

به سادگی می‌توان نشان داد

$$Q_{AB}(\rho) = \sum_{k=d_B}^{d_B^2-1} \tau_k^{r,\downarrow} + \sum_{k=d_A}^{d_A^2-1} \tilde{\tau}_k^{l,\downarrow} \quad (10)$$

در رابطه بالا، $\tau_k^{r,\downarrow}$ و $\tilde{\tau}_k^{l,\downarrow}$ به ترتیب ویژه مقادیر $C_r C_r^t$ و $C_l^{\tilde{P}_B} [C_l^{\tilde{P}_B}]^t$ هستند که به صورت نزولی مرتب شده‌اند. در حالت کلی، $Q_{BA}(\rho)$ و $Q_{AB}(\rho)$ به نتایج یکسانی منجر نمی‌شوند. به عنوان مثال، حالت زیر را در نظر بگیرد

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_W + \rho_P) \quad (11)$$

که در آن $\rho_W = \frac{1}{4}[1^A \otimes 1^B + \frac{1}{3}(2x-1)\sum_{i=1}^3 \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B]$ یک حالت ورنر $2 \otimes 2$ و $\rho = \frac{1}{4}[1^A \otimes (1^B + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})]$ یک حالت ضربی

انتظار وجود یک نقطه بحرانی وجود دارد. این نقطه را با استفاده از سنجه معرفی شده شناسایی خواهیم کرد.

سنجه شبه هندسی برای هم‌بستگی کوانتومی کل

اخیراً سنجه‌ای برای هم‌بستگی کوانتومی یک حالت دوبخشی معرفی شده است که قرابت فراوانی با ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی معرفی شده در [2] دارد. این سنجه حد پایین ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی است و برای حالت‌هایی که زیرسامانه اول آن‌ها یک کیوبیت است، به همان ناهم‌خوانی هندسی منجر می‌شود. این سنجه به صورت زیر معرفی می‌شود

$$Q_A(\rho) = \min_{P_A} \|C_l - P_A C_l\|^2 \quad (1)$$

که در آن، P_A یک تصویرگر (d_A-1) -بعدی در فضای (d_A^2-1) -بعدی است و $\|X-Y\|^2 = \text{Tr}(X-Y)^2$ نشان‌دهنده ۲-نرم در فضای هیلبرت-اشمیت است. علاوه بر این، C_l به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_l = (\bar{x} \quad T) \quad (2)$$

که در آن،

$$x_i = \text{Tr}[\rho(\hat{\lambda}_i^A \otimes 1^B)] ; T_{ij} = \text{Tr}[\rho(\hat{\lambda}_i^A \otimes \hat{\lambda}_j^B)] \quad (3)$$

در رابطه بالا، $\hat{\lambda}_i^A$ و $\hat{\lambda}_j^B$ ، به ترتیب مولدهای $SU(d_A^2-1)$ و $SU(d_B^2-1)$ هستند که در فضای هیلبرت زیر سامانه‌های اول و دوم اثر می‌کنند و 1^B عملگر واحد در فضای هیلبرت زیرسامانه دوم است. می‌توان نشان داد که این سنجه برای هر حالت کوانتومی دلخواه قابل حل بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$Q_A(\rho) = \sum_{k=d_A}^{d_A^2-1} \tau_k^{l,\downarrow} \quad (4)$$

که در این رابطه $\tau_k^{l,\downarrow}$ ویژه مقادیر عملگر $C_l C_l^t$ هستند که به صورت نزولی مرتب شده‌اند.

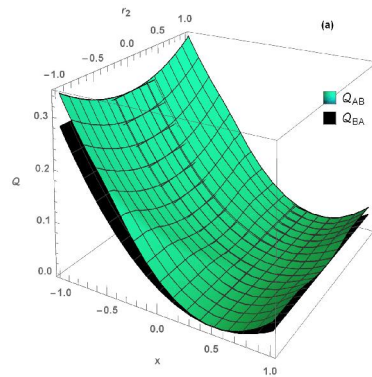
هرچند سنجه بالا هم‌بستگی کوانتومی حالت را نسبت به زیرسامانه اول آن ارائه می‌دهد، اما هنوز همه‌ی هم‌بستگی‌های کوانتومی آن استخراج نشده است. به عبارت دیگر، فرض کنید \tilde{P}_A تصویرگری باشد که معادله (۱) را کمینه می‌کند. با عمل کردن این عملگر روی حالت اولیه ρ ، به یک حالت به اصطلاح کلاسیکی-

