

محاسبه‌ی توابع ترکش برای پایون و کایون خنثی در تقریب NLO با استفاده از تبدیلات لاپلاس

زارعی، معصومه^۱؛ آتشبار تهرانی، شاهین؛ تقوی شهری، سیده فاطمه^۱؛ سریشی ای، محسن^۱؛

^۱دانشکده علوم پایه، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده

در این مقاله تلاش شده است که با استفاده از تبدیل لاپلاس و حل تحلیلی معادله ی $DGLAP$ ، توابع ترکش و سطح مقطع پراکندگی پایون و کایون خنثی (π^0 و k^0) در تقریب NLO محاسبه شود. نتایج حاصل با نتایج گروه های برازش داده و داده های تجربی توافق خوبی دارد.

Calculation of fragmentation functions of π^0 and k^0 mesons at NLO approximation by using the Laplace transforms

Zarei, Masoomeh¹; Atashbar Tehrani, Shahin; Taghavi Shahri, Fathemeh¹;

Sarbishaei, Mohsen¹

¹ Department of Physics, University of Ferdowsi, Mashhad,

Abstract

In this paper we try to calculate the fragmentation functions and cross sections of π^0 and k^0 mesons at NLO approximation by using the Laplace transforms and an analytical solution to DGLAP equations. The results are in agreements with those from global fits results and experimental data.

PACS No. 13

توابع ترکش، این توابع را برای پایون، کایون بدست آوریم و با نتایج گروه‌های دیگر و نیز داده‌های موجود مقایسه کنیم. این مقاله نتایج محاسبات را در مورد پایون و کایون خنثی نشان می‌دهد. به طور خلاصه در این رهیافت با دوبار تبدیلات لاپلاس می‌توان معادلات دیفرانسیل-انتگرالی $DGLAP$ برای تعیین توابع ترکش را به معادلات جبری خطی تبدیل کرد که به روش تکرار قابل حل هستند [۵]. برای شرایط اولیه‌ی مورد نیاز در حل معادلات $DGLAP$ ما از مدل هیبرایی [۳]، استفاده کرده‌ایم. تعیین شرایط اولیه در مدل هیبرایی توسط برازش با داده‌های تجربی انجام گرفته است.

مقدمه

توابع ترکش، که با $D_i^h(z, Q^2)$ نشان داده می‌شود، احتمال اینکه یک هادرون h از یک کوارک i به وجود آید و کسر Z از انرژی (یا تکانه) کوارک اولیه را داشته باشد را به ما می‌دهد. علاوه بر این که شناخت این توابع ترکش که احتمال گذار از حالت پارتونی به هادرونی است به خودی خود جالب است، این توابع در مطالعه‌ی ساختار عرضی هادرونی و نیز سطح مقطع پراکندگی e^+e^- به عنوان ورودی می‌باشند و بایستی به درستی شناخته و تعیین شوند. گروه‌های زیادی با استفاده از برازش داده‌ها و نیز مدل‌های تئوری سعی بر تعیین دقیق این توابع ترکش دارند [۴-۱]. ما تلاش کرده‌ایم تا با کاربرد تبدیلات لاپلاس و حل معادلات $DGLAP$ برای تعیین

توابع ترکش و معادلات DGLAP

در حالت کلی سطح مقطع کل در پراکندگی e^-e^+ برابر با تابع ترکش کل است که بر حسب توابع ترکش وابسته به هر هادرون به صورت زیر بسط داده می شود [۳]:

$$F^h(z, Q^2) = \sum_i C_i(z, \alpha_s) \otimes D_i^h(z, Q^2) \quad (1)$$

$D_i^h(z, Q^2)$ ، توابع ترکش و $C_i(z, Q^2)$ ضرایب ویلسون می باشند و \otimes انتگرال پیچشی به صورت زیر است:

$$f(z) \otimes g(z) = \int_z^1 \frac{dy}{y} f(y)g\left(\frac{z}{y}\right). \quad (2)$$

