مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دوره 15، شماره 12، ص‌ص 265-271

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی همگرایی درروش آیزوژئومتریک در قالب مسئله‌ی الاستیک آزمون فشار قطری با تکینگی حاصل بار نقطه‌ای

بهروز حسنی[1*]، عماد بیدخوری[2]

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد
2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد
* مشهد، صندوق پستی 1111-91775، b_hassani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 14 شهریور 1394
پذیرش: 15 آبان 1394
ارائه در سایت: 09 آذر 1394

کلید واژگان:
آیزوژئومتریک
آزمون فشار قطری
تکینگی
همگرایی

چکیده

با غنی‌سازی h و p و ترکیب آن‌دو درروش آیزوژئومتریک با امکان انتخاب پیوستگی‌های مختلفی که این روش در اختیار می‌گذارد، همگرایی و خطای انتخاب توابع شکل با درجات و پیوستگی‌های مختلف مطالعه شد. این کار در قالب تحلیل عددی یک مسئله‌ی واقعی و پرکاربرد به نام آزمون فشار قطری صورت گرفت. نکته‌ی مثبت این مسئله دایره‌ای بودن هندسه‌ی مسئله بود، زیرا که روش آیزوژئومتریک با استفاده از توابع شکل نربز توانایی بالقوه‌ای را در اختیار طراح قرار می‌دهد تا با استفاده از کمترین تعداد المان، هندسه‌ی دقیق دایره‌ای مسئله را تولید کند. بارگذاری نقطه‌ای شرایط تکینگی را به مسئله وارد کرد. با غنی‌سازی به‌صورت یکنواخت پارامترهای تأثیرگذار به نوع توابع شکل ، درجه و پیوستگی آن‌ها محدود شد. با استفاده از غنی‌سازی‌های مختلف و افزایش درجات آزادی میزان همگرایی جواب تقریبی به جواب دقیق حاصل از تئوری الاستیسیته تحت بررسی قرار گرفت. دیده شد که خطا درروش آیزوژئومتریک و در حضور تکینگی مذکور لزوما با افزایش درجه‌ی توابع شکل کاهش نمی‌یابد بلکه میزان پیوستگی عامل تعیین‌کننده‌ی دیگری در مقدار خطا است. همچنین ملاحظه گشت که نرخ همگرایی در حضور تکینگی برای تمامی درجات توابع شکل نربز و لاگرانژی و تمام پیوستگی‌ها به یک مقدار همگرا می‌شود. درروند غنی‌سازی در ابتدا حداقل تعداد المان و درجات آزادی استفاده شد تا تحلیل و بررسی مسئله قابل‌فهم و ملموس باشد. سپس در مراحل بعدی با روش‌های h و p و ترکیب آن‌ها غنی‌سازی صورت گرفت.

Study of convergence in isogeometric method in the framework of “Diametral Compression Test” elasticity problem with point load singularity

Behrooz Hassani*, **Emad Bidkhori**

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran.
* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, b_hassani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 September 2015
Accepted 06 November 2015
Available Online 30 November 2015

Keywords:
Isogeometric
Diametral Compression Test
Singularity
Convergence

ABSTRACT

Applying and combining h and p refinement techniques in isogeometric method with the possibility of continuity elevation that this method provides, convergence and error of using different kinds of shape functions with different orders and continuities is investigated. It is done in a numerical analysis framework of a practical and well known problem called “Diametral Compression Test”. The advantage of this case is its circular geometry, since IGA provides designers with high potential of the possibility of using minimum elements to make the exact circular geometry. The point load inserts singularity to the problem. The refinement is utilized uniformly as the effective parameters are limited to the kind, order and continuity of shape functions. With different refinement techniques the convergence of approximated solution to the exact solution of linear elasticity is examined. It is concluded that with the singularity that is mentioned, the error in IGA is not necessarily reduced with a rise in order, more precisely the level of continuity is another important issue to determine error rise. It is also seen that in the presence of point load singularity the rate of error converges to the same value for all degrees of NURBS and Lagrangian shape functions with any continuity. At the beginning of refinement process the minimum number of elements is used to make the process clearer to understand. In the next steps h and p techniques and their combination are used to refine the model.

1- مقدمه

برای تحلیل مسائل مهندسی سازه با کمک کامپیوتر مهمترین و اولین قدم ارائه و گسترش الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم است. تمامی این الگوریتم‌ها را می‌توان دستورالعملی برای حل عددی یک معادله دیفرانسیل دانست. حل عددی بر خلاف حل تحلیلی، جواب تقریبی مسئله را می‌دهد زیرا که جواب تحلیلی قابل‌دستیابی نیست یا دستیابی به آن سخت

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
B. Hassani, E. Bidkhori, Study of convergence in Isogeometric method in the framework of “Diametral Compression Test” elasticity problem with point load singularity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 12, pp. 265-271, 2015 (in Persian)

است. معادله‌ی دیفرانسیل حاکم از اصول پایه مکانیک حاصل می‌شود و بایستی در یک دامنه‌ی فیزیکی با شرایط مرزی مشخص حل شود.

روش‌های مختلفی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل ارائه‌شده است که بعضی از آن‌ها در حوزه مهندسی بکار گرفته‌شده‌اند. درروش تفاضل محدود[1] مقدار تابع و مشتقاتش در نقاطی گسسته از دامنه تقریب زده می‌شوند. در روش حجم محدود[2]دور نقاط گسسته درون دامنه معادله، حجم محدودی در نظر گرفته‌شده و پس از تبدیل معادله دیفرانسیل به فرم انتگرالی و استفاده از تئوری دیورژانس انتگرال‌های حجم به انتگرال‌های سطح تبدیل می‌شوند. این نوع تحلیل به علت گسسته سازی شبکه‌ای غیر سازه‌ای[3] در دینامیک سیالات محاسباتی کاربرد فراوانی دارد [1]. روش‌های بدون شبکه[4] به دسته‌ای از روش‌ها گفته می‌شود که در آن‌ها نیازی به شبکه‌بندی دامنه‌ی تحلیل نیست. این نوع تحلیل در مسائلی که دامنه دچار تغییر شکل‌های زیادی می‌شود کاربرد دارد [2]. روش المان محدود[5] نوعی فن عددی برای یافتن حل تقریبی مسائل مقدار مرزی هست. این روش با استفاده از حساب تغییرات[6] تابع خطا را در دامنه‌ی مسئله مینیمم کرده و یک حل پایدار را به دست می‌دهد. روش المان محدود دربرگیرنده‌ی تمامی روش‌هایی است که با اتصال تعداد زیادی تابع ساده روی تعداد زیادی زیر دامنه کوچک، به نام المان محدود، یک تابع پیچیده را روی یک دامنه‌ی فیزیکی بزرگ تقریب می‌زند.