که در این رابطه، σ_i^α با $\alpha \in \{x, y, z\}$ ماتریس‌های پاولی هستند و γ پارامتر ناهمسانگردی است. همچنین، قدرت میدان مغناطیسی خارجی با h و ثابت جفت شدگی با J نشان داده شده است. در حالت تعادل گرمایی، می‌توان نشان داد که ماتریس چگالی کاهش یافته سامانه برای دو زیرسامانه، که در مکان‌های $-k$ ام و l -ام زنجیره اسپینی قرار گرفته‌اند را می‌توان به صورت ماتریس چگالی زیر نمایش داد [4]

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + Z + Z_{kl} & 0 & 0 & X_{kl} - Y_{kl} \\ 0 & \frac{1}{4} - Z_{kl} & X_{kl} + Y_{kl} & 0 \\ 0 & (X_{kl} + Y_{kl})^* & \frac{1}{4} - Z_{kl} & 0 \\ (X_{kl} - Y_{kl})^* & 0 & 0 & \frac{1}{4} - Z + Z_{kl} \end{pmatrix} \quad (14)$$

که در رابطه بالا، Z چگالی قطبش و $A_{kl}; A \in \{X, Y, Z\}$ توابع همبستگی هستند که مستقیماً از حل صریح مدل برای هر m ، γ و h قابل محاسبه هستند. اگر پارامتر $\lambda = \frac{J}{h}$ را در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که مدل در $\lambda = 1$ یک گذار فاز کوانتومی دارد [5-7] که می‌توان آن را به صورت یک گذار کوانتومی فرومغناطیس-پارامغناطیس برای زنجیره مذکور تفسیر کرد.

برای شناسایی گذار فاز در مدل مذکور، با استفاده از سنجه‌ای که در معادله (۵) معرفی شد، مدل را در حالتی در نظر می‌گیریم که دو پارامتر $\gamma = 1$ و $J = 1$ در نظر گرفته شوند. حال قصد داریم حالت کوانتومی ذکر شده در معادله (۱۳) که برای زنجیره‌های مختلف، از جمله $m = 16$ ، $m = 64$ ، $m = 256$ ، $m = 1024$ و $m = 4048$ ، قابل محاسبه است را بررسی نماییم. به همین منظور، سنجه همبستگی کوانتومی را برای هر یک از حالت‌های ذکر شده، به ازای مقادیر مختلف h محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه برای مدل مورد بررسی، انتظار یک گذار فاز کوانتومی مرتبه دوم داریم، مشتق همبستگی کوانتومی را بر حسب h رسم می‌نماییم. نتایج، یک نقطه بحرانی در $h = 1$ را پیش‌بینی می‌کنند که همان نقطه مربوط به گذار کوانتومی در نمودار



شکل ۱ همبستگی کوانتومی کل Q_{AB} و Q_{BA} برای حالت ρ بر حسب تابعی از x و r_2

خاص است. شکل ۱، که نمودار را با فرض $r_1 = r_3 = 0$ نشان می‌دهد، به وضوح عدم تقارن سنجه تحت تعویض زیرسامانه‌ها را تایید می‌کند. بنابراین همبستگی کوانتومی کل را به صوت زیر معرفی می‌کنیم

$$Q(\rho) = \max\{D_{BA}(\rho), D_{AB}(\rho)\} \quad (12)$$

سنجه‌ای که در معادله (۱۲) معرفی شد را می‌توان برای سامانه‌های چند بخشی هم تعمیم داد. این عمل با ساختن ماتریس‌هایی مشابه آنچه در بالا ذکر شد انجام می‌شود. از آنجایی که در این مقاله قصد داریم تنها حالت‌های کاهش یافته دوبرخی از یک سامانه m -بخشی را بررسی کنیم، تعمیم به زیرسامانه‌های بالاتر را در اینجا ذکر نمی‌کنیم.

مدل آیزینگ یک بعدی با میدان عرضی

مدلی که قصد داریم در مورد آن صحبت کنیم، دارای یک گذار فاز مرتبه دوم در نمودار خود بوده و از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی‌های انجام گرفته نشان می‌دهد که ناهمخوانی کوانتومی هندسی متقارن می‌تواند گذار فاز کوانتومی را در این مدل شناسایی کند [3]. مدل مذکور یک زنجیره اسپینی از m ذره با اسپین $1/2$ است که در یک میدان مغناطیسی عرضی قرار گرفته‌اند. هامیلتونی سامانه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [(1+\gamma)\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + (1-\gamma)\sigma_i^y \sigma_{i+1}^y] - h \sum_{i=1}^m \sigma_i^z \quad (13)$$

