

ISME2014-XXXX

## تحلیل سینماتیک ربات موازی استوارت مسطح ۶-۶ با روشی نوین

امیر غلامحسین طهرانی<sup>۱</sup>، علیرضا اکبرزاده توتونچی<sup>۲</sup>، سید نادر نبوی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک طراحی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، [amir.gh.tehrani@gmail.com](mailto:amir.gh.tehrani@gmail.com)

<sup>۲</sup>استاد گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، [ali\\_akbarzadeh\\_t@yahoo.com](mailto:ali_akbarzadeh_t@yahoo.com)

<sup>۳</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک طراحی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، [s.nader.nabavi@gmail.com](mailto:s.nader.nabavi@gmail.com)

### چکیده

در این مقاله ابتدا ربات استوارت از نوع ۶-۶ با پلتفرم‌های مسطح معرفی می‌شود. سپس سینماتیک معکوس ربات مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ادامه با الگوریتمی جدید سینماتیک مستقیم استوارت ۶-۶ به روش حذفی بررسی می‌شود. در حل آن با استفاده از ماتریس سیلوستر ۱۵×۱۵ بدون فاکتورگیری به چندجمله‌ای درجه ۲۰ می‌رسیم. با حل چندجمله‌ای پاسخ‌های سینماتیک مستقیم بدست می‌آید. در نهایت صحت پاسخ‌های سینماتیک مستقیم ربات و همچنین پاسخ آن برای یک مثال عددی با نتایج حاصل از سینماتیک معکوس تأیید می‌گردد.

### واژه‌های کلیدی

ربات استوارت، تحلیل سینماتیک

### مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از ربات‌ها در صنعت بسیار گسترده شده است. یکی از دلایل این استقبال، قابلیت مانور ربات‌ها است. با این وجود، ساختار مکانیکی بیشتر ربات‌ها آن گونه که شایسته است با فعالیت آن‌ها متناسب نمی‌باشد. بنابراین ساختارهای متفاوتی برای ربات‌ها طی سال‌های اخیر در دست مطالعه قرار گرفته‌اند و استفاده از آن‌ها در صنعت نیز روزبه‌روز افزایش یافته است.

اخیراً تلاش‌هایی برای پیدا کردن جایگزین‌هایی برای بازوهای رباتیک کلاسیک انجام شده است که استفاده از مکانیزم‌های حلقه بسته در ساختار ربات را پیشنهاد می‌دهند. استفاده از مکانیزم‌های حلقه بسته مزایایی از قبیل افزایش صلبیت، استحکام نسبت به وزن ربات، قابلیت مانور بالا و دقت بالاتر نسبت به مکانیزم‌های حلقه باز کلاسیک دارد. از طرف دیگر ربات‌هایی که از مکانیزم حلقه بسته در ساختار خود استفاده می‌کنند دارای معایبی از جمله فضای کاری کوچک و پیچیدگی محاسبات دینامیکی و سینماتیکی می‌باشند.

با توجه به نیاز مبرم و همچنین بومی‌سازی دانش فنی به شبیه‌سازهایی با توانایی حرکت با شش درجه آزادی که کاربردهای گوناگونی در صنایع نظامی و غیرنظامی دارند؛ حل سینماتیک این

گونه ربات‌ها بسیار حائز اهمیت است. از جمله کاربردهای مکانیزم استوارت می‌توان به شبیه‌سازهای پرواز، شبیه‌سازهای خودرو، شبیه‌سازهای تست جاده محصولات نظامی، ایجاد تلاطم در مخازن محصولات شیمیایی، موقعیت دهی تفنگ‌های لیزری، موقعیت‌دهی آینه تلسکوپ‌ها، کنترل ارتعاشات اشاره نمود.

تحلیل سینماتیک ربات‌های موازی شامل حل سینماتیک مستقیم و معکوس می‌باشد. مدلسازی سینماتیکی ربات‌های موازی بر خلاف ربات‌های سری به دلیل وجود قیود سینماتیکی و زنجیره‌ی حلقه بسته دارای پیچیدگی‌های ذاتی است. سینماتیک مستقیم استوارت، منجر به یک دستگاه جبری غیرخطی می‌گردد که حل آن بسیار پیچیده و دارای پاسخ‌های چندگانه است. استفاده از روش‌های عددی برای این مسئله، نیازمند حدس اولیه مناسب و نزدیک به جواب می‌باشد. در ضمن هیچ تضمینی برای همگرایی به جواب‌های واقعی وجود ندارد.

