انجمن آمار ایران
۱۳۶۹
IRANIAN STATISTICAL SOCIETY 1990

سیزدهمین کنفرانس آمار ایران

۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

13th Iranian Statistics Conference
Shahid Bahonar University of Kerman
23-25 August 2016

دانشگاه شهید باهنر کرمان
چهلمین سال تاسیس دانشگاه کرمان

تاریخ: ۱۳۹۵/۶/۴
شماره: ۲۴۸/۳۱۰/آک

بسم الله الرحمن الرحیم

گواهی ارائه مقاله

بدینوسیله گواهی می شود

آقای مهدی جباری نوقانی

مقاله خود را با عنوان:

فاصله اطمینان تعمیم یافته برای شاخص های کارایی فرایند

در سیزدهمین کنفرانس آمار ایران ارائه نموده اند.

ضمن ارج نهادن به حضور ایشان امیدواریم که از این همایش علمی بهره مند شده باشند.

سایر همکاران: یاسمین زینتی و زهره پروانه

محسن مددی
دبیر کنفرانس

بهنوش تاتا
دبیر علمی کنفرانس

http://isc13.uk.ac.ir
Email: ISC13@Conf.uk.ac.ir
Tel: +98 3431322260 Fax: +98 3433257157

دبیرخانه: کرمان، دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش آمار

فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته برای شاخص‌های کارایی فرایند

مهدی جباری نوقابی*، زهره پروانه
دانشگاه فردوسی مشهد

شاخص‌های کارایی، معیارهایی برای اندازه‌گیری کارایی فرایند هستند. در شرایطی مانند انتخاب یک تأمین‌کننده و ارزیابی بهبود فرایند، علاقه‌مند به مقایسه شاخص‌های کارایی دو فرایند متفاوت یا مقایسه شاخص‌های کارایی قبل و بعد از یک تنظیم برای همان فرایند هستیم. بیش‌تر ارزیابی‌ها در مورد شاخص‌های کارایی تنها روی برآورد نقطه‌ای آنها متمرکز است و بنابراین این امکان وجود دارد که اظهار نظرهای غیر قابل اعتمادی درباره کارایی فرایند صورت پذیرد. به عبارت دیگر، استفاده از شاخص‌های کارایی فرایند بخش مهمی از کاربردهای کنترل فرایندهای آماری برای دستیابی به پیشرفت‌های مستمر در کیفیت به شمار می‌رود. در این مقاله، با استفاده از فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته، کارایی دو فرایند را مقایسه و فرایند بهتر را انتخاب نمودیم.

واژه‌های کلیدی: شاخص کارایی فرایند، کمیت‌محوری تعمیم‌یافته، فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته.

سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۴-۲ شهریور ۱۳۹۵

فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته برای شاخص‌های کارایی فرایند

زهره‌پروانه[۱]، مهدی جباری نوقابی [۲]

[۱] دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی

[۲] دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی

چکیده: شاخص‌های کارایی، معیارهایی برای اندازه‌گیری کارایی فرایند هستند. در شرایطی مانند انتخاب یک تأمین‌کننده و ارزیابی بهبود فرایند، علاقه‌مند به مقایسه شاخص‌های کارایی دو فرایند متفاوت یا مقایسه شاخص‌های کارایی قبل و بعد از یک تنظیم برای همان فرایند هستیم. بیش‌تر ارزیابی‌ها در مورد شاخص‌های کارایی تنها روی برآورد نقطه‌ای آنها متمرکز است و بنابراین این امکان وجود دارد که اظهار نظرهای غیر قابل اعتمادی درباره کارایی فرایند صورت پذیرد. به عبارت دیگر، استفاده از شاخص‌های کارایی فرایند بخش مهمی از کاربردهای کنترل فرایندهای آماری برای دستیابی به پیشرفت‌های مستمر در کیفیت به شمار می‌رود. در این مقاله، با استفاده از فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته، کارایی دو فرایند را مقایسه و فرایند بهتر را انتخاب نمودیم.

واژه‌های کلیدی: شاخص کارایی فرایند، کمیت‌محوری تعمیم‌یافته، فاصله‌اطمینان تعمیم یافته.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 97K80.