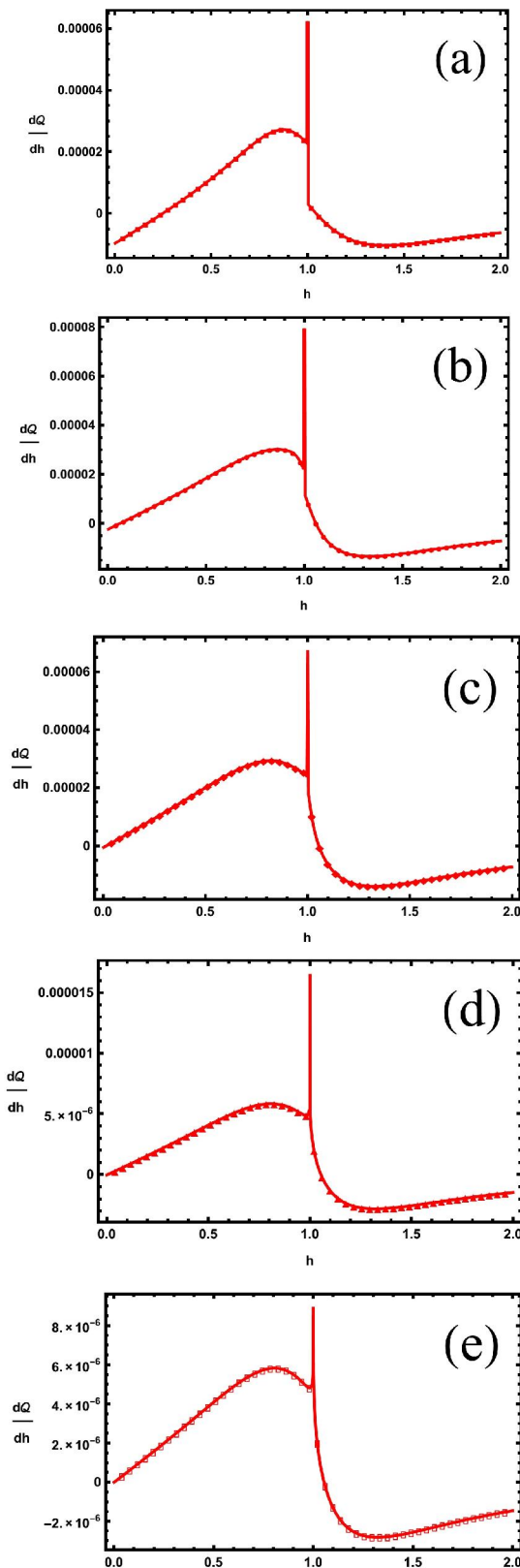
فاز مدل است. شکل ۲، نمودار مذکور و نقطه بحرانی را به نمایش می‌گذارد.

نتیجه گیری

یک سنجه معتبر هم‌بستگی کوانتومی باید قادر باشد ویژگی‌های کوانتومی یک حالت کوانتومی را به خوبی آشکار کند. یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی که در مدل‌های کوانتومی می‌تواند رخ دهد، گذار فاز کوانتومی است. انتظار می‌رود که یک سنجه هم‌بستگی کوانتومی قادر باشد این نقاط بحرانی موجود در نمودار فاز کوانتومی حالت را پیش بینی کند. در این مقاله یک سنجه شبه هندسی هم‌بستگی کوانتومی کل معرفی گردید. با بررسی یک زنجیره اسپینی خاص، ملاحظه گردید که سنجه مذکور قادر به پیش بینی نقاط بحرانی در نمودار فاز این مدل اسپینی است و بنابراین می‌تواند به عنوان یک سنجه مناسب برای هم‌بستگی کوانتومی یک حالت در نظر گرفته شود.

مرجع‌ها

- [1] S. J. Akhtarshenas, H. Mohammadi, S. Karimi and Z. Azmi, "Computable measure of the quantum correlation," *Quantum Inf. Process.*, vol. **14**, no. **1**, pp. 247-267, 2015.
- [2] B. Dakic, V. Vedral and C. Brukner, "Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord," *Phys. Rev. Lett.*, vol. **105**, p. 190502, 2010.
- [3] M. S. Sarandy, T. R. De Oliveira and L. Amico, "Quantum discord in the ground state of spin chains," *Int. J. Mod. Phys. B*, vol. **27**, p. 1345030, 2013.
- [4] J. Zhang, B. Shao, L.-A. Wu and J. Zou, "Quantum discord and its asymptotic behaviors in a time-dependent XY spin chain," *arXiv:1207.3557v1*, **2012**.
- [5] P. Pfeuty, "The one-dimensional Ising model with a transverse field," *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. **57**, p. 79, 1970.
- [6] E. Barouch, B. M. McCoy and M. Dresden, "Statistical Mechanics of the XY Model. I," *Phys. Rev. A*, vol. **2**, p. 1075, 1970.
- [7] E. Barouch and B. M. McCoy, "Statistical Mechanics of the XY Model. II. Spin-Correlation Functions," *Phys. Rev. A*, vol. **3**, p. 786, 1971.



شکل ۲ شناسایی گذار فاز توسط هم‌بستگی کوانتومی کل در مدل آیزینگ با میدان عرضی