رغوان<sup>۱</sup> در سال ۱۹۹۱ و رونگا و است<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۲ اولین کسانی بودند که به ۴۰ جواب برای سینماتیک مستقیم استوارت در ناحیه اعداد مختلط دست یافتند. هاستی<sup>۳</sup> در سال ۱۹۹۶ با استفاده از روش حذف و به دست آوردن یک چندجمله‌ای تک متغیره از درجه ۴۰، توانست حلی برای سینماتیک مستقیم ارائه کند. دیتمایر<sup>۴</sup> نیز در سال ۱۹۹۸ روشی برای وجود ۴۰ جواب را نشان می‌دهد. اینوستی<sup>۵</sup> در سال ۲۰۰۱ توانست معادلات قیود را با یک معادله خطی<sup>۶</sup> بیان کند. او با ب.م.م.گیری از چندجمله‌ای میانی با درجه ۳۲۰ به یک چندجمله‌ای از درجه ۴۰ دست یافت. دهننگرا<sup>۷</sup> و همکارانش از روش ترکیبی گروبنر-سیلوستر<sup>۸</sup> برای محاسبه چندجمله‌ای درجه ۴۰ از ماتریس ضرایب ۱۵×۱۵ استفاده کردند که در آن ماتریس سیلوستر با محاسبه پایه‌های گروبنر برای پلتفرم استوارت به صورت صفحه‌ای به دست می‌آید. با این وجود این محاسبات سمبلیک به دلیل بازده پایین محاسبات با شکست روبرو شد.

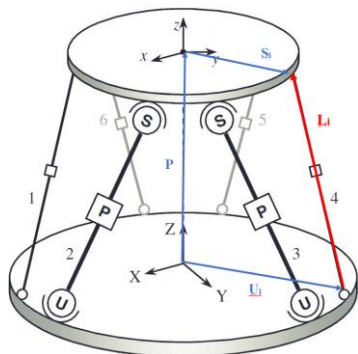
<sup>۶</sup> Monomial  
<sup>۷</sup> Dhingra  
<sup>۸</sup> Gröbner-sylvester hybrid method

<sup>۱</sup> Raghvan  
<sup>۲</sup> Ronga vust  
<sup>۳</sup> Husty  
<sup>۴</sup> Dietmaier  
<sup>۵</sup> Innocenti

موازی این است که سینماتیک مستقیم در آن‌ها به علت وجود معادلات جبری غیرخطی است. بدین منظور برای ساده‌سازی تحلیل سینماتیک مستقیم این ربات، حالتی خاص که در آن پلتفرم‌های ربات نسبت به هم متشابه هستند، در نظر گرفته می‌شود.

### سینماتیک معکوس

هدف از سینماتیک معکوس بدست آوردن موقعیت مفاصل کشویی با توجه به دانستن موقعیت مرکز صفحه‌ی متحرک می‌باشد. در شکل ۲ نمایی از ربات موازی استوارت به همراه مختصات بکار رفته در آن آمده است. با توجه به شکل ۲ رئوس پلتفرم ثابت پایینی و رئوس پلتفرم متحرک بالایی را به ترتیب با  $U_i = [u_{xi} \ u_{yi} \ 0]^T$  و  $S_i = [s_{xi} \ s_{yi} \ 0]^T$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) نسبت به دستگاه ثابت  $O_1-X_1Y_1Z_1$  و متحرک  $O_2-X_2Y_2Z_2$  بیان شده‌اند. موقعیت مبدا دستگاه محلی نسبت به دستگاه ثابت با بردار  $P = [X \ Y \ Z]^T$  تعریف می‌شود.



شکل ۲- طرح شماتیکی زنجیره‌ی سینماتیکی حلقه بسته

همان طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، یک دستگاه مختصات ثابت متصل به صفحه پایینی و یک دستگاه مختصات متحرک متصل به صفحه بالایی را در نظر می‌گیریم. مختصات رئوس صفحه بالا در دستگاه متحرک را با بردار  $S_i$  و مختصات رئوس صفحه پایین در دستگاه ثابت را با بردار  $U_i$  نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه پلتفرم‌های ربات متشابه‌اند، می‌توان برای هر زنجیره‌ی سینماتیکی حلقه بسته ربات استوارت می‌توان طول لینک‌های ربات را به صورت زیر را نوشت:

$$L_i = S_i - U_i \quad (1)$$

که در آن  $S_i = R S_i + P$  و ماتریس دوران  $R$  برابر است با:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} \quad (2)$$