۱ مقدمه

هر کارخانه ای محصولاتش را با این هدف که آنها را به مشتریان زیادی به فروش می رساند و به سود بهینه ای دست می‌یابد تولید می‌کند. مصرف کنندگان تنها محصولاتی را که با انتظاراتشان مطابقت دارد تقاضا می‌کنند. بنابراین فرایند تولید باید قابلیت تولید محصولی با کیفیت مورد انتظار را داشته باشد. هنگامی که فرایند تولیدی تحت کنترل آماری است، شاخص‌های کارایی فرایند برای اندازه گیری کارایی فرایند به کار برده می‌شوند. شاخص‌های کارایی فرایند مثل C_p، C_{pk} و C_{pm} برای فراهم آوردن یک اندازه کمی از عملکرد ساخت در صنایع و یا اندازه‌گیری کارایی یک محصول به کار برده می‌شوند. بسیاری از آماردان ها و مهندسین کیفیت بر پژوهش روی شاخص‌های کارایی فرایند به منظور پیشنهاد روش‌های مؤثرتری در مورد سنجش کارایی فرایند تاکید می‌کنند. شاخص کارایی یک اندازه بر اساس پارامترهای فرایند و حدود مشخصات فنی است.

[۲] مهدی جباری نوقابی: jabbarinm@um.ac.ir

سه شاخص شناخته شده C_p، C_{pk} و C_{pm} بر اساس این فرض هستند که فرایند مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. اگر USL و LSL به ترتیب نشان دهنده حد مشخصه فنی بالا و پایین، T مقدار هدف و $M = \frac{USL+LSL}{۲}$ و $d = \frac{USL-LSL}{۲}$ باشند، آن‌گاه این سه شاخص به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{۶\sigma}$$
$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - M|}{۳\sigma}$$
$$C_{pm} = \frac{d}{۳\sqrt{\sigma^۲ + (\mu - T)^۲}}$$

در این مقاله فرض شده است حدود مشخصات فنی (LSL, USL) و مقدار هدف T برای دو فرایند یکسان است.
فواصل اطمینان برای شاخص‌های کارایی در مقاله‌هایی توسط بیزل (۱۹۹۰)، بویلز (۱۹۹۱)، کالینز (۱۹۹۵)، فرانکلین و وزرمن (۱۹۹۲)، کاچرلکوتا و کاچرلکوتا (۱۹۹۴)، کانیچوکاتو (۲۰۱۳) و زیمر و همکاران (۲۰۰۱) نشان داده شده است.
یک فاصله اطمینان دقیق برای C_p بر اساس توزیع کای-دو است. برای مقایسه دو شاخص C_{pk} و همچنین C_{pm} ساختارهای فاصله‌اطمینان سرراست نیستند و فواصل اطمینان فقط بر حسب روش های تقریبی نتیجه می‌شود. در بخش‌های بعد فاصله‌اطمینان برای $\frac{C_{pk۱}}{C_{pk۲}}$ و $\frac{C_{pm۱}}{C_{pm۲}}$ محاسبه می‌شود و با استفاده از این فواصل اطمینان فرایند کاراتر را انتخاب می‌کنیم.

۲ فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته

وقتی که پارامترهای مزاحم وجود نداشته باشند، روش فاصله‌اطمینان متعارف روش خوبی است. متأسفانه در صورت حضور پارامترهای مزاحم وضعیت کاملاً متفاوت است. حتی در توزیع‌هایی که فقط دو پارامتر دارند هم معمولاً نمی توان برای تابع خاصی از پارامترها کمیت محوری پیدا کرد. هدف از به دست آوردن فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته، رفع این اشکال با ساختن گزاره‌های احتمالی وابسته به نمونه‌های مشاهده شده است.
یک جامعه با تابع توزیع تجمعی $F(x|\zeta)$ را در نظر بگیرید، که X بردار متغیر تصادفی و $\zeta = (\theta, \delta)$ بردار پارامترهای مجهول است. θ پارامتر مورد علاقه و δ پارامتر مزاحم است. علاقه‌مند به یافتن برآورد فاصله‌ای برای θ بر اساس مقادیر مشاهده شده X هستیم.

تعریف ۱.۲. قرار دهید $R = r(X; x, \zeta)$ که تابعی از X و ζ است، همچنین می‌تواند تابعی از مقدار مشاهده شده x هم باشد. کمیت تصادفی R یک کمیت محوری تعمیم‌یافته است، اگر در دو شرط زیر صدق کند:

۱. توزیع احتمال R به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد.