درروش المان محدود دامنه‌ی مسئله با المان‌هایی گسسته‌سازی می‌شود. هندسه‌ی هر المان تابعی از مختصات گره‌های آن و نوع توابع پایه[7] انتخابی هست. با به کار گیری اصل ایزوپارامتریک, توابع شکل یکسانی برای تقریب هندسه و فیزیک مسأله استفاده می‌شوند. استفاده از این نوع المان‌ها با توابع پایه‌ی چندجمله‌ای بیشترین استفاده را در کدهای تحلیلی المان محدود دارد، به‌طوری‌که واژه‌ی "المان محدود کلاسیک" به این نوع تحلیل اطلاق می‌شود. در سال‌های اخیر به علت استفاده گسترده از توابع پایه‌ی نربز[8] در نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر[9] کوشش‌هایی توسط هیوز و همکارانش انجام شد تا از این توابع در تقریب فیزیک مسئله نیز استفاده شود [3]. جایگزینی این توابع به‌جای توابع کلاسیک چندجمله‌ای در تحلیل المان محدود به نوآوری‌ها و دستاوردهای زیادی منجر شد و نام "آیزوژئومتریک"[10] برای آن انتخاب شد.

مزیت اصلی استفاده از توابع نربز توانایی آن‌ها در ایجاد پیوستگی مرتبه‌ی بالاتر از صفر در مرز المان‌ها هست. با این مزیت تولید هندسه‌های دقیقتر با توابع شکل نربز امکان‌پذیر است؛ در نتیجه با استفاده از روش ایزوپارامتریک می‌توان جواب‌های دقیق‌تر برای فیزیک مسأله بدست آورد. پس از ارائه روش آیزوژئومتریک تحقیقات گسترده‌ای برای استفاده از آن در تحلیل‌های مختلف انجام شد. کوترل و همکاران از آن در تحلیل ارتعاشات سازه‌ها استفاده کردند و نشان دادند استفاده از آیزوژئومتریک خطای کمتری در تخمین فرکانس‌ها دارد [4]. بازیلو و همکاران به تحلیل آیزوژئومتریک در برخورد سازه-سیال پرداختند [5]. الگوئد و همکارانش از آن در تحلیل مواد الاستیک غیرخطی و پلاستیک بهره بردند [6]. لورنزی و همکاران از آن در بهتر کردن الگوریتم‌های تماس استفاده کردند [7]. حسنی و همکارانش از آن در بهینه‌سازی شکل بهره برد [8]. ورهوسل و همکاران از آن در مکانیک شکست استفاده کردند [9]. همچنین نوآوری‌های زیادی در کد نویسی آن برای بهبود قدرتش در تحلیل‌های عددی انجام گرفت. هیوز و همکاران روشی کارآمدتر در انتخاب نقاط گوسی ارائه کردند [10].کوترل و همکاران از ترکیب روش h و p روش k را برای بهسازی شبکه ارائه کرد [11]. بازیلوز و همکاران به مزایای استفاده از تی-اسپیلاین‌ها[11] به علت کمتر بودن نقاط کنترلی‌شان در تحلیل آیزوژئومتریک پرداختند [12].

بااینکه ده سال از معرفی آیزوژئومتریک می‌گذرد اما هنوز این روش در کاربرد مورد انتظار را بدست نیاورده است. هنوز کد نویسان رغبت بیشتری به استفاده از "المان محدود کلاسیک" در موارد کاربردی از خود نشان می‌دهند. یک مزیت مهم آیزوژئومتریک امکان بهبود تحلیل مسئله بدون تغییر در هندسه مسئله است، اما این به آن معنی نیست که هندسه مسئله می‌تواند به‌راحتی در هر نوع تحلیلی مورداستفاده قرار گیرد. به عبارتی شرایط تحلیل به روی نحوه انتخاب بردار گرهی و نقاط کنترلی تأثیر زیادی دارد، درحالی‌که در کدهای المان محدود کلاسیک این تأثیر کمتر است. مزیت‌ها و کاستی‌هایی که دو روش نسبت به هم دارند و همچنین غنی بودن الگوریتم‌ها و کدهای نوشته‌شده با "المان محدود کلاسیک" محققین را به سمت سازگار کردن کدها و الگوریتم‌های المان محدود کلاسیک با روش آیزوژئومتریک برده است. در این راستا مطالعه‌ی بنیادی روش آیزوژئومتریک و مقایسه‌ی آن با المان محدود کلاسیک می‌تواند راه را برای برطرف کردن ضعف‌ها و تقویت نقاط برتری این روش نسبت به المان محدود کلاسیک باز کند تا مهندسان و کد نویسان با آگاهی بیشتری به سمت جایگذاری توابع نربز در کدهای المان محدود بروند.

در این مقاله از روش آیزوژئومتریک و المان محدود کلاسیک در تحلیل الاستیک یک مسئله معمول استفاده می‌شود تا بتوان همگرایی خطا و افزایش دقت را در روش آیزوجئومتریک با غنی‌سازی h، p و ترکیب آن‌دو در حضور پیوستگی‌های مختلف، مطالعه کرد. این مسئله آزمون فشار قطری به‌روی یک دیسک همگن الاستیک است. ازآنجایی‌که مزیت اصلی استفاده از توابع نربز امکان تولید هندسه‌های دایره‌ای است، هندسه‌ی دیسک با حداقل تعداد المان ممکن قابل ساخت است. وجود تکینگی براثر بار نقطه‌ای شرایط ویژه‌ای را به نرخ کاهش خطا در المان محدود و آیزوژئومتریک اعمال می‌کند. در این مقاله هدف بررسی و مقایسه کاهش خطا در اثر غنی‌سازی h و p و ترکیب آن‌دو یعنی غنی‌سازی h-p، با درجه‌ی توابع پایه و پیوستگی مختلف در آیزوژئومتریک و مقایسه آن با المان محدود کلاسیک هست. برای این کار یک کد تحلیلی در متلب نوشته‌شده است. شبکه‌بندی مسائل بدون توجه به نوع بارگذاری انجام می‌شود و به عبارتی درشت‌ترین شبکه‌بندی با کمترین تعداد المان در ابتدا انتخاب می‌شود و سپس این شبکه درروش آیزوژئومتریک به‌طور یکنواخت در کل دامنه به درجه‌ی بالاتر برده می‌شود (غنی‌سازی p) و سپس به‌صورت یکنواخت غنی‌سازی یکنواخت h می‌شود. ولی در تحلیل‌های المان محدود کلاسیک نوع المان با توجه به درجه‌ی آن انتخاب و سپس شبکه با غنی‌سازی یکنواخت h ریزتر می‌شود. حل دستگاه در هر غنی‌سازی با الگوریتم مشابهی انجام می‌شود تا تأثیر انتخاب نوع الگوریتم حل دستگاه به مقایسه وارد نشود. در تحلیل‌های این مقاله الگوریتم عددی، شرایط هندسی و فیزیکی و همچنین شکل شبکه‌بندی برای تحلیل‌های معادل بین المان