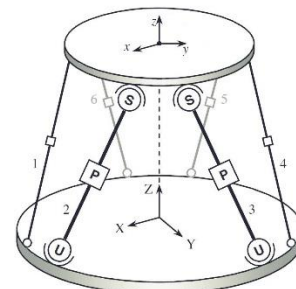
معادلات قیود سینماتیکی متناظر با این شرایط به صورت زیر قابل بیان است:

$$L_i^2 = (S_i - U_i)^T (S_i - U_i) \quad (3)$$

برای حل سینماتیک مستقیم روش‌های گوناگونی از جمله روش حذف<sup>۹</sup>، روش تکرار<sup>۱۰</sup> و روش پایه‌های گروبنر<sup>۱۱</sup> وجود دارد. با استفاده از تئوری گروبنر دستگاه معادلات قیود سینماتیکی ربات به یک سیستم دیگر که دارای همان جواب است، انتقال می‌یابد. روش حذف جبری که معمولاً معادلات جبری را به فرم معادلات چندجمله‌ای یک متغیره بیان می‌کند، روشی مناسب برای حل در فرم بسته سینماتیک مستقیم است. در این روش سینماتیک مستقیم به سادگی قابل حل بوده و لذا ارزش تئوری بالایی دارد.

### معرفی ربات موازی استوارت

مکانیزم استوارت اولین بار توسط آقای استوارت در سال ۱۹۶۵ ساخته شد و به علت قابلیت عملکرد بسیار بالا مورد توجه محققین قرار گرفت. این ربات شامل سکوی مثلثی شکلی است که پلتفرم‌ها توسط محرک‌های خطی با مفاصل کروی و یونیورسال با یکدیگر در ارتباط‌اند. از جمله مزایای این ربات می‌توان به ساختار ساده، سختی بالا، دقت بسیار بالای مکانیزم، تحمل نسبت وزن به بار بالا، قابلیت مانور بالا و دارا بودن شش درجه آزادی اشاره کرد. از معایب استوارت وجود اصطکاک در مفاصل و بروز خمش به واسطه‌ی افزایش طول عملگرها می‌توان نام برد. لذا مدلسازی و تحلیل ربات استوارت برای موقعیت‌دهی دقیق و عملکرد دینامیکی خوب در بارگذاری‌های بالا بسیار حائز اهمیت است. در شکل ۱ طرح شماتیکی از ربات ۶-۶ استوارت آمده است.



شکل ۱- طرح شماتیکی از ربات ۶-۶ استوارت

در حالت خاص به جای مکانیزم با ساختار سینماتیکی مفاصل کروی و یونیورسال (6-USP) می‌توان از ساختار مشابه با مفاصل کروی در دو طرف محرک‌های خطی (6-SPS) استفاده نمود. بررسی‌های انجام‌شده سینماتیک یکسانی را برای هر دو ساختار نشان می‌دهد.

### سینماتیک ربات استوارت

تحلیل سینماتیک ربات‌های موازی شامل حل سینماتیک مستقیم و معکوس می‌باشد. بر خلاف ربات‌های سری، مساله‌ی سینماتیک معکوس در ربات‌های موازی ساده و مساله‌ی سینماتیک مستقیم مشکل است. دلیل مشکل بودن سینماتیک مستقیم در ربات‌های

<sup>۱۱</sup> The Gröebner basis method

<sup>۹</sup> The elimination method  
<sup>۱۰</sup> The continuation method

مختصات رئوس صفحه‌های پایین و بالای ربات استوارت ۶-۶ متشابه در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۱: مختصات رئوس صفحه پایین در دستگاه ثابت (بر حسب متر)

$i$	$U_i$	$S_i$
۱	(۰/۳۵۵ ، ۰/۰۶۲ ، ۰)	(۰/۱۵۳ ، ۰/۱۲۹ ، ۰)
۲	(-۰/۱۲۳ ، ۰/۳۳۸ ، ۰)	(۰/۰۳۵ ، ۰/۱۹۷ ، ۰)
۳	(-۰/۲۳۱ ، ۰/۲۷۶ ، ۰)	(-۰/۱۸۸ ، ۰/۰۶۸ ، ۰)
۴	(-۰/۲۳۱ ، -۰/۲۷۶ ، ۰)	(-۰/۱۸۸ ، -۰/۰۶۸ ، ۰)
۵	(-۰/۱۲۳ ، -۰/۳۳۸ ، ۰)	(۰/۰۳۵ ، -۰/۱۹۷ ، ۰)
۶	(۰/۳۵۵ ، -۰/۰۶۲ ، ۰)	(-۰/۱۵۳ ، -۰/۱۲۹ ، ۰)

$$r_4 r_8 - r_5 r_7 - r_3 = 0 \quad (۹)$$

$$r_2 r_7 - r_1 r_8 - r_6 = 0 \quad (۱۰)$$

$$r_1 r_5 - r_2 r_4 - r_9 = 0 \quad (۱۱)$$

در صورتی که متغیرهای  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$  معلوم گردند، می‌توان دیگر متغیرهای ماتریس دوران  $\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$  را نیز یافت. پس آن‌ها را از معادلات حذف می‌کنیم. در نتیجه شش معادله از سینماتیک با شش مجهول  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, X, Y, Z$  داریم که در آن‌ها مقادیر  $L_i, u_{xi}, u_{yi}, S_{xi}, S_{yi}$  معلوم هستند.