۲. کمیت مشاهده شده $r = r(x; x, \zeta)$ به پارامتر مزاحم δ وابسته نباشد.

تعریف ۲.۲. اگر زیر مجموعه $C_{۱-\alpha}$ از فضای نمونه R در تساوی زیر صدق کند

$$P(R \in C_{۱-\alpha}) = ۱ - \alpha,$$

آن‌گاه زیر مجموعه Θ_c از فضای پارامتر داده شده به صورت زیر

$$\Theta_c(r) = \{\theta \in \Theta | r(x; x, \zeta) \in C_{۱-\alpha}\},$$

یک فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته $(1-\alpha)100\%$ برای θ است.

ایده فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته اولین بار توسط وراهاندی (۱۹۹۵) مطرح شد. وقتی که کمیت محوری متعارف وجود نداشته باشد یا به دست آوردن آن مشکل باشد، روش فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته ارزش بیش‌تری خواهد داشت.

اگر فرایند اول دارای توزیع نرمال با میانگین μ_1 و انحراف معیار σ_1 و فرایند دوم نیز دارای توزیع نرمال با میانگین μ_2 و انحراف معیار σ_2 باشند، آن‌گاه کمیت محوری تعمیم‌یافته برای μ_i و σ_i^2، $(i=1,2)$، به ترتیب عبارت‌اند از:

$$R_{\mu_i}=\bar{x}_i-\frac{Z_i s_i}{\sqrt{U_i}}\sqrt{\frac{n_i-1}{n_i}},\qquad i=1,2 \tag{۱.۲}$$

و

$$R_{\sigma_i^2}=\frac{(n_i-1)s_i^2}{U_i},\qquad i=1,2 \tag{۲.۲}$$

که در آن n_1 و n_2 به ترتیب حجم نمونه، s_1 و s_2 انحراف معیار و $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ میانگین مشاهده شده فرایند ۱ و فرایند ۲ هستند. همچنین می‌دانیم $Z_i=\frac{\overline{X}_i-\mu_i}{\sigma_i/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ و $U_i=\frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi^2_{n_i-1}$ است. بنابراین، توزیع R_{μ_i} به μ_i و توزیع $R_{\sigma_i^2}$ به σ_i^2 بستگی ندارد. علاوه بر این مقدار مشاهده شده $r_{\mu_i}=\mu_i$ و $r_{\sigma_i^2}=\sigma_i^2$ است.

با استفاده از روابط (۱.۲) و (۲.۲) کمیت محوری تعمیم‌یافته برای C_{pm} عبارت است از:

$$R_{C_{pmi}}=\frac{d}{3\sqrt{R_{\sigma_i^2}+(R_{\mu_i}-T)^2}},\qquad i=1,2 \tag{۳.۲}$$

چون توزیع R_{μ_i} و همچنین توزیع $R_{\sigma_i^2}$ به (μ_i,σ_i^2) بستگی ندارند، پس توزیع $R_{C_{pmi}}$ نیز به (μ_i,σ_i^2) بستگی ندارد. از طرفی $r_{C_{pmi}}=C_{pmi}$ است، در نتیجه $R_{C_{pmi}}$ یک کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای C_{pmi} است.

بنابراین یک کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pm1}}{C_{pm2}}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}R_{C_{pm}}&=\frac{R_{C_{pm1}}}{R_{C_{pm2}}}\\&=\sqrt{\frac{(n_2-1)s_2^2/U_2+\left(\bar{x}_2-Z_2s_2\sqrt{\frac{n_2-1}{n_2U_2}}-T\right)^2}{(n_1-1)s_1^2/U_2+\left(\bar{x}_1-Z_1s_1\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1U_1}}-T\right)^2}},\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

که در آن C_{pm1} و C_{pm2} به ترتیب شاخص کارایی تاگوچی فرایند ۱ و ۲ هستند. واضح است که مقدار مشاهده شده $r_{C_{pm}}=\frac{C_{pm1}}{C_{pm2}}$ است و همچنین توزیع $R_{C_{pm}}$ به پارامترهای مجهول بستگی ندارد. بنابراین $R_{C_{pm}}$ یک کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pm1}}{C_{pm2}}$ است.