1- Finite Difference Method
2- Finite Volume Method
3- Unstructured grid discretization
4- Meshfree Methods
5- Finite Element Method
6- Calculus of Variations
7- Basis functions
8- NURBS
9- Computer Aided Design(CAD)
10- Isogeometric (IGA)
11- T-Splines

محدود کلاسیک و آیزوژئومتریک یکسان انتخاب شده و پارامترهای متغیر، نوع توابع شکل، درجه‌ی آن‌ها و میزان پیوستگی هستند تا تأثیر آن‌ها به‌صورت خالص مطالعه گردد. پیکربندی این مقاله به‌این‌ترتیب است که: پس از مقدمه در بخش دوم مسئله آزمون فشار قطری معرفی می‌شود. در این بخش میدان تنش تحلیلی تولیدی در اثر بارگذاری نقطه‌ای فشاری ارائه می‌شود، این جواب در قسمت‌های عددی معیار محاسبه‌ی خطا هست. بخش سوم به نحوه گسسته سازی المان محدود و تحلیل مسئله می‌پردازد. بخش چهارم به علت نو بودن روش آیزوژئومتریک ابتدا تئوری آن را به‌طور مختصر ارائه می‌دهد و سپس به نحوه‌ی تحلیل و گسسته سازی مسأله با این روش می‌پردازد. در بخش پنجم و ششم نتایج تحلیل از زاویه‌ی کاهش خطا و نرخ آن بررسی و با یکدیگر مقایسه شده و نتایج ارائه می‌شود.

2- آزمون فشار قطری

آزمون فشار قطری که به آزمون دیسک برزیلی نیز شهرت دارد، به‌صورت گسترده‌ای جهت اندازه‌گیری مقاومت کششی مواد ترد مانند سرامیک‌ها، بتن، پلیمرها و سنگ‌ها استفاده‌شده است [13, 14]. این آزمون اولین بار توسط مهندسین برزیلی، کارنیلو و بارسلوس برای اندازه‌گیری مقاومت بتن استفاده شد [15]. علت استفاده‌ی گسترده از آن سادگی بارگذاری و هندسه‌ی آزمون می‌باشد. در اثر این نوع بارگذاری علاوه بر تنش فشاری، تنش کششی ثابتی عمود بر قطری که در راستای بار است به وجود می‌آید که به‌سادگی می‌تواند مبنایی برای شکست قطعه شود (شکل 1).

بر پایه‌ی الاستیک خطی فرمول‌های ریاضی (1) برای میدان تنش تحلیلی در حالت صفحه‌ای داده‌شده‌اند [16].

$$\sigma_x = \frac{-2P}{\pi t}\left\{\frac{x^2(R-y)}{\beta_1^4} + \frac{x^2(R+y)}{\beta_2^4} - \frac{1}{2R}\right\}$$
$$\sigma_y = \frac{-2P}{\pi t}\left\{\frac{(R-y)^3}{\beta_1^4} + \frac{(R+y)^3}{\beta_2^4} - \frac{1}{2R}\right\}$$
$$\tau_{xy} = \frac{-2P}{\pi t}\left\{\frac{x(R-y)^3}{\beta_1^4} + \frac{x(R+y)^3}{\beta_2^4}\right\} \quad (1)$$

که در آن $\beta_1{}^2 = (R-y)^2 + x^2$ و $\beta_2{}^2 = (R+y)^2 + x^2$

ازآنجایی‌که تحلیل‌های المان محدود و آیزوژئومتریک بر پایه‌ی جابجایی‌ها می‌باشند، برای مقایسه همگرایی و دقت جواب‌های تقریبی حاصل از آن‌ها در بخش‌های بعدی بهتر است جواب دقیق در صورت امکان بر پایه جابجایی‌ها بیان شود. این کار همچنین باعث می‌شود که پارامترهای تأثیرگذار در انتخاب نقاط فوق همگرای تنش و کرنش به مسئله وارد نشود. برای این کار معادلات (1) را می‌توان با استفاده از معادلات هوک و روابط کرنش جابجایی (2) انتگرال‌گیری کرد.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu\sigma_y\}, \varepsilon_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \nu\sigma_x\}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

این کار در تمام سطح دامنه پیچیدگی‌های زیادی دارد ولی در راستاهای قطرهای افقی و عمودی شرایط $\tau_{xy} = 0$ برقرار است. به‌این‌ترتیب دیفرانسیل‌های جزئی معادلات (2) به دیفرانسیل‌های کامل تبدیل می‌شوند و انتگرال‌گیری از آن‌ها ساده‌تر می‌شود و معادلات (3) برای جابجایی U_x در راستای قطر افقی و U_y در راستای قطر عمودی، با توجه به مختصات شکل 1 به دست می‌آید.

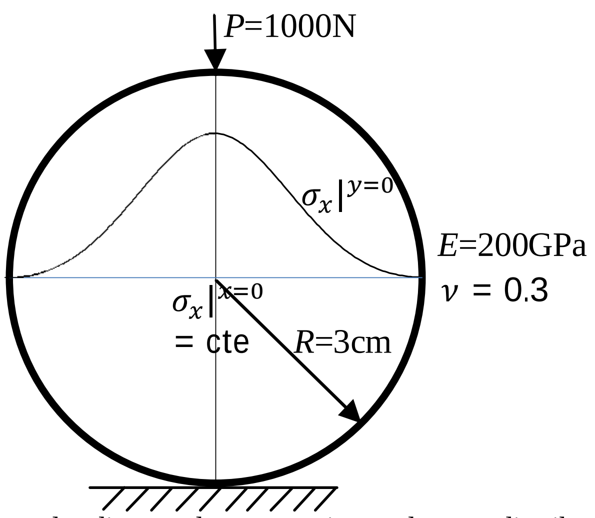

Fig. 1 The disc under diametral compression and stress distributions on two vertical and horizontal diametral directions

شکل 1 دیسک تحت‌فشار قطری و توزیع‌های تنش تحلیلی روی دو جهت قطری افقی و عمودی

$$U_x|^{y=0} = \frac{-2p}{\pi t E}\left\{-(1+\nu)\frac{x \times R}{x^2 - R^2} + (1-\upsilon)\left(\tan^{-1}\frac{x}{R} - \frac{x}{2R}\right)\right\}$$
$$U_y|^{x=0} = \frac{-2p}{\pi t E}\left\{\log\frac{R+y}{R-y} + (\upsilon - 1)\frac{y}{2R}\right\} \quad (3)$$