توابع توکس از معادلات DGLAP به صورت زیر بدست می آیند:

$$\frac{\epsilon\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial D_{ns}}{\partial \ln Q^2}(z, Q^2) = D_{ns} \otimes \left(P_{qq}^{ns} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\epsilon\pi} P_{qq}^{ns} \right)(z, Q^2). \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial D_s}{\partial \ln Q^2}(z, Q^2) &= D_s \otimes \left(P_{qq} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\epsilon\pi} P_{qq} \right)(z, Q^2) \\ &+ D_g \otimes \left(P_{gq} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\epsilon\pi} P_{gq} \right)(z, Q^2), \quad (4) \\ \frac{\epsilon\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial D_g}{\partial \ln Q^2}(z, Q^2) &= D_s \otimes \left(P_{qg} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\epsilon\pi} P_{qg} \right)(z, Q^2) \\ &+ D_g \otimes \left(P_{gg} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\epsilon\pi} P_{gg} \right)(z, Q^2). \quad (5) \end{aligned}$$

که در این روابط، $D_{ns}^q(z, Q^2) \equiv D_q(z, Q^2) - D_{\bar{q}}(z, Q^2)$ ، تابع ترکش غیر منفرد و، $D_s^h(z, Q^2) \equiv D_q(z, Q^2) + D_{\bar{q}}(z, Q^2)$ ، تابع ترکش منفرد خوانده می شوند.

در این مقاله ما برای هادرون هایی مثل پایون خنثی π^+ و کایون خنثی k^+ این توابع ترکش را محاسبه می کنیم. پایون خنثی از کوارک های ظرفیتی π^+ ($\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$) و نیز کوارک های دریا و گلوئون تشکیل شده است. برای به دست آوردن توابع ترکش کوارک ها برای پایون خنثی لازم است که ابتدا توابع ترکش π^+ و π^- را محاسبه کنیم و مانند زیر از آنها میانگین گرفته شود [۳]:

$$D_i^{\pi}(z, Q^2) = \frac{1}{2} \left[D_i^{\pi^+}(z, Q^2) + D_i^{\pi^-}(z, Q^2) \right]. \quad (6)$$

کایون خنثی k^+ از کوارک های ظرفیتی d و \bar{s} و سایر کوارک های دریا و گلوئون تشکیل شده است.

همچنین باید توجه داشت که کوارک های ظرفیتی برای پایون و کایون باردار به صورت $\pi^+(u\bar{d})$ ، $\pi^-(\bar{u}d)$ و $k^+(u\bar{s})$ و $k^-(d\bar{s})$ هستند، پس می توان از تقارن های زیر بهره جست [۳]:

$$D_q^{\pi^-,k^-}(z, Q^2) = D_{\bar{q}}^{\pi^+,k^+}(z, Q^2) \quad (7)$$

و همچنین برای گلوئون:

$$D_g^{\pi^-,k^-}(z, Q^2) = D_g^{\pi^+,k^+}(z, Q^2) \quad (8)$$

برای کایون خنثی نیز تقارن های زیر موجود است:

$$D_d^{k^+}(z, Q^2) = D_u^{k^+}(z, Q^2), \quad D_s^{k^+}(z, Q^2) = D_s^{k^+}(z, Q^2)$$

$$D_{c,b}^{k^+}(z, Q^2) = D_{c,b}^{k^+}(z, Q^2) = D_{\bar{c},\bar{b}}^{k^+}(z, Q^2),$$

$$D_u^{k^+}(z, Q^2) \neq D_d^{k^+}(z, Q^2) \neq D_s^{k^+}(z, Q^2),$$

$$D_g^{k^+}(z, Q^2) = D_g^{k^+}(z, Q^2). \quad (9)$$

وجود این تقارن ها توابع ترکش قابل محاسبه را کاهش می دهد.

برای سادگی $F_i(z, Q^2) = G(z, Q^2) = zD_g(z, Q^2)$ و $F_i(z, Q^2) = zD_i(z, Q^2)$ نمایش می دهیم. با استفاده از تغییر متغیرهای،

$$\begin{aligned} v &\equiv \ln\left(\frac{1}{z}\right), \quad w \equiv \ln\left(\frac{1}{x}\right), \\ \tau(Q^2, Q^2) &\equiv \frac{1}{\epsilon\pi} \int_{Q^2}^{Q^2} \alpha_s(Q^2) d \ln Q^2 \quad (10) \end{aligned}$$

و نیز با استفاده از این خاصیت در تبدیلات لاپلاس که داریم:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^v F[w] H[v-w] dw; s\right] = \mathcal{L}[F[v]; s] \times \mathcal{L}[H[v]; s].$$

و دوبار استفاده از تبدیل لاپلاس می توان معادلات DGLAP را از فضای $(v-\tau)$ در فضای لاپلاس (S,U) به معادلات جبری خطی تبدیل کرد که به روش تکرار قابل حل هستند [۵].