در نتیجه یک فاصله‌اطمینان تقریبی $(1-\alpha)100\%$ برای $\frac{C_{pm1}}{C_{pm2}}$ عبارت است از:

$$\left[R_{C_{pm}:\frac{\alpha}{2}},R_{C_{pm}:1-\frac{\alpha}{2}}\right], \tag{۵.۲}$$

که $R_{C_{pm}:\frac{\alpha}{2}}$ چندک $\frac{\alpha}{2}$ و $R_{C_{pm}:1-\frac{\alpha}{2}}$ چندک $1-\frac{\alpha}{2}$ توزیع $R_{C_{pm}}$ است. چون در این‌جا نمی‌توان توزیع $R_{C_{pm}}$ را به شکل بسته نوشت، بنابراین با استفاده از شبیه‌سازی چندک‌ها را محاسبه می‌کنیم. اگر $R_{C_{pm}:\frac{\alpha}{2}}>1$ یا $R_{C_{pm}:1-\frac{\alpha}{2}}<1$ باشد، کارایی دو فرایند متفاوت است.

به طور مشابه کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pk1}}{C_{pk2}}$ به صورت زیر است:

$$R_{C_{pk}}=\frac{R_{C_{pk1}}}{R_{C_{pk2}}},$$

که در آن $R_{C_{pki}}$، $i = ۱, ۲$، عبارت است از:

$$R_{C_{pki}} = \frac{d - |R_{\mu_i} - M|}{۳\sqrt{R_{\sigma_i^۲}}}, \qquad i = ۱, ۲$$

بنابراین یک فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pk۱}}{C_{pk۲}}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[R_{C_{pk}:\frac{\alpha}{۲}}, R_{C_{pk}:۱-\frac{\alpha}{۲}}\right], \qquad (۶.۲)$$

که $R_{C_{pk}:\frac{\alpha}{۲}}$ چندک $\frac{\alpha}{۲}$ و $R_{C_{pk}:۱-\frac{\alpha}{۲}}$ چندک $۱ - \frac{\alpha}{۲}$ توزیع $R_{C_{pk}}$ است. چون در این‌جا نمی‌توان توزیع $R_{C_{pk}}$ را به شکل بسته نوشت، بنابراین با استفاده از شبیه‌سازی چندک‌ها را محاسبه می‌کنیم. اگر $R_{C_{pm}:\frac{\alpha}{۲}} > ۱$ یا $R_{C_{pk}:۱-\frac{\alpha}{۲}} < ۱$ باشد، کارایی دو فرایند متفاوت است.

۳ مثال

داده‌های جدول زیر از مرجع چن (۲۰۰۳) گرفته شده و مربوط به دو تأمین‌کننده است، که فویل آلومینیوم را برای یک شرکت الکترونیکی در تایوان آماده می‌کنند. فویل آلومینیوم به عنوان مؤلفه کلیدی، کیفیت باطری‌ها را تعیین می‌کند و ولتاژ نیز یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های کیفی فویل آلومینیوم است. مشخصه‌های تولید ولتاژ (LSL, T, USL)، به صورت $(۵۱۰, ۵۲۰, ۵۳۰)$ است. اگر ولتاژ خارج از این فاصله باشد، فویل آلومینیوم شکسته خواهد شد و بنابراین رد می‌شود. پنجاه نمونه تصادفی از تأمین‌کننده‌های ۱ و ۲ توسط بازرس کنترل کیفیت گرفته شده است. فرایند هر تأمین کننده تقریباً نرمال و تحت کنترل آماری است.

فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته $(۱ - \alpha)۱۰۰\%$ برای نسبت C_{pm} دو فرایند عبارت است از $(۱٫۵۲۲, ۲٫۵۹۱)$ که نشان می‌دهد فرایند