3- گسسته سازی با توابع لاگرانژی

به‌طورکلی المان محدود یک فن عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی[1] و یا مشتق جزئی[2] است. یک المان محدود بخشی کوچک از میدان مسأله است که با مشخصه‌ی های دامنه‌ی المان, مختصات نقاط و نوع توابع شکل تعریف می‌شود [17]. توابع شکل نحوه‌ی توزیع متغیر مسئله را روی دامنه‌ی هر المان مشخص می‌کنند. در المان محدود کلاسیک استفاده از توابع چندجمله‌ای لاگرانژی به‌عنوان توابع شکل رایج است. جهت مطالعه در مورد خواص این توابع در به‌کارگیری آن‌ها به‌عنوان توابع شکل می‌توان به هر کتابی با موضوع تئوری المان محدود یا کاربردهای آن مراجعه کرد. ازآنجایی‌که هدف بررسی کاهش خطا و نرخ آن بر اساس تعداد درجات آزادی است و تعداد درجات آزادی به درجه المان و تعداد آن‌ها بستگی دارد لذا فرآیند غنی‌سازی ترکیبی از غنی‌سازی h و p و به عبارتی hp-FEM است [17].

برای مسئله‌ی موردبحث از سه نوع المان لاگرانژی چهاروجهی چهار، نه و شانزده گرهی که به ترتیب دارای درجه‌ی یک، دو و سه از توابع چندجمله‌ای لاگرانژی می‌باشند استفاده شد (شکل 2). لازم است ذکر شود که شبکه‌بندی پروانه‌ای شکل 3 به علت نداشتن المان‌های بدشکل، شبکه‌بندی باکیفیت‌تری است. اما ازآنجایی‌که در این مقاله هدف مقایسه‌ی استفاده از توابع لاگرانژی و نربز هست، و تولید مش پروانه‌ای با استفاده از توابع نربز با پیوستگی‌های بالاتر احتیاج به تمهیدات ویژه‌ای دارد؛ لذا از این نوع مش استفاده نشد. با بهره‌گیری از الگوریتم‌های موجود برای غنی‌سازی h و p دامنه‌ی مسئله برای رسیدن به درجات آزادی بالاتر غنی‌سازی شد. در شکل 4 شبکه‌بندی و روند غنی‌سازی با المان‌های چهارضلعی درجه‌ی 1 ارائه‌شده است. شبکه‌بندی و غنی‌سازی با المان‌های درجه‌دو و سه نیز به همین شکل انجام‌شده است.

4- گسسته سازی با توابع نربز

توابع نربز توابعی کسری هستند که صورت و مخرجشان توابع بی-اسپیلاین[3]

1- ODE
2- PDE
3- B-Splines

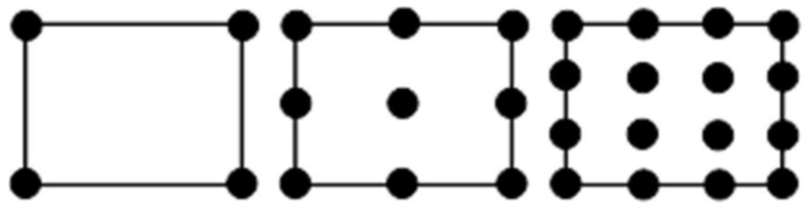

Fig. 2 Three kinds of langrangian elements that are applied in classic FEM analysis

شکل 2 سه نوع المان لاگرانژی بکار گرفته‌شده در تحلیل المان محدود کلاسیک

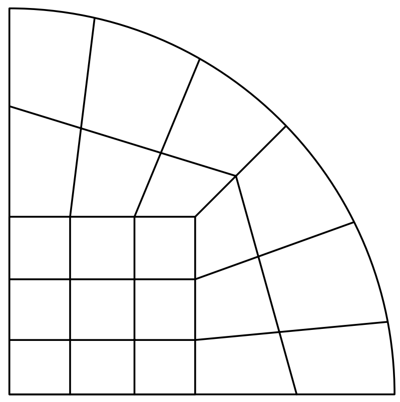

Fig. 3 Butterfly mesh grid, suitable for circular geometries

شکل 3 شبکه‌بندی پروانه‌ای، مناسب برای هندسه‌های دایره‌ای

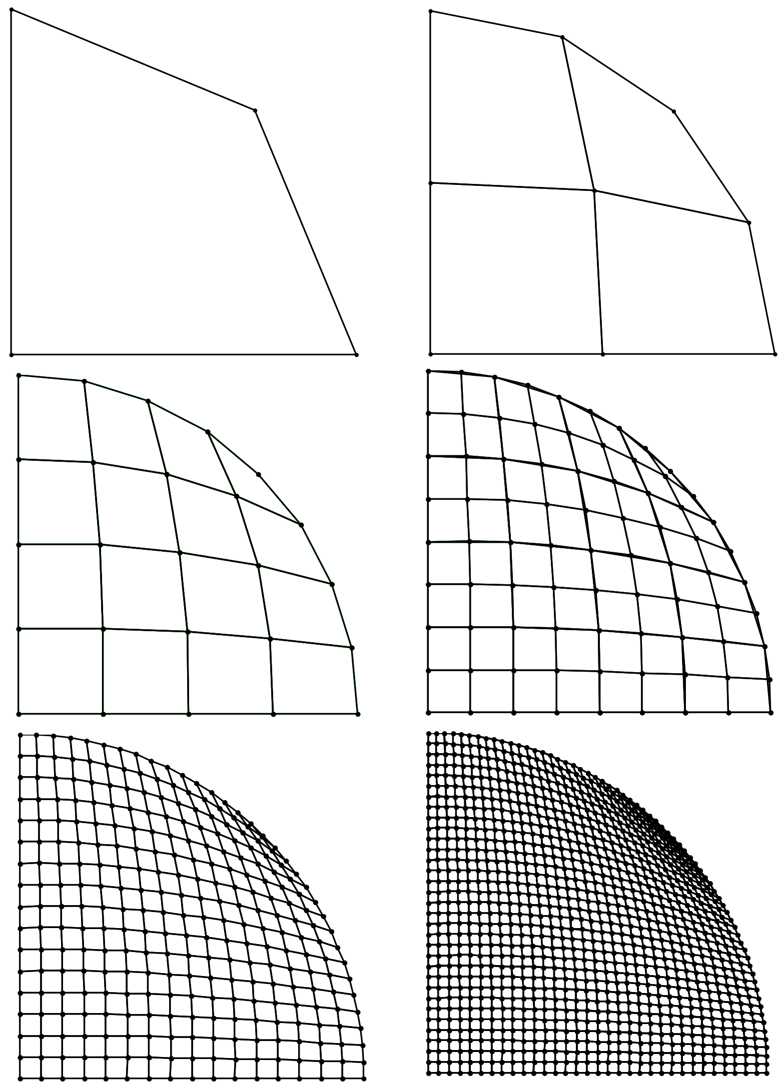

Fig. 4 Discretization and uniform h-refinement with classical lagrangian quadratic elements

