



بکارگیری طرح AUSM+ جهت بهبود نتایج و کاهش خطای عددی روش حجم محدود جیمسون در جریان دوبعدی بین پره های ثابت توربین

فهیمة ابراهیم‌زاده ازغدی^۱، محمدرضا مه‌پیکر^{۲*} و محمود پسندیده‌فرد^۳

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۴/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۹/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۲/۱۹

چکیده

باتوجه به اهمیت نقش توربین‌ها در صنایع مختلف، طراحی دقیق‌تر جهت افزایش راندمان آن‌ها، نیازمند حل دقیقی از جریان داخل پره‌های توربین است. امروزه با پیشرفت روش‌های مدل‌سازی عددی، دستیابی به یک روش دقیق عددی برای گرفتن ناپیوستگی‌های جریان و حل دقیق آن به طوری که دارای حداقل نوسان و خطاهای عددی باشد، همواره مورد توجه محققان مدل‌سازی به روش عددی بوده است. در تحقیق حاضر، ابتدا در یک کانال همگرا-واگرای مافوق صوت یک بعدی، با استفاده از روش عددی بالادست AUSM+ و در یک شبکه محاسباتی استاندارد مدل‌سازی انجام می‌شود. نتایج به دست آمده برای موج ضربه‌ای عمودی، انطباق بسیار مطلوبی با نتایج تحلیلی دارد، که می‌تواند باعث اعتبارسنجی اولیه این روش نیز گردد. سپس برای اولین بار به بسط و بررسی روش عددی AUSM+ با استفاده از شبکه ساده نوع H، در مدل‌سازی دو بعدی جریان غیرلزج بین پره‌های ثابت توربین در دو حالت جریان خروجی مافوق صوت و مادون صوت پرداخته شده است. از مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج روش اتلاف مصنوعی جیمسون و همچنین نتایج تجربی مشاهده می‌شود که اعمال روش عددی بالادست AUSM+ مشابه روش جیمسون، علاوه بر انطباق مطلوب با نتایج آزمایشگاهی توزیع نسبت فشار در تمام طول پره، به مراتب دارای خطاهای عددی کم‌تری نسبت به روش تفاضل مرکزی جیمسون است و شرط بقای جرم را نیز حداقل ۲۵ درصد بهبود می‌بخشد. لازم به ذکر است که برای ماخ‌های بالا روش AUSM+، به مراتب نتایج بهتری خواهد داشت.

کلمات کلیدی: روش بالادست؛ AUSM+؛ پره توربین؛ طرح اتلاف مصنوعی.

Using AUSM+ Method to Improve Results and Reduce Numerical Errors for Jameson's 2D Finite Volume Technique in Turbine Stator Blades

F. Ebrahimpzadeh Azghadi¹, M.R. Mahpeykar^{2,*}, M. Pasandideh-fard³

¹ MSC student, Aero. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

² Prof., Mech. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

³ Assoc. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

Abstract

Due to the importance of the role of turbines in various industries, a more precise design is needed to improve their efficiency. In this line, a more exact solution of the flow passing through turbine blades is required. Nowadays, the advance of numerical modeling techniques has resulted in achieving more accurate tools capable of considering the discontinuities with less oscillation and numerical errors. In this work, for modeling the flow in a supersonic 1D converging-diverging channel, the AUSM+ upwind method and a computational standard grid are used. The results obtained for a strong vertical shock agree well with the analytical results, and this is considered as an initial verification of the method. In this work, for the first time, the AUSM+ numerical method is further developed using a simple H-grid mesh for modeling an inviscid subsonic and supersonic outlet flow in turbine stator blades. Comparing the model results with the results of Jameson's artificial dissipation technique and experimental data shows that both numerical methods have good agreements with the experimental pressure data. However, the AUSM+ method has less numerical errors, and improves the mass conservation by at least 25%. It is to be noted that the AUSM+ method is highly recommended for higher Mach numbers.

Keywords: Upwind Method; AUSM+; Turbine Blade; Artificial Dissipation Scheme.