حل معادلات DGLAP غیر منفرد برای استخراج

توابع ترکش در تقریب NLO

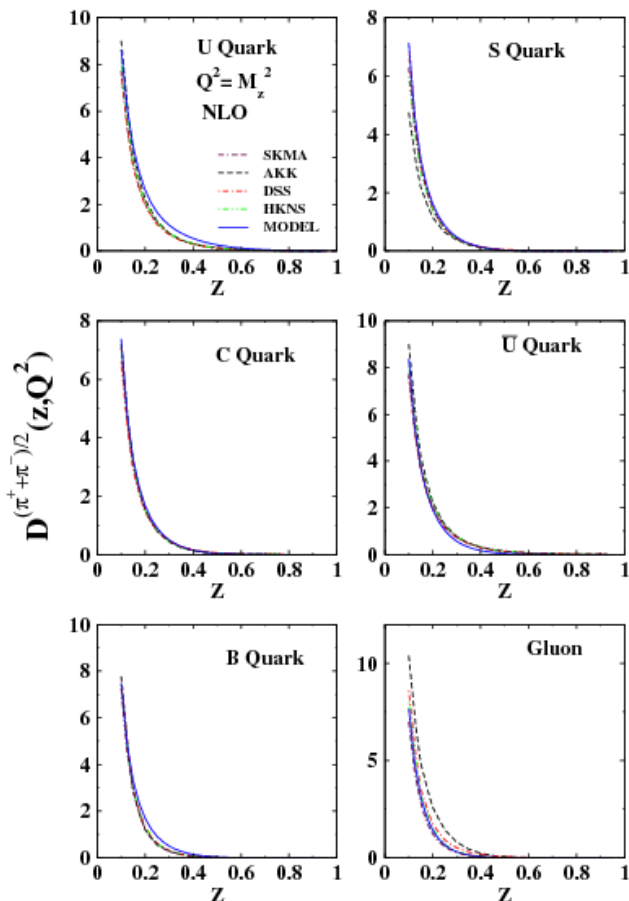
توابع ترکش غیر منفرد بیان کننده ی تحول توابع ترکش کوارک های ظرفیت در یک هادرون هستند. با یک بار اعمال تبدیل لاپلاس روی معادله ی غیر منفرد (۳) و با استفاده از قضیه ی

ضرایب k_{ij} برحسب $\Phi_i(s)$ و $\theta_i(s)$ و ضرایب ثابت b_1 و a_1 بدست می‌آیند که یکی از آنها به صورت زیر است:

$$k_{fg}(a_1, b_1, s, \tau) = (\tau e^{-(b_1 + \Phi_f + \Phi_g)\tau} \theta_f(-a_1, (b_1 + \Phi_f - \Phi_g)(b_1 + \Phi_g) - \tau \theta_f \theta_g) R \cosh\left(\frac{1}{\tau} \tau R\right) \sinh\left(\frac{b_1 \tau}{\tau}\right) + (b_1(-b_1 + \Phi_f - \Phi_g)(b_1 - (1 + a_1)\Phi_f + \Phi_g) + \tau(\tau + a_1)\theta_f \theta_g) \cosh\left(\frac{b_1 \tau}{\tau}\right) - (b_1 + a_1 \Phi_g)(b_1 - (\Phi_f - \Phi_g)\tau - \epsilon \theta_f \theta_g) \sinh\left(\frac{b_1 \tau}{\tau}\right) \sinh\left(\frac{1}{\tau} \tau R\right)) / (b_1 R(-b_1 + R\tau)),$$

$$R(s) \equiv \sqrt{(\Phi_f(s) - \Phi_g(s))^2 + \epsilon \theta_g(s) \theta_f(s)}. \quad (16)$$

حال با دو بار عکس تبدیل لاپلاس به صورت تحلیلی [۵] به فضای (z, Q^2) برمی‌گردیم. در شکل ۱ نتایج در انرژی $Q^2 = M_z^2$ با چهار مدل برازش داده مقایسه شده است.