شکل 4 گسسته سازی و غنی‌سازی یکنواخت h با المان‌های کلاسیک درجه‌یک لاگرانژی

می‌باشند، این توابع به‌صورت گسترده در نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر جهت تولید هندسه‌های پیچیده مورداستفاده هستند، روش آیزوژئومتریک نوعی روش المان محدود است که بجای استفاده از توابع لاگرانژی از این توابع به‌عنوان تابع شکل در المان‌ها استفاده می‌کند، خصوصیات نربزها برگرفته از خصوصیات بی-اسپیلاین‌ها است؛ با این مزیت که توانایی آن‌ها در تولید هندسه‌های مخروطی بیش از بی-اسپیلاین‌ها است، دو بخش بعدی به معرفی این توابع در حد کاربرد در این مقاله اختصاص‌یافته، برای آشنایی کامل‌تر به مرجع شماره‌ی 3 مراجعه شود.

4-1- توابع پایه‌ی بی اسپیلاین

بی-اسپیلاین‌ها منحنی‌های چندجمله‌ای تکه‌ا ی[1] هستند، منحنی بی-اسپیلاین از ترکیب خطی توابع پایه بی-اسپیلاین تشکیل می‌شود، توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین به روی یک مجموعه از اعداد حقیقی مثبت به نام بردار گرهی[2]ساخته می‌شود، بردار گرهی مجموعه‌ای از اعداد غیرکاهشی است که به‌صورت $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$است، ازآنجایی‌که یک بردار گرهی دامنه‌ی پارامتری المان‌ها را تشکیل می‌دهد بایستی یک "بردار گرهی باز"[3] باشد، یعنی اولین و آخرین عدد آن $p+1$ بار تکرار شده باشند، که p درجه‌ی بی-اسپیلاین است، همچنین لازم است که بردار گرهی $n+p+1$ عضو داشته باشد که n تعداد توابع پایه هست، توابع پایه بی-اسپیلاین با فرمول بازگشتی کوکس- دبور[4] با معادله‌ی (4) به دست می‌آیند.

$$B_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \\ 0 & \xi \notin [\xi_i, \xi_{i+1}] \end{cases}$$
$$B_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{\mathrm{i+1,p-1}}(\xi) \quad (4)$$

یک منحنی بی-اسپیلاین را می‌توان طبق معادله‌ی (5) از ترکیب خطی توابع پایه‌ی اسپیلاین ساخت، که در آن $\bar{P}_i$ بردارهای مجزا در فضا هستند. با توجه به اینکه این تبدیل خطی است لذا خواص منحنی‌های بی-اسپیلاین مشابه خواص توابع پایه‌ی تشکیل‌دهنده خود هستند.

$$\bar{C}(\xi) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \bar{P}_i B_{i,p} \quad (5)$$

توابع بی-اسپیلاین چند متغیره از طریق ضرب تنسوری بی-اسپیلاین-های تک متغیره درست می‌شوند؛ درنتیجه صفحات و حجم‌های بی-اسپیلاین از ترکیب خطی این توابع چند متغیره حاصل می‌شوند.

4-2- توابع پایه‌ی نربز

توابع بی-اسپیلاین توانایی لازم را برای تولید شکل‌های ساده‌ای مثل دایره‌ها بیضی‌ها ندارند، به دلیل همین ضعف، از توابع نربز برای ساخت هندسه‌ها در نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر استفاده می‌شود، البته توابع بی-اسپیلاین حالت خاصی از توابع نربز هستند، یک منحنی نربز با معادله‌ی (6) تولید می‌شود.

$$\bar{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \bar{P}_i R_{i,p} \quad (6)$$

در این رابطه $R_{i,p}$ توابع پایه‌ی نربز هستند، که به‌صورت کسری با رابطه‌ی (7) تعریف می‌شوند، بقیه‌ی خواص در مورد پیوستگی آن‌ها با توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین یکسان است، در رابطه‌ی (7)، $B_{i,p}(\xi)$ توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین هستند و w_i وزن هر تابع پایه‌ی بی-اسپیلاین هست، توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین با در نظر گرفتن وزن واحد برای هرکدام، از رابطه‌ی (7) به دست می‌آیند.

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i B_{i,p}(\xi)}{\sum_{j=1}^{m} w_j B_{j,p}(\xi)} \quad (7)$$

4-3- تحلیل عددی مسئله‌ی آزمون برزیلی با توابع شکل نربز

در گسسته سازی با توابع پایه‌ی لاگرانژی هر المان هندسی مستقلا با تبدیل

1- Piecewise polynomial
2- Knot vector
3- Open knot vector
4- Cox-de Boor recursion formula

حاصل از ضرب توابع شکل در مکان گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی هر المان به دست می‌آید. به‌این‌ترتیب تمام المان‌ها را می‌توان حاصل تبدیل یک المان پارامتری دانست. اما در آیزوژئومتریک فضای پارامتری یک وصله[1] است که می‌تواند شامل چند المان باشد (شکل 5). به‌این‌ترتیب در کد نویسی آیزوژئومتریک برای تشکیل ماتریس سفتی کل، ابتدا یک حلقه درون وصله موردنیاز است، سپس حلقه‌ای دیگر درون المان‌ها؛ و در خارجی‌ترین حلقه نقاط گوسی قرار دارند.

درروش آیزوژئومتریک امکان تولید شبکه‌بندی با درجه‌های پیوستگی بالاتر از C_0 وجود دارد. به‌این‌ترتیب برای توابع نربز درجه‌ی دو امکان برقراری پیوستگی‌های C_0 و C_1 و برای توابع نربز درجه‌ی سه امکان برقراری پیوستگی های C_0، C_1 و C_2 امکان‌پذیر است. در مدل‌سازی قطعه‌ی دایره‌ای آزمون برزیلی امکان ساخت ربع دایره با یک وصله‌ی درجه‌ی دو وجود دارد. سپس این وصله در صورت نیاز به توابع شکل درجه‌ی بالاتر با الگوریتم p غنی‌سازی می‌شود، سپس در گام‌های بعدی با الگوریتم h شبکه‌بندی ریزتر حاصل می‌شود. به‌عنوان نمونه در شکل 6 روند تولید شبکه‌بندی حاوی چهار المان با توابع نربز درجه‌ی سه و پیوستگی‌های C_0، C_1 و C_2 از بزرگ‌ترین المان ممکن با درجه‌ی دو به‌وسیله تلفیق غنی‌سازی h و p (این تلفیق در المان محدود به غنی‌سازی hp و در آیزوژئومتریک به غنی‌سازی k شهرت پیداکرده) نشان داده‌شده. در شکل 7 این روند در یک بعد و با نمایش توابع شکل نشان داده‌شده. برای مطالعه‌ی خطا این مدل با توابع نربز درجه‌ی دو با دو پیوستگی C_0 و C_1 و برای توابع نربز درجه‌ی سه با پیوستگی‌های C_0، C_1 و C_2 تحلیل شد. پیوستگی C_0 برای توابع نربز درجه‌ی یک بیشترین پیوستگی ممکن است و به همین ترتیب پیوستگی C_1 برای توابع نربز درجه‌ی دو و پیوستگی C_2 برای توابع نربز درجه‌ی سه بیشترین پیوستگی‌های ممکن هستند. با توجه به اینکه توابع نربز درجه‌ی یک و توابع لاگرانژی درجه‌ی یک عینا یکی هستند (مرجع 3)، لذا در این قسمت آن‌ها تحلیل نشدند.