۱- مقدمه

امروزه باتوجه به اهمیت نقش توربین‌ها در صنایع مختلف، جهت افزایش راندمان آن‌ها، نیاز به طراحی دقیق‌تر و در نتیجه حل درست‌تر از جریان داخل پره‌های توربین است. با توجه به پیچیدگی‌های زیاد در پدیده‌های حاکم در جریان بین پره‌های توربین، برای حل و شناسایی دقیق عملکرد آن و کاهش خطاها، روش‌های عددی مختلفی جهت شبیه‌سازی جریان ارائه شده است. در سال‌های اخیر، بدست آوردن یک روش دقیق‌تر عددی که ضمن ارائه نتایج دقیق، دارای نوسان و خطاهای عددی کمتری باشد، همواره مورد توجه محققان علم دینامیک سیالات محاسباتی^۱ بوده است.

در روش‌های حل عددی، پس از بدست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله، ابتدا با استفاده از روش‌های مختلف معادلات گسسته‌سازی می‌شوند و سپس بسط‌های حاصل به کمک برنامه‌های عددی محاسبه می‌گردند. به طور کلی در یک تقسیم‌بندی، روش‌های عددی را می‌توان به دو گروه روش‌های تفاضل مرکزی (اتلاف مصنوعی)^۲ و روش‌های بالادست تقسیم‌بندی کرد [۱].

به طور کلی، طرح‌های تفاضل مرکزی بر اساس تخمین متقارنی از اطلاعات ذخیره شده در نقاط مجاور سطح سلول عمل می‌کنند. بنابراین جهتی را که اطلاعات از آن جهت به سلول رسد، در نظر گرفته نمی‌شود و از ماهیت و نوع جریان معمولاً صرف‌نظر می‌کنند. همچنین با توجه به ناچیز بودن اتلافات موجود در طرح‌های تفاضل مرکزی و به منظور از بین بردن نوسانات موجود در حل به وسیله این روش‌ها، می‌بایست تقریب مناسبی از جملات حذف شده هنگام گسسته‌سازی، تحت عنوان اتلافات مصنوعی، به معادلات اضافه گردد که در تولید خطا و یا دقت حل معادلات، نقش مهمی را ایفا می‌کنند. پایه و اساس طرح‌های اتلاف مصنوعی در دو دهه اخیر توسط جیمسون^۳ ارائه شده است که در طرح خود، ترکیب مطلوبی از جملات اتلافی مرتبه دوم و چهارم را به عنوان ترم اتلاف مصنوعی به معادلات اضافه می‌کند [۲ و ۳].

نکته مهم در تعیین میزان جملات اتلافی است؛ زیرا افزودن بیش از حد اتلافات، باعث ایجاد گرادیان‌های تند می‌شود؛ بنابراین باید ضرایب اتلافی در پایین‌ترین حد ممکن انتخاب شود تا فقط بتواند نوسانات موجود در حل را مستهلک کند. بر این اساس، اخیراً جیمسون طرح اتلافی کاسپ^۴ را معرفی کرده است که در آن از یک تابع سویچ برای شناسایی جریان استفاده می‌کند [۵ و ۴].

در سال ۱۹۸۰ و دهه بعد از آن تلاش‌های گسترده‌ای روی روش‌های بالادست، جهت بدست آوردن روش‌های دقیق برای حل معادلات ناویراستوکس صورت گرفته است و امروزه الگوریتم‌های عددی بالادست، به پرطرفدارترین روش گسسته‌سازی مکانی تبدیل شده‌اند. روش‌های بالادست بر پایه پخش اطلاعات جریان در امتداد جهات مشخصه در دامنه فیزیکی استوارند، از این رو، تطابق خوبی با فیزیک جریان در سراسر میدان دارند از طرف دیگر، روش‌های پیچیده هنگام برنامه‌نویسی هستند و نیازمند حافظه بیشتری جهت تعیین سرعت امواج صوتی می‌باشند که جهت پخش اطلاعات را تعیین می‌کنند [۶].

طرح‌های مبتنی بر استفاده از تقریب بالادست جریان، به دو دسته روش‌های تجزیه بردار شار^۵ و روش‌های تجزیه اختلاف شار^۶ طبقه‌بندی می‌شوند. دسته اول، در گرفتن ناپیوستگی‌های قوی جریان مانند امواج ضربه‌ای بسیار قدرتمند هستند، اما در لایه مرزی و در تخمین لایه برشی ناشی از لزجت سیال، دچار مشکل می‌شوند. دسته دوم، روش‌های بسیار قدرتمند هستند، اما روابطشان پیچیده است و به راحتی نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد. امروزه تلاش در توسعه الگوریتم‌های بالادست، مبتنی بر استفاده از تجزیه شارها است که هدف، ترکیب دقت الگوریتم‌های بالادست از نوع اختلاف بردار شار و توانایی الگوریتم‌های بالادست از نوع تجزیه بردار شار در گرفتن ناپیوستگی‌های قوی میدان جریان است.