شکل ۱: مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج مدل‌های AKK۰۸، DSS، HKNS و SKMA [۴-۱] برای پایون خشی.

انتگرال پیچشی حل نهایی معادله در فضای لاپلاس به صورت زیر خواهد بود:

$$f_{ns}(s, \tau) = e^{\tau \Phi_{ns}(s)} f'_{ns}(s). \quad (11)$$

که $\Phi_{ns}(s)$ تبدیل لاپلاس Z برابر ترکیب توابع شکافت غیر منفرد در مرتبه‌ی LO و NLO هستند.

$$\Phi_{ns}(s) = \Phi_{ns}^{LO}(s) + a. \Phi_{ns}^{NLO}(s),$$

که $\Phi_{ns}(s)$ تبدیل لاپلاس Z برابر ترکیب توابع شکافت غیر منفرد در مرتبه‌ی LO و NLO هستند.

$$\Phi_{ns}(s) = \Phi_{ns}^{LO}(s) + a. \Phi_{ns}^{NLO}(s),$$

که هر کدام را می‌توان در مرجع [۶] دید. و نیز $a. = 0.036$.

حل معادلات منفرد تحولی ترکش و گلئون در NLO

با دوبار اعمال تبدیل لاپلاس بر معادلات (۴) و (۵) از فضای Z به S و از فضای τ به فضای U ، حل نهایی در فضای S و U به صورت زیر می‌باشد:

$$[U - \Phi_f(s)] \mathcal{F}(s, U) - \theta_g(s) \mathcal{G}(s, U) = f(s) + a. [\Phi_f^{NLO}(s) \mathcal{F}(s, U + b_1) + \theta_g^{NLO}(s) \mathcal{G}(s, U + b_1)], \quad (12)$$

$$-\theta_f(s) \mathcal{F}(s, U) + [U - \Phi_g(s)] \mathcal{G}(s, U) = g(s) + a. [\theta_f^{NLO}(s) \mathcal{F}(s, U + b_1) + \Phi_g^{NLO}(s) \mathcal{G}(s, U + b_1)]. \quad (13)$$

در روابط بالا $\Phi_i(s)$ و $\theta_i(s)$ تبدیل لاپلاس Z برابر توابع شکافت در مراتب LO و NLO هستند.

بعد از حل این معادلات با روش تکرار [۵]، شکل نهایی معادلات با یک بار اعمال عکس تبدیل لاپلاس از فضای U به τ ، به صورت زیر در فضای S حاصل می‌گردند:

$$f(s, \tau) = k_{ff}(a_1, b_1, s, \tau) f(s) + k_{gf}(a_1, b_1, s, \tau) g(s), \quad (14)$$

$$f(s, \tau) = k_{gg}(a_1, b_1, s, \tau) g(s) + k_{fg}(a_1, b_1, s, \tau) f(s), \quad (15)$$

عبارت $f(s)$ و $g(s)$ ، Z برابر توابع ترکش اولیه‌ی هادرون می‌باشند.

نتیجه گیری

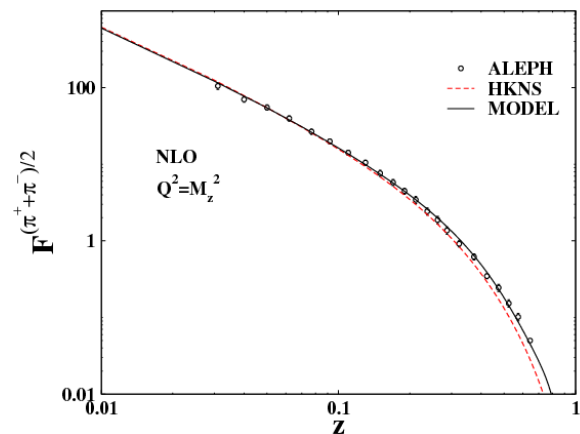
در این مقاله توابع ترکش و سطح مقطع پراکندگی را برای پایون و کایون خنثی با استفاده از تبدیلات لاپلاس محاسبه کرده ایم. برای محاسبه توابع ترکش مزونهای خنثی ابتدا این توابع را برای یک مزون خاص مثلا π^+ با استفاده از تبدیلات لاپلاس در حل معادلات DGLAP بدست آورده و سپس از تقارن همیوگ بار استفاده کرده و توابع ترکش π^- را بدست می آوریم. با محاسبه این دو، محاسبه توابع ترکش مزون خنثی π^0 میسر خواهد بود. نتایج نشان می دهد که استفاده از تبدیلات لاپلاس راه حل مناسبی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی DGLAP برای استخراج توابع ترکش می باشد. ما نتایج حاصل سطح مقطع پراکندگی را با داده های تجربی مقایسه کرده ایم و آنچه بدست آمده صحت محاسبات در حل معادلات DGLAP را با این روش نشان می دهد.