5- بحث

شکل 8 نمودارهای لگاریتمی کاهش خطا با افزایش درجه‌ی آزادی برای دو گروه گسسته سازی با توابع شکل درجه‌ی دو و سه را نشان می‌دهد. در هر گروه توابع لاگرانژی و توابع نربز با پیوستگی‌های ممکن قرار دارد. خطا بر پایه جابجایی و بر اساس رابطه‌ی (8) محاسبه‌شده است. در این رابطه ازآنجاکه

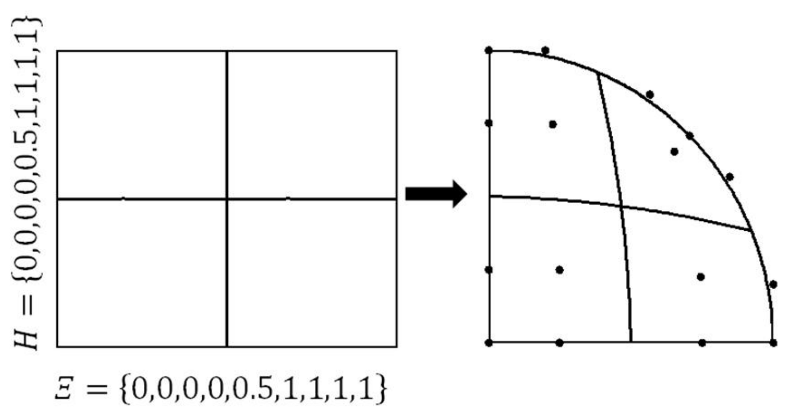

Fig 5 In IGA the parametric domain (patch) may consist of number of elements

شکل 5 در آیزوژئومتریک فضای پارامتری (وصله) می‌تواند از تعدادی المان تشکیل شود

1- Patch

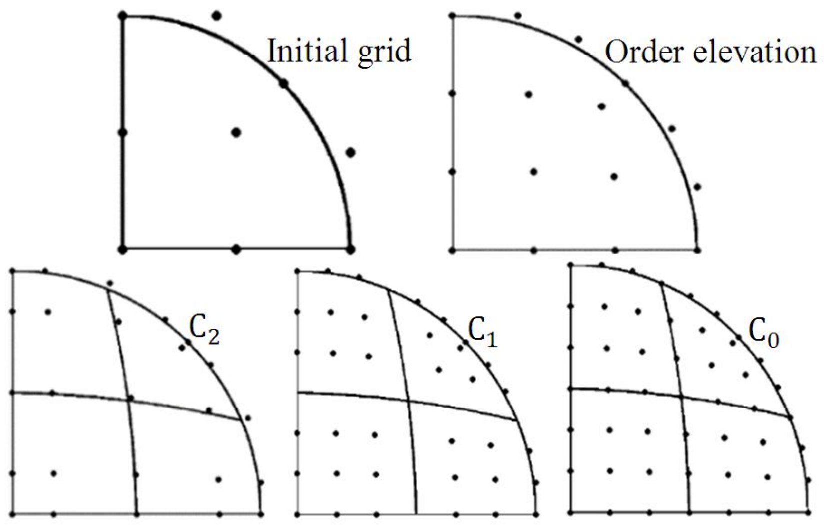

Fig. 6 Order elevation by p refinement from the coarsest mesh grid and then applying h refinement to produce four element cubic NURBS based grid with three continuities respectively C_2 ,C_1 and C_0 (filled points are control points)

شکل 6 بالا بردن درجه با غنی‌سازی p از درشت‌ترین شبکه‌بندی ممکن و سپس به‌کارگیری غنی‌سازی h برای تولید شبکه‌بندی چهار المانی با توابع پایه نربز درجه سوم با پیوستگی‌های به ترتیب C_2، C_1 و C_0 (نقاط توپر، نقاط کنترلی هستند)