### روش حذف (خطی‌سازی)

پس از بسط دادن معادله‌ی ۴ به منظور خطی‌سازی معادلات جبری، با استفاده از تغییر متغیر زیر می‌توان رابطه‌ی ۴ زیر را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$s_{xi} u_{xi} r_1 + s_{xi} u_{yi} r_2 - s_{xi} p + s_{yi} u_{xi} r_4 + s_{yi} u_{yi} r_5 \quad (۱۲)$$

$$-s_{yi} q + u_{xi} X + u_{yi} Y - \frac{w}{2} + m_i = 0 \quad (۱۳)$$

که در آن

$$m_i = \frac{L_i^2 - u_{xi}^2 - u_{yi}^2 - s_{xi}^2 - s_{yi}^2}{2} \quad (۱۴)$$

$$p = r_1 X + r_2 Y + r_3 Z \quad (۱۵)$$

$$q = r_4 X + r_5 Y + r_6 Z \quad (۱۶)$$

$$w = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (۱۷)$$

معادله‌ی ۱۲ معادله‌ای خطی بر حسب متغیرهای  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5, u, v, X, Y, Z$  است که در فرم ماتریسی داریم:

$$M_{6 \times 10} t = 0 \quad (۱۷)$$

که در آن

$$M = \begin{bmatrix} s_{x1} u_{x1} & s_{x1} u_{y1} & -s_{x1} & s_{y1} u_{x1} & s_{y1} u_{y1} & -s_{y1} & u_{x1} & u_{y1} & -\frac{1}{2} & m_1 \\ s_{x2} u_{x2} & s_{x2} u_{y2} & -s_{x2} & s_{y2} u_{x2} & s_{y2} u_{y2} & -s_{y2} & u_{x2} & u_{y2} & -\frac{1}{2} & m_2 \\ s_{x3} u_{x3} & s_{x3} u_{y3} & -s_{x3} & s_{y3} u_{x3} & s_{y3} u_{y3} & -s_{y3} & u_{x3} & u_{y3} & -\frac{1}{2} & m_3 \\ s_{x4} u_{x4} & s_{x4} u_{y4} & -s_{x4} & s_{y4} u_{x4} & s_{y4} u_{y4} & -s_{y4} & u_{x4} & u_{y4} & -\frac{1}{2} & m_4 \\ s_{x5} u_{x5} & s_{x5} u_{y5} & -s_{x5} & s_{y5} u_{x5} & s_{y5} u_{y5} & -s_{y5} & u_{x5} & u_{y5} & -\frac{1}{2} & m_5 \\ s_{x6} u_{x6} & s_{x6} u_{y6} & -s_{x6} & s_{y6} u_{x6} & s_{y6} u_{y6} & -s_{y6} & u_{x6} & u_{y6} & -\frac{1}{2} & m_6 \end{bmatrix}$$

و همچنین

$$T = [r_1 \quad r_2 \quad p \quad r_4 \quad r_5 \quad q \quad X \quad Y \quad w \quad 1]^T \quad (۱۹)$$

با جداسازی دستگاه معادلات فوق داریم:

$$\begin{bmatrix} s_{x1} u_{x1} & s_{x1} u_{y1} & -s_{x1} & s_{y1} u_{x1} & s_{y1} u_{y1} & -s_{y1} \\ s_{x2} u_{x2} & s_{x2} u_{y2} & -s_{x2} & s_{y2} u_{x2} & s_{y2} u_{y2} & -s_{y2} \\ s_{x3} u_{x3} & s_{x3} u_{y3} & -s_{x3} & s_{y3} u_{x3} & s_{y3} u_{y3} & -s_{y3} \\ s_{x4} u_{x4} & s_{x4} u_{y4} & -s_{x4} & s_{y4} u_{x4} & s_{y4} u_{y4} & -s_{y4} \\ s_{x5} u_{x5} & s_{x5} u_{y5} & -s_{x5} & s_{y5} u_{x5} & s_{y5} u_{y5} & -s_{y5} \\ s_{x6} u_{x6} & s_{x6} u_{y6} & -s_{x6} & s_{y6} u_{x6} & s_{y6} u_{y6} & -s_{y6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ p \\ r_4 \\ r_5 \\ q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{x1} X + u_{y1} Y - \frac{w}{2} + m_1 \\ u_{x2} X + u_{y2} Y - \frac{w}{2} + m_2 \\ u_{x3} X + u_{y3} Y - \frac{w}{2} + m_3 \\ u_{x4} X + u_{y4} Y - \frac{w}{2} + m_4 \\ u_{x5} X + u_{y5} Y - \frac{w}{2} + m_5 \\ u_{x6} X + u_{y6} Y - \frac{w}{2} + m_6 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه فوق به روش کرامر خواهیم داشت:

با بهره‌گیری از زوایای اویلر، ابتدا دورانی حول محور  $Y$  به اندازه‌ی  $\theta$ ، سپس دورانی به اندازه‌ی  $\phi$  حول محور  $X$  و در نهایت دورانی حول  $Z$  به اندازه‌ی  $\psi$  ماتریس دوران بدست می‌آید. به منظور حل سینماتیک معکوس، زوایای دوران  $[\phi \theta \psi] = [10 \ 20 \ 30]$  و بردار جابجایی  $P = [0 \ 0 \ 2]^T$  را در نظر می‌گیریم. با اعمال ورودی‌ها و استفاده از رابطه‌ی ۳، طول محرک‌ها برابر است با:

جدول ۲- طول لینک‌ها

$i$	$L_i$	$i$	$L_i$
۱	۲,۳۱۲۱۹۶۸۳	۴	۲,۴۰۱۹۲۳۹۶
۲	۲,۳۴۸۲۸۶۰۸	۵	۲,۳۱۸۶۴۲۴۱
۳	۲,۲۸۳۳۰۷۹۵	۶	۲,۱۵۰۰۳۰۶۸

### حل سینماتیک مستقیم ربات موازی استوارت

هدف از سینماتیک مستقیم بدست آوردن موقعیت و جهت‌گیری مرکز صفحه‌ی متحرک با توجه به معلوم بودن طول لینک‌ها می‌باشد. در این مقاله با استفاده از الگوریتم حذف به بررسی مسئله سینماتیک مستقیم استوارت ۶-۶ می‌پردازیم و به کمک ماتریس سیلوستر  $15 \times 15$  و بدون فاکتورگیری به چندجمله‌ای درجه ۲۰ می‌رسیم. با استفاده از معادله‌ی ۳ داریم:

$$(s_{xi} r_1 + s_{yi} r_4 + X - u_{xi})^2 + (s_{xi} r_2 + s_{yi} r_5 + Y - u_{yi})^2 + (s_{xi} r_3 + s_{yi} r_6 + Z)^2 - L_i^2 = 0 \quad (۴)$$

از طرفی با توجه به خاصیت تعامد ماتریس دوران تنها کافی است مختصه‌های  $\Gamma_1 \sim \Gamma_6$  را بیابیم زیرا که  $\Gamma_7 \sim \Gamma_9$  بر حسب ۶ مختصه‌ی دیگر قابل‌بیان است. با توجه به اینکه ماتریس متعامد است، باید شرایط زیر ارضا گردد. لذا داریم:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \quad (۵)$$

$$r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 = 1 \quad (۶)$$

$$r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 = 0 \quad (۷)$$

$$r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 = 1 \quad (۸)$$

$$F = a_{51} X + a_{52} Y + a_{53} w + a_{54} \quad (41)$$

$$G = a_{61} X + a_{62} Y + a_{63} w + a_{64} \quad (42)$$

با توجه به ۶ تساوی ۳۱ تا ۳۶، ۶ معادلات ۴۳ تا ۴۸ استخراج می‌گردند.

$$P_1 = f_1 f_6 - f_4^2 = 0 \quad (43)$$

$$P_2 = f_2 f_6 - f_5^2 = 0 \quad (44)$$

$$P_3 = f_3 f_6 - f_4 f_5 = 0 \quad (45)$$

$$P_4 = f_1 f_5 - f_3 f_4 = 0 \quad (46)$$

$$P_5 = f_2 f_4 - f_3 f_5 = 0 \quad (47)$$

$$P_6 = f_1 f_2 - f_3^2 = 0 \quad (48)$$

معادلات ۴۳ تا ۴۸ تنها بر حسب مجهولات  $X, Y, w$  و از درجه‌ی ۴ می‌باشد لذا ترکیب توانی آن‌ها برابر است با:

$[w^4 w^3 y w^2 y^2 w y^3 y^4 w^3 w^2 y w y^2 y^3 w^2 w y y^2 w y 1]$   
 پس ماتریس ضرایب که تنها بر حسب یک متغیر  $X$  است، باید ماتریس سیلوستر  $15 \times 15$  باشد. با توجه به شش معادله‌ی فوق ۹ معادله‌ی دیگر باید مستقل خطی نسبت به هم باشند. از طرفی باید این معادلات از درجه‌ی ۴ و تنها بر حسب مجهولات  $X, Y, w$  بدست آید. پس ۹ چندجمله‌ای ۴۹ تا ۵۷ را به دست خواهیم آورد:

$$P_7 = DP_1 - AP_3 - a_0 X P_4 \quad (49)$$

$$P_8 = FP_1 - BP_3 - a_0 Y P_4 \quad (50)$$

$$P_9 = DP_3 - AP_2 + a_0 X P_5 \quad (51)$$

$$P_{10} = FP_3 - BP_3 + a_0 Y P_5 \quad (52)$$

$$P_{11} = DP_4 + AP_5 - a_0 X P_6 \quad (53)$$

$$P_{12} = FP_4 + BP_5 - a_0 Y P_6 \quad (54)$$

$$P_{13} = FP_7 - BP_9 - a_0 Y P_{11} \quad (55)$$

$$P_{14} = -a_0 C P_5 + DP_7 + BP_{10} - a_0 X P_{11} \quad (56)$$

$$P_{15} = DP_7 - FP_8 - AP_9 + BP_{10} - a_0 X P_{11} + a_0 Y P_{12} \quad (57)$$

در ادامه با جداسازی متغیر  $X$  از روابط فوق و بازنویسی آن در فرم ماتریسی داریم:

$$M_{15 \times 15} T = 0 \quad (58)$$

که در آن  $M$  ماتریس ضرایب بر حسب  $X$  و  $T$  به صورت زیر می‌باشد:  
 $T = [w^4 w^3 y w^2 y^2 w y^3 y^4 w^3 w^2 y w y^2 y^3 w^2 w y y^2 w y 1]$   
 دستگاه معادلات فوق در صورتی دارای جواب است که:

$$\det(M_{15 \times 15}) = 0 \quad (60)$$

حل دستگاه فوق منجر به یک چندجمله‌ای از درجه ۲۰ تنها بر حسب متغیر  $X$  می‌شود که با حل آن می‌توان تمامی مقادیر ممکن برای  $X$  را یافت.

$$\sum_{i=1}^{20} e_i X^i = 0 \quad (61)$$

که در آن  $e_i$  ثابت‌های حقیقی است که تنها وابسته به ورودی‌ها است. با حل این معادله ۲۰ جواب برای متغیر  $X$  در ناحیه مختلط بدست می‌آید. با توجه به معادلات ۳۱ تا ۳۶ برای  $I_3, I_6, Z$  دو مجموعه

$$\begin{cases} a_0 r_1 + a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} w + a_{14} = 0 \\ a_0 r_2 + a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} w + a_{24} = 0 \\ a_0 p + a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} w + a_{34} = 0 \\ a_0 r_4 + a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} w + a_{44} = 0 \\ a_0 r_5 + a_{51} X + a_{52} Y + a_{53} w + a_{54} = 0 \\ a_0 q + a_{61} X + a_{62} Y + a_{63} w + a_{64} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

با توجه به ماتریس فوق مجهولات  $r_1, r_2, r_4, r_5, p, q$  بر حسب  $X, Y, w$  قابل بیان‌اند.

$$\begin{cases} a_0 r_1 + a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} w + a_{14} = 0 \\ a_0 r_2 + a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} w + a_{24} = 0 \\ a_0 p + a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} w + a_{34} = 0 \\ a_0 r_4 + a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} w + a_{44} = 0 \\ a_0 r_5 + a_{51} X + a_{52} Y + a_{53} w + a_{54} = 0 \\ a_0 q + a_{61} X + a_{62} Y + a_{63} w + a_{64} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

در نتیجه

$$r_1 = -a^{-1}_0 (a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} w + a_{14}) \quad (23)$$

$$r_2 = -a^{-1}_0 (a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} w + a_{24}) \quad (24)$$

$$p = -a^{-1}_0 (a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} w + a_{34}) \quad (25)$$

$$r_4 = -a^{-1}_0 (a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} w + a_{44}) \quad (26)$$

$$r_5 = -a^{-1}_0 (a_{51} X + a_{52} Y + a_{53} w + a_{54}) \quad (27)$$

$$q = -a^{-1}_0 (a_{61} X + a_{62} Y + a_{63} w + a_{64}) \quad (28)$$

که در آن

$$a_0 = \det(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (29)$$

$$a_{ij} = \det(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{j+6}, c_{i+1}, \dots, c_6) \quad (30)$$

و  $c_j$  بیانگر ستون  $j$ م از ماتریس  $M$  است.