جدول ۱: داده‌های ولتاژ دو تأمین‌کننده برای فویل‌های آلومینیوم

تأمین‌کننده ۱					تأمین‌کننده ۲				
۵۱۹٫۹	۵۱۹٫۵	۵۲۰٫۱	۵۱۷٫۰	۵۲۱٫۱	۵۲۱٫۷	۵۲۱٫۳	۵۲۳٫۵	۵۲۴٫۴	۵۲۲٫۵
۵۱۷٫۱	۵۱۸٫۷	۵۲۰٫۱	۵۲۱٫۲	۵۲۱٫۷	۵۲۳٫۳	۵۲۷٫۱	۵۲۴٫۹	۵۲۲٫۹	۵۲۴٫۲
۵۲۰٫۴	۵۱۷٫۹	۵۲۲٫۹	۵۱۷٫۷	۵۱۷٫۲	۵۲۳٫۹	۵۲۳٫۵	۵۲۷٫۵	۵۱۷٫۳	۵۱۸٫۷
۵۲۰٫۷	۵۲۱٫۰	۵۱۹٫۱	۵۱۸٫۴	۵۱۸٫۹	۵۱۸٫۷	۵۲۱٫۹	۵۱۹٫۷	۵۲۰٫۴	۵۲۰٫۴
۵۱۷٫۹	۵۱۸٫۴	۵۲۰٫۸	۵۱۹٫۳	۵۲۰٫۶	۵۲۳٫۷	۵۲۶٫۸	۵۱۷٫۷	۵۲۸٫۱	۵۱۷٫۵
۵۱۶٫۶	۵۱۹٫۰	۵۲۰٫۶	۵۱۷٫۹	۵۱۹٫۶	۵۲۳٫۸	۵۱۴٫۷	۵۲۲٫۶	۵۱۸٫۵	۵۲۶٫۳
۵۱۹٫۶	۵۲۲٫۶	۵۱۸٫۳	۵۲۲٫۱	۵۲۳٫۱	۵۲۳٫۲	۵۲۴٫۴	۵۲۲٫۷	۵۱۹٫۶	۵۲۰٫۴
۵۱۹٫۹	۵۱۹٫۸	۵۲۰٫۷	۵۱۶٫۵	۵۲۱٫۵	۵۲۰٫۶	۵۲۵٫۲	۵۲۴٫۱	۵۱۹٫۳	۵۲۲٫۲
۵۱۹٫۲	۵۲۱٫۲	۵۱۸٫۹	۵۱۷٫۸	۵۲۱٫۳	۵۲۰٫۱	۵۲۱٫۹	۵۱۶٫۷	۵۲۰٫۹	۵۲۵٫۲
۵۲۱٫۳	۵۱۷٫۴	۵۱۹٫۵	۵۲۲٫۰	۵۲۳٫۸	۵۲۲٫۶	۵۲۳٫۱	۵۲۱٫۷	۵۲۰٫۹	۵۲۶٫۳

۱ کاراتر از فرایند ۲ است.

بحث و نتیجه‌گیری

کمیت‌محوری تعمیم‌یافته و فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته ابزار بسیار مفیدی برای استنباط در مورد مسایل آمار صنعتی می‌باشند. شاخص‌های کارایی فرایند کمیت‌های با اهمیتی هستند که برای تعیین کارایی فرایند محصولات تولیدی استفاده می‌شوند. فاصله اطمینان ارائه شده در این مقاله می‌تواند برای مقایسه شاخص کارایی چندین فرایند و یا مقایسه‌های زوجی تعمیم داده شود.

مراجع

Bissell,A.F. (1990), How reliable is your capability index?, *Appl. Stat.* 39:331-340.

Boyles, R. A. (1991), The Taguchi capability index, *J. Qual. Technol.* 23:17-26.

Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988), A New Measure of Process Capability: C_{pm}, *Journal of Quality Technology.* 20:162-175.

Chen, J. P. and Tong, L. I. Bootstrap confidence interval of the difference between two process capability indices, *Int J Adv Manuf Technol,* 21:249-256, 2003.

Collins, A. J. (1995), Bootstrap confidence limits on process capability indices, *The Statistician.* 44:373-378.

Franklin, L. A., Wasserman, G. (1992), Bootstap lower confidence limits for capability indices, *J. Qual. Technol.* 24:196-210.

Kanichukattu, J. K. and Luke, J. A(2013), Comparison between two process capability indices using generalized confidence intervals, *Int J Adv Manuf Technol.*

Kocherlakota,S., Kocherlakota,K. (1994), Confidence intervals for the process capability ratio based on robust estimators, *Communication in Statistics—Theory and Methods.* 23:257-276.

Zimmer, L. S., Hubele, N. F., Zimmer, W. J. (2001), Confidence intervals and sample size determination of C_{pm}. *Qual. Reliab. Eng. Int.* 17:51-68.

Weerahandi, S(1995), *Exact statistical methods for data analysis,* Springer, New York.