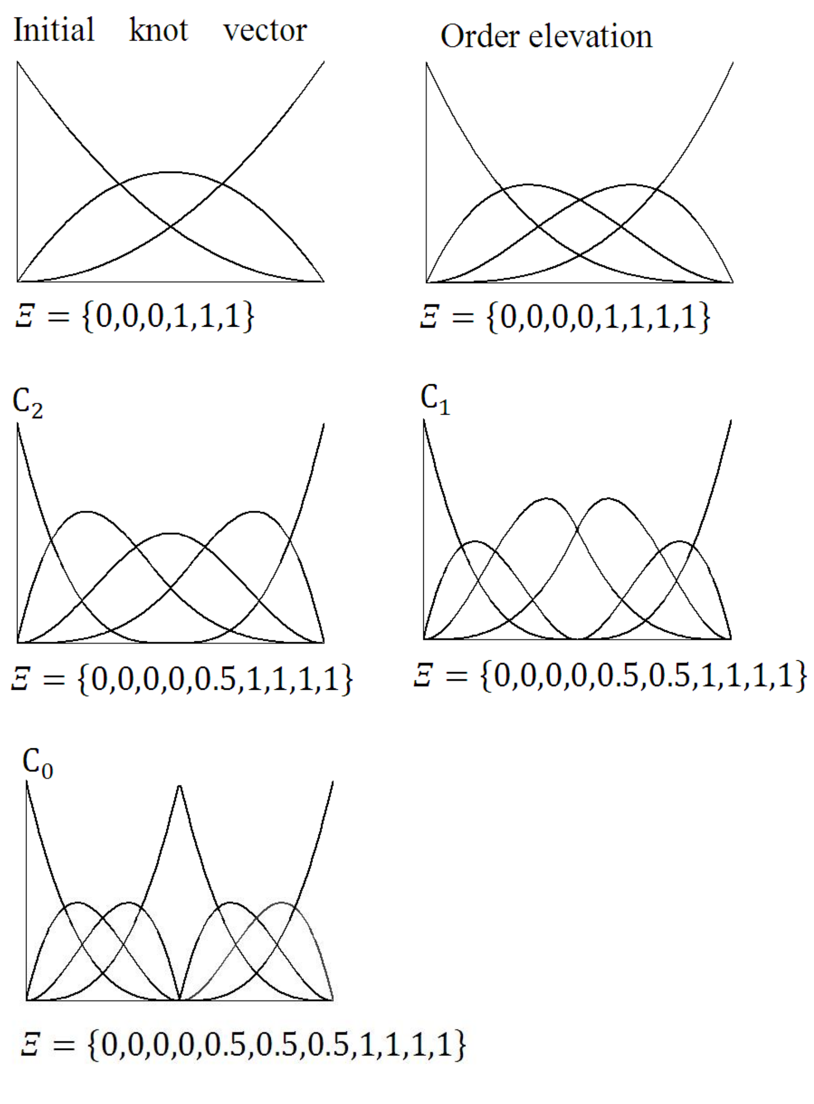

Fig. 7 The refinements which are used in one direction to produce mesh grids in fig 6: in first step with p-refinement the order is elevated from two to three and then with insertion of knot $\xi = 0.5$ with proper multiplicities different continuities C_2, C_1 and C_0 are achieved

شکل 7 غنی‌سازی بکار گرفته‌شده در یک‌جهت برای تولید شبکه‌بندی‌های شکل 6: مرحله‌ی اول با غنی‌سازی p درجه‌ی توابع شکل از دو به سه بالابرده شد و در مراحل بعد با ورود نقطه‌ی $\xi = 0.5$ با تکرارهای مناسب پیوستگی‌های مختلف C_2، C_1 و C_0 حاصل شد

جواب دقیق جابجایی برای کل دامنه در دسترس نبود، خطا در زیر دامنه‌ی قطرهای عمودی و افقی با استفاده از روابط (3) محاسبه شد.

$$\|e\|_{\mathrm{L}_2} = \left[\int_{\Omega} (u-\hat{u})^{\mathrm{T}}(u-\hat{u})\,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega = \Omega|^{x=0} \cup \Omega|^{y=0} \tag{8}$$

در شکل 8 دیده می‌شود که طبق انتظار به دلیل وجود تکینگی نرخ همگرایی (شیب نمودارهای لگاریتمی) با افزایش درجات آزادی به مقدار ثابتی میل می‌کند. دیده می‌شود که این مقدار ثابت ارتباطی به درجه و نوع توابع شکل و پیوستگی ندارد. یعنی در هر شکل نمودارها با افزایش درجات آزادی به شیب یکسانی می‌رسند و با یکدیگر موازی می‌شوند. بااین‌حال میزان خطا با به‌کارگیری المان‌های درجه دوم نربز با پیوستگی C_1 با درون‌یابی لگاریتمی برای درجات آزادی یکسان حدود 43 درصد نسبت به توابع شکل با پیوستگی C_0 کاهش می‌یابد ولی استفاده از المان‌های نربز درجه‌ی دو با پیوستگی C_0 مزیتی به استفاده از المان‌های لاگرانژی (با پیوستگی C_0) ندارد (به نزدیک بودن دو نمودار دقت شود). به عبارتی مزیت استفاده از توابع نربز درجه‌ی دو در این مسئله در پیوستگی بالاتر از C_0 نمایان می‌شود. همین وضعیت در مطالعه نمودارهای مربوط به توابع شکل درجه‌ی سه نیز دیده می‌شود. در آنجا نیز نرخ همگرایی با مقادیر قبلی یکسان است و درجه و نوع توابع شکل و پیوستگی آن‌ها تأثیری در نرخ همگرایی ندارند ولی بااین‌وجود استفاده از توابع نربز درجه‌ی سه با پیوستگی‌های C_1 و C_2 با درونیابی لگاریتمی به

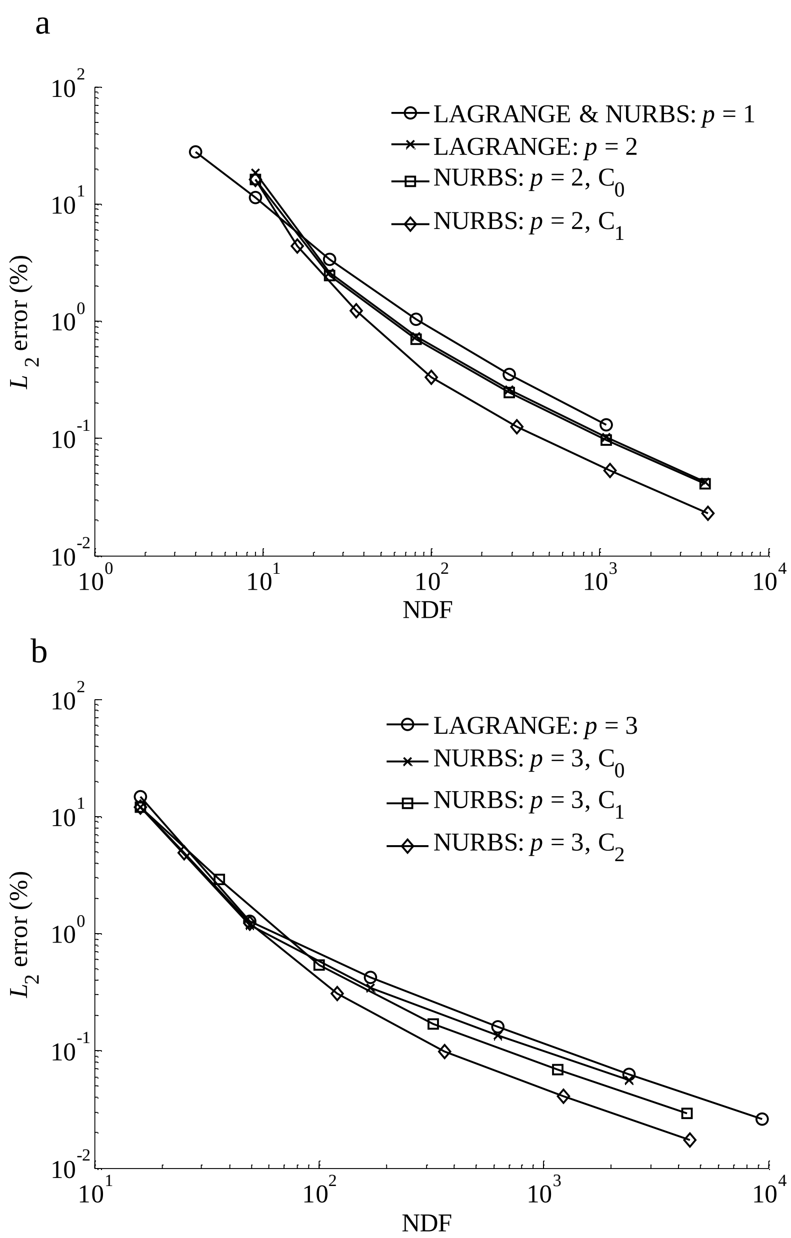

Fig. 8 Convergence with increasing NDF. (a) linear and quadratic shape functions, (b) cubic shape functions