^۴ Cusp^۵ Flux Vector Splitting^۶ Flux Difference Splitting^۱ CFD^۲ Artificial Dissipation^۳ Jameson

۲- روش اتلاف مصنوعی جیمسون

در سال ۱۹۸۱ برای افزایش راندمان روش‌های پیمایش زمانی و وابسته به حجم محدود، جیمسون و همکاران [۱۰]، یک طرح چهار مرحله‌ای را ارائه نمودند که از جمله طرح‌های تفاضل مرکزی بوده است و برای انتگرال‌گیری زمانی، از روش چند مرحله‌ای رانج‌کوتا به صورت صریح استفاده می‌کند. در این طرح به منظور جلوگیری از ایجاد نوسان و حذف و کاهش نوسان‌های ایجاد شده در اطراف موج ضربه‌ای، ترکیب مطلوبی از ترم‌های اتلاfi مرتبه دو و چهار به عنوان ترم اتلاف مصنوعی به جملات شار افزوده می‌شود. همچنین جیمسون در طرح اولیه خود سه تکنیک، گام زمانی محلی^{۱۰}، میراکننده آنتالپی^{۱۱} و متوسط‌گیری ضمنی از باقیمانده‌ها^{۱۲} را برای تسریع همگرایی معرفی کرد. با اعمال قوانین بقای جرم، مومنتوم و انرژی برای جریان غیرلزج و قابل تراکم در مختصات کارتزین دو بعدی، معادلات بقای به شرح روابط (۱-۳) می‌شود [۱۱]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$F_x = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uH \end{Bmatrix}, F_y = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho vH \end{Bmatrix}, w = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$E = e + \frac{v^2}{2} \quad (3)$$

در معادله فوق، بردار w شامل متغیرهای بقایی، بردارهای F_x و F_y بیانگر شارهای غیرلزج و E انرژی کل است. در این روش، پس از تقسیم‌بندی ناحیه مورد نظر به تعدادی حجم محدود، سپس از فرم بقایی معادلات حاکم با استفاده از قضیه گرین^{۱۳} روی حجم محدود انتگرال‌گیری می‌شود. خواص برای هر حجم محدود در نقاط گوشه‌ای و با زیر نویس i و j مشخص می‌شوند. با توجه به دو بعدی بودن معادلات، انتگرال روی سطح المان ω انجام می‌شود؛ بنابراین در سیستم مختصات کارتزین رابطه (۴) بیان شده است:

$$\iint_{cell} \frac{\partial w}{\partial t} dw + \iint_{cell} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

روش‌های خانواده AUSM^v با توجه به این ایده در سال ۱۹۹۱ توسط لیو^۸ پیشنهاد و توسعه یافته‌اند که توانایی بسیار زیادی در گرفتن ناپیوستگی‌های جریان دارد و علاوه بر این در نزدیکی لایه‌های برشی دچار مشکل نمی‌شوند [۷]. پایه اصلی این روش، بر تقسیم شار به دو قسمت جابه‌جایی و فشاری است و با به‌کارگیری توابع چند جمله‌ای جهت مشخص کردن سرعت جابه‌جایی و فشار روی وجه سلول عمل می‌کند. همچنین جهت جریان با استفاده از علامت عدد ماخ و با توجه به مقادیر ماخ در طرفین هر وجه تعیین می‌شود. این روش، فرمولاسیون ساده همانند روش تجزیه بردار شار دارد و به علت قابلیت تبادل اطلاعات خواص جریان از طرفین وجه، روش دقیقی است. در این روش برای محاسبه شار جابه‌جایی از تقریب بالادست در جریان و برای قسمت فشاری نیز، از تخمین بالادست همراه با ملاحظات صوت-شناختی^۹ استفاده می‌شود [۸]. پس از ارائه شدن روش AUSM، جهت بهبود بخشیدن به کارایی روش و حذف کمبودهای آن، روش AUSM+ با ایجاد تغییراتی در الگوریتم پایه روش AUSM و با تعریف سرعت صوت در وجه سلول ارائه گردید [۹].