### بیان معادلات سینماتیک بر حسب یک متغیر

با توجه به اینکه تمامی معادلات بر حسب سه متغیر  $X, Y, w$  است لذا با استفاده از سه معادله‌ی تعامد ماتریس دوران و سه معادله‌ی تغییر متغیر شش تساوی زیر که تنها بر حسب مجهولات  $X, Y, w$  است، بیان می‌کنیم. مقادیر  $I_3, I_6, Z$  با ۶ تساوی زیر قابل بیان است.

$$f_1 = r_3^2 = 1 - r_1^2 - r_2^2 = 1 - a_0^{-2} (A^2 + B^2) \quad (31)$$

$$f_2 = r_6^2 = 1 - r_4^2 - r_5^2 = 1 - a_0^{-2} (D^2 + F^2) \quad (32)$$

$$f_3 = r_3 r_6 = -r_1 r_4 - r_2 r_5 = a_0^{-2} (AD + BF) \quad (33)$$

$$f_4 = r_3 z = p - r_1 X - r_2 Y = a_0^{-1} (-C + AX + BY) \quad (34)$$

$$f_5 = r_6 z = q - r_4 X - r_5 Y = a_0^{-1} (-G + DX + FY) \quad (35)$$

$$f_6 = w - X^2 - Y^2 \quad (36)$$

که در آن

$$A = a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} w + a_{14} \quad (37)$$

$$B = a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} w + a_{24} \quad (38)$$

$$C = a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} w + a_{34} \quad (39)$$

$$D = a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} w + a_{44} \quad (40)$$

جواب وجود دارد، در نتیجه در مجموع ۴۰ جواب برای موقعیت و جهت گیری وجود دارد که تنها ۸ جواب حقیقی و قابل قبول می باشد. با استفاده از فضای پوچی و جایگذاری مقادیر بدست آمده، دو مجهول  $Y$  و  $W$  نیز بدست می آیند. با توجه به اینکه تمامی مجهولات را بر حسب سه مجهول  $X, Y, W$  بیان کرده ایم، می توان پارامترهای  $I_1, I_2, I_4, I_5, p, q$  را نیز به دست آورد.

### مثال عددی

حل تحلیلی سینماتیک معکوس ربات موازی استوارت مشابه تمام ربات های موازی دارای حلی مشخصی می باشد. درحالی که مسئله سینماتیک مستقیم ربات های موازی به حل یک چندجمله ای با درجه ی بالا منجر می شود که با حل این معادله چندین جواب برای ربات به دست خواهد آمد. تعدادی از جواب ها به دلیل موهومی بودن از دسته جواب ها حذف می شوند تعدادی از جواب های حقیقی نیز در فضای کاری ربات نیستند. بقیه جواب های حقیقی که با شرایط (قیود مکانیکی) ربات سازگار بوده و تمامی این جواب ها صحیح می باشند. بر خلاف سینماتیک معکوس، در سینماتیک مستقیم هدف بدست آوردن موقعیت مکانی و دورانی صفحه ی متحرک ربات با توجه به معلوم بودن طول محرک های خطی است. در این بخش یک مثال عددی برای تأیید صحت نتایج بدست آمده، آورده شده است. با اعمال مقادیر طول محرک های خطی، که در جدول ۲ لیست شده است، جواب های ممکن سینماتیک مستقیم در جدول ۳ آورده شده اند. از آنجا که مقادیر  $Z$  با توجه به ساختار ربات نمی تواند منفی باشد، لذا تنها ۴ جواب که در شکل ۳ مشاهده می شوند، قابل قبول می باشد.

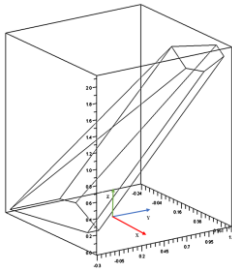
جدول ۳- نتایج حاصل از سینماتیک مستقیم

i	X	Y	Z	$\phi$	$\theta$	$\psi$
۱-۲	۰/۴۳۸	۱/۱۶۲	$\pm 1/911$	۵۲	-۸۵	۶۵
۳-۴	۰/۴۹۹	۱/۰۰۰	$\pm 2/۰۰۰$	۳۰	۲۰	۱۰
۵-۶	۰/۷۲۶	۱/۱۶۲	$\pm 1/795$	-۵۲	-۴۶	۶۷
۷-۸	۰/۷۴۵	۱/۱۹۶	$\pm 1/769$	-۴۲	-۳۶	۵۹