شکل 8 همگرایی با افزایش درجات آزادی. (a) توابع شکل خطی و درجه‌ی دو، (b) توابع شکل درجه سه

ترتیب موجب کاهش خطا به میزان 23 درصد و 55 درصد نسبت به استفاده از توابع شکل با پیوستگی C_0 برای درجات آزادی یکسان می‌شود. به عبارتی استفاده از توابع نربز درجه‌ی سه با پیوستگی C_0 مزیتی نسبت به استفاده از توابع لاگرانژی درجه سه ندارد (به نزدیک بودن دو نمودار دقت شود). ولی پیوستگی‌های بالاتر میزان خطا را به مقدار چشمگیری کاهش می‌دهند.

6- نتایج

نتایج زیر حاصل مطالعه‌ی همگرایی تحلیل آیزوژئومتریک در کنار المان محدود کلاسیک برای مسئله و بارگذاری شکل 1 هست:

1- در این مسئله، خطا برای توابع لاگرانژی و نربز با هر پیوستگی و درجه‌ای نرخ همگرایی ثابتی داشت.

2- در این مسئله، استفاده از درجات بالاتر پیوستگی در توابع نربز هم‌درجه میزان خطا را کاهش داد ولی تأثیری در نرخ آن نداشت.

3- در این مسئله، بهترین جواب (کمترین خطا) مربوط به توابع نربز درجه‌ی سه با پیوستگی حداکثر C_2 بود. بعدازآن توابع نربز درجه‌دو با پیوستگی حداکثر C_1 و سپس توابع درجه‌ی سه با پیوستگی C_1 بهترین جواب را دادند. بعد از این‌ها توابع لاگرانژی و نربز درجه‌ی، دو و سه با پیوستگی C_0 قرار داشتند که اختلاف آن‌ها چندان چشمگیر نبود. لذا در استفاده از توابع نربز لزوما درجه‌ی بالاتر جواب بهتری نمی‌دهد و ممکن است پیوستگی نقش مهم‌تری از درجه ایفا کند.

7- فهرست علائم

$B_{i,p}$	تابع پایه i ام بی اسپیلاین
E	مدول الاستیسیته (GPa)
G	مدول الاستیک برشی (GPa)
P	نیروی متمرکز (N)
$\bar{P}_i$	بردار کنترلی در فضا
p	درجه‌ی توابع شکل
R	شعاع دیسک (cm)
$R_{i,p}$	تابع پایه i ام نربز
t	ضخامت دیسک (cm)
U	تابع جابجایی
u	جابجایی دقیق یک نقطه در میدان فیزیکی مسئله
$\hat{u}$	جابجایی تقریبی یک نقطه در میدان فیزیکی مسئله
w_i	وزن توابع نربز

علائم یونانی

$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_{xy}$	مؤلفه‌های کرنش
H	بردار گرهی در جهت y
υ	ضریب پؤاسون
Ξ	بردار گرهی در جهت x
ξ_i	عضوی در بردار گرهی
σ_x,σ_y	مؤلفه‌های تنش تحلیلی نرمال
τ_{xy}	مؤلفه‌های تنش تحلیلی برشی

8- تقدیر و تشکر

لازم می‌دانم از پدیدآورندگان کدهای igafem و GeoPDEs، جهت در

دسترس عموم قرار دادن حاصل کارهایشان تقدیر و تشکر کنم. در کدنویسی‌های انجام‌شده، کمک زیادی از آن‌ها گرفته شد [18, 19].

9- مراجع

[1] R .Eymard, T .Gallouët, R .Herbin, *The finite volume method* in P.G. Ciarlet, J.L. Lions&dagger, *Handbook of Numerical Analysis*, pp. 713-1020, Amsterdam, Elsevier Science, 2000.

[2] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, Meshless methods: A review and computer implementation aspects, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, No. 3, pp. 763-813, 2008.

[3] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 39–41, pp. 4135-4195, 2005.

[4] J. A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T. J. R. Hughes, Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 41–43, pp. 5257-5296, 2006.

[5] Y. Bazilevs, V. M. Calo, T. J. R. Hughes, Y. Zhang, Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations, *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 3-37, 2008.

[6] T. Elguedj, Y. Bazilevs, V. M. Calo, T. J. Hughes, and projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 197, No. 33, pp. 2732-2762, 2008.

[7] L. De Lorenzis, P. Wriggers, T. J. R. Hughes, Isogeometric contact: a review, *GAMM-Mitteilungen*, Vol. 37, No. 1, pp. 85-123, 2014.

[8] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, N. Z. Moghadam, Application of isogeometric analysis in structural shape optimization, *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 846-852, 2011.

[9] C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. Hughes, R. De Borst, An isogeometric analysis approach to gradient damage models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 1, pp. 115-134, 2011.

[10] T. J. R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 5–8, pp. 301-313, 2010.

[11] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 41–44, pp. 4160-4183, 2007.

[12] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, S. Lipton, M. A. Scott, T. W. Sederberg, Isogeometric analysis using T-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 5–8, pp. 229-263, 2010.

[13] J. E. O. Ovri, T. J. Davies, Diametral compression of silicon nitride, *Materials Science and Engineering*, Vol. 96, No. 1, pp. 109-116, 1987.

[14] G. F. Kamst, J. Vasseur, C. Bonazzi, J. J. Bimbenet, A new method for the measurement of the tensile strength of rice grains by using the diametral compression test, *Journal of Food Engineering*, Vol. 40, No. 4, pp. 227-232, 1999.

[15] F. Carniero, A. Barcellos, *Concrete tensile strength*, Bulletin No. 13, Union of Testing and Research Laboratories for Materials and Structures, Paris, pp. 97-123, 1953.

[16] H. Hertz, On the contact of elastic solids, *miscellaneous papers*, pp. 146-162, London, Macmillan, 1896.

[17] D. Braess, *Finite Elements*, pp. 105-185, Cambridge, University Press, 2007.

[18] A. R. C. de Falco, and R. Vazquez, GeoPDEs: a research tool for Isogeometric Analysis of PDEs, *Advances in Engineering Software*, Vol. 42, No. 12, pp. 1020-1034, 2011.

[19] C. A. VP Nguyen, S Bordas, T Rabczuk, Isogeometric analysis: an overview and computer implementation aspects, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 117, No. 1, pp. 89-116, 2015.