در کار حاضر، پس از ارائه طرح اتلاف مصنوعی جیمسون و طرح بالادست AUSM+، ابتدا به بررسی جریان غیر لزج یک بعدی در هندسه نازل همگرا-واگرای مافوق صوت پرداخته می‌شود و پس از مقایسه نتایج به دست آمده از روش AUSM+ با نتایج تئوری، اعتبارسنجی اولیه انجام می‌شود. سپس به منظور مقایسه عملکرد طرح‌های تفاضل مرکزی و بالادست، برای اولین بار به بررسی نتایج حاصل از طرح‌های اتلاف مصنوعی جیمسون و بالادست AUSM+ در حل معادلات جریان دو بعدی غیرلزج، بین پره‌های ثابت توربین بخار خشک یا تک فاز با استفاده از شبکه استاندارد یا شبکه ساده نوع H در دو حالت جریان خروجی مافوق صوت و خروجی مادون صوت پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است، علت انتخاب شبکه ساده نوع H، کاهش پیچیدگی و حجم محاسبات تا حد زیادی است و همچنین تاثیر روش بالادست AUSM+ را بهتر نشان می‌دهد.

¹⁰ Local Time Stepping

¹¹ Damping Enthalpy

¹² Implicit Residual Averaging

¹³ Green Theorem

⁷ Advection Upstream Splitting Method

⁸ Liou

⁹ Acoustic Considerations

همانگونه که گفته شد، تمام طرح‌های تفاضل مرکزی به دلیل حذف جملات با مرتبه پایین‌تر هنگام گسسته‌سازی از تمایل خاصی به ناپایداری برخوردارند. در این روش، به منظور جلوگیری از ایجاد نوسان و حذف و کاهش نوسان‌های ایجاد شده در اطراف موج ضربه‌ای از ترم‌های اتلافی استفاده می‌کنند. ترم اتلافی اولیه که در نظر گرفته می‌شود، ترمی به صورت مشتق دوم بردار w است که ضریب آن متناسب با مقدار مطلق مشتق دوم فشار است؛ بنابراین ترم اتلافی به گونه‌ای است که در نزدیکی موج ضربه‌ای و نقطه سکون، مقدار بیشتری اتلاف به معادلات می‌افزاید و در مابقی میدان جریان، مقدار بسیار کمتری اتلاف به معادلات افزوده می‌شود. این مقدار ترم اتلافی برای از بین بردن نوسانات داخل جریان کافی است؛ ولی پاسخ جریان به طور کامل به سمت حالت دائم همگرا نمی‌شود. برای رفع این مشکل و به منظور از بین بردن کامل نوسانات می‌بایست در نواحی هموار جریان که تغییرات فشار کم است، مقدار اتلاف با اضافه کردن یک ترم اتلافی از نوع مشتق چهارم، افزایش یابد. این ترم اتلافی خود در نزدیکی موج ضربه‌ای، باعث جهش ناگهانی می‌شود، بنابراین در نزدیکی موج ضربه‌ای به سمت صفر میل می‌کند؛ در حالی که در نواحی عاری از موج ضربه‌ای مقدار قابل ملاحظه‌ای دارد. ترم‌های رسته دو و چهار برای متغیرهای باقی w به صورت روابط (۹-۱۰) می‌باشند [۱۲]:

$$D_{ij}^4(W) = D_{xij}^4(W) + D_{yij}^4(W) \quad (9)$$

$$D_{ij}^2(W) = D_{xij}^2(W) + D_{yij}^2(W) \quad (10)$$

پس از افزودن ترم اتلاف مصنوعی معادله انفصال برای گره A به صورت رابطه (۱۱) در می‌آید:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_A = R_A(W) - D_A(W) \quad (11)$$

در این روش برای افزایش کارایی و سرعت حل، ترم اتلاف مصنوعی $D_A(W)$ فقط در اولین مرحله از مراحل رانج کوتاه محاسبه و در سایر مراحل از همان مقدار مرحله اول استفاده می‌شود [۱۱].