مراجع:

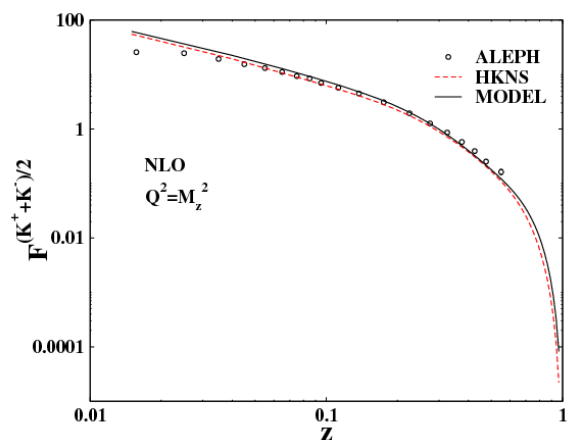
- [۱] AKK \cdot ۸, S. Albino, B. A. Kniehl and G. Kramer, Nucl. Phys. **B۸۰۳** (۲۰۰۸) ۴۲
 [۲] DSS, D. de Florian, R. Sassot and M. Stratmann, Phys. Rev. **D۷۰** (۲۰۰۷) ۱۱۴۰۱۰,
 [۳] HKNS, M. Hirai, S. Kumano, T. H. Nagai and K. Sudoh, Phys. Rev. **D۷۰** (۲۰۰۷) ۰۹۴۰۰
 [۴] SKMA, M.Soleymaninia, A. N. Khorramian, S. M. Moosavi Nejad and F. Arbabifar, Phys. Rev. **D ۸۸**, ۰۵۴۰۱۹ (۲۰۱۳)
 [۵] M.M. Block, Eur. Phys. J. **C ۶۵**, ۱ (۲۰۱۰).
 [۶] زارعی، معصومه؛ تقوی شهری، فاطمه؛ آتشبار تهرانی، شاهین؛ سریشی ای، محسن؛ «محاسبه ی توابع ترکش و سطح مقطع پراکندگی در تقریب NLO با استفاده از تبدیلات لاپلاس با حل تحلیلی معادله DGLAP»؛ مقاله نامه پنجمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان ها، ۲۹ و ۳۰ بهمن ۱۳۹۳، صفحه ی ۱۶۹ تا ۱۷۲.
 [۷] G D Lafferty et al, J.Phys.G.Nucl.Part.Phys: ۲۱ A۱-A۱۵۱(۱۹۹۵)

محاسبه ی سطح مقطع پراکندگی پایون و کایون خنثی

محاسبه ی سطح مقطع پراکندگی پایون و کایون خنثی که از فرایند نابودی زوج الکترون پوزیترون حاصل شده اند، به کمک توابع ترکش محاسبه شده، و نیز مقایسه با داده های تجربی موجود برای سطح مقطع پراکندگی، می تواند تاییدی بر صحت محاسبات باشد. به همین منظور ما با استفاده از روابط سطح مقطع پراکندگی در انرژی $Q^2 = M_z^2$ که در فضای لاپلاس، در مرجع [۶] آورده شده است، سطح مقطع پراکندگی را محاسبه می کنیم. در نهایت با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس به صورت تحلیلی [۵] به فضای Z ، نتایج را بدست می آوریم. مقایسه ی نتایج محاسبه ی سطح مقطع پراکندگی پایون و کایون خنثی در مرتبه ی NLO با گروه HKNS [۳] و داده های تجربی گروه ALEPH [۷] در شکل ۲ و ۳ آورده شده است.



شکل ۲: مقایسه ی نتایج محاسبه ی تابع ساختار پایون خنثی مدل با HKNS و ALEPH



شکل ۳: مقایسه ی نتایج محاسبه ی تابع ساختار کایون خنثی مدل با HKNS و ALEPH