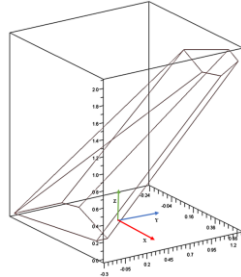
واضح است که با توجه به ساختار ربات و قیود مکانیکی ربات نمی تواند در راستای  $Z$  مقدار منفی داشته باشد. لذا در مجموع تنها ۴ جواب برای سینماتیک مستقیم ربات استوارت وجود خواهد داشت که در جدول (۴) آورده شده است. همچنین این ۴ موقعیت نیز در شکل ۳ ترسیم شده است. همانطور که در شکل ۳-ب نیز مشخص است، پاسخ شماره ی ۳ موجود در جدول ۳ با جواب سینماتیک معکوس همخوانی دارد.

$$pos = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad pos = \begin{bmatrix} 0.4385 & 1.1623 & 1.9110 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \end{bmatrix} \quad \Theta = \begin{bmatrix} 51.88 & -84.97 & 64.99 \end{bmatrix}$$



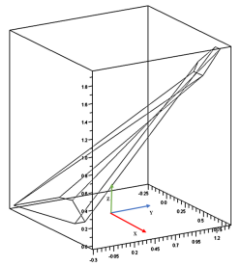
شکل ۳-ب



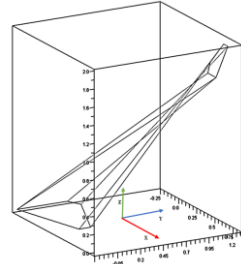
شکل ۳-الف

$$pos = \begin{bmatrix} 0.74508 & 1.1956 & 1.769059 \end{bmatrix} \quad pos = \begin{bmatrix} 0.7264 & 1.1620 & 1.7956 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} -41.78 & -36.40 & 59.60 \end{bmatrix} \quad \Theta = \begin{bmatrix} -52.75 & -46.66 & 67.31 \end{bmatrix}$$



شکل ۳-د



شکل ۳-ج

شکل ۳- جواب های ممکن سینماتیک مستقیم

### نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله ابتدا به بررسی اجزای ساختار ربات استوارت-گوف و مزایا و معایب آن پرداخته شد. در ادامه پس از حل سینماتیک معکوس مکانیزم شش درجه آزادی استوارت، به حل سینماتیک مستقیم با استفاده از روش حذف پرداخته شد. بر اساس این الگوریتم ماتریس  $15 \times 15$  سیلوستر را تشکیل می دهیم و چندجمله ای درجه ۲۰ را از درمیان آن بدون فاکتورگیری و گرفتن بزرگ ترین مخرج مشترک استخراج می کنیم. با حل چندجمله ای فرم بسته ی سینماتیک، تمامی جواب های ممکن بدست می آید. محاسبات این روش نسبتاً دقیق و در زمان کمتری انجام می شود. در انتها برای تصدیق این روش نتایج سینماتیک مستقیم با یک مثال عددی با نتایج بدست آمده از سینماتیک معکوس مورد بررسی قرار گرفت.

### مراجع

- [1] W.L. Xu, J. Bronlund, and J. Kieser, "A Robotic Model of the Human Masticatory System for Reproducing Chewing Behaviors", IEEE Robotics & Automation Magazine, June 2005.
- [2] W.L.Xu, J.-S. Pap, and J.Bronlund, "Design of a Biologically Inspired Parallel Robot for Foods Chewing", IEEE Transactions on industrial electronics, vol. 55, no. 2, February 2008.
- [3] Ping Ji and Hongtao Wu, "A Closed-Form Forward Kinematics Solution for the 6-6 Stewart Platform", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 14, no. 4, August 2001.

- [4] Tae-Young Lee, Jae -Kyung Shim, "Forward kinematics of general 6-6 Stewart platform using algebraic elimination", Mechanism and Machine Theory 36 (2001) 1073-1085 .
- [5] Dongming Gan, Qizheng Liao, Jian S. Dai b, Shimin Wei, L.D. Seneviratne, "Forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism using Gröbner bases", Mechanism and Machine Theory 44 (2009) 1640-1647.
- [6] Xiguang Huang, Qizheng Liao, Shimin Wei, "Closed-form forward kinematics for a symmetrical 6-6 Stewart platform using algebraic elimination", Mechanism and Machine Theory 45 (2010) 327-334.
- [7] Hafez Tari, Hai-Jun Su, Jonathan D. Hauenstein, "Classification and complete solution of the kinetostatics of a compliant Stewart-Gough platform", Mechanism and Machine Theory 49 (2012) 177-186.