۳- روش بالادست AUSM+

در سال ۱۹۹۶ لیو [۹] با ایجاد تغییراتی در الگوریتم پایه روش AUSM و با تعریف سرعت صوت در وجه سلول، روش بالادست AUSM+ را ارائه کرد. در این روش، مشکل پایداری عددی که در روش‌های پیش از این وجود داشت، رفع گردیده

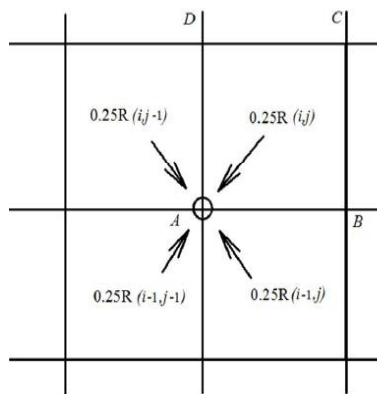
با تقریب زدن $\frac{\partial w}{\partial t}$ با مقدار آن در حجم محدود و خارج نمودن آن از انتگرال بر اساس رابطه (۵)، شار معادلات تکمیل می‌شود:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\oint_{cell} (F_x dy - F_y dx) \quad (5)$$

رابطه برداری (۵) نشان‌دهنده معادلات پیوستگی و مومنوم در جهت‌های x و y و انرژی است. پس از انتگرال‌گیری، معادله بقا به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{i,j} = R_{ij}(w) \quad (6)$$

در معادله بالا $R_{ij}(w)$ بیانگر باقیمانده‌ها است. باید تصریح نمود که تغییرهای محاسبه شده برای w مربوط به کل سلول محاسباتی است، درحالی که متغیرهای جریان می‌بایست در نقاط کنترلی ذخیره شود. بنابراین، تغییرهای حاصله به گوشه‌های سلول اختصاص داده شده است. این عمل با سادگی و با تقسیم باقیمانده به طور مساوی، بین نقاط چهارگانه A, B, C, D مطابق با شکل ۱ انجام گرفته است.



شکل ۱- المان‌های محاسباتی و نحوه توزیع باقیمانده‌ها به نقاط شبکه

بدین ترتیب، طرح حاصل شده در فضا متقارن و به طور منطقی تقویت و معادله انفصال بدست آمده برای نقطه A به صورت رابطه (۸) در آمده است [۱۱]:

$$R_A(w) = 0.25 \times [R_{i,j} + R_{i-1,j} + R_{i,j-1} + R_{i-1,j-1}] \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_A = R_A(w) \quad (8)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، معادله (۸) به فرم یک معادله دیفرانسیل بوده، به روش‌های رایج قابل حل است.

است [۱۳]. مطابق معادله (۲) بردارهای شار در جهت x و y از دو قسمت جابه‌جایی و فشاری تشکیل شده است.

$$F_x = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uH \end{Bmatrix} \rightarrow u \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$F_y = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho vH \end{Bmatrix} \rightarrow v \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

همان‌گونه که در بخش مقدمه بیان شد، پایه اصلی روش با در نظر گرفتن عملکرد مجزا این دو ترم، بر تقسیم شار به دو قسمت جابه‌جایی و فشاری است. در معادلات (۱۲-۱۳) مقادیر اسکالر یعنی $(\rho, \rho u, \rho v, \rho H)$ با استفاده از سرعت جابه‌جایی به دست آمده، منتقل می‌شود و تغییرات فشار در میدان حل توسط سرعت موج آکوستیک است. در واقع ایده مجزا کردن شار جابه‌جایی به آن دلیل بوده که گسسته‌سازی برای هر موقعیت چپ و راست، رفتاری بر اساس طرح بالادست داشته باشد. جهت همخوانی با روابط مطرح شده، به جای استفاده از سرعت در روابط بالا از عدد ماخ استفاده گردیده است که در آن صورت، شار روی وجه سلول به صورت رابطه (۱۴) خواهد بود:

$$F_K = M_K \begin{Bmatrix} \rho a \\ \rho au \\ \rho av \\ \rho aH \end{Bmatrix}_{L/R} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Pn_x \\ Pn_y \\ 0 \end{Bmatrix}_K \quad (14)$$

زیر نویس L و R به ترتیب، مربوط به سلول چپ و راست وجه مورد نظر است که با توجه به مقادیر عدد ماخ روی وجه سلول (M_K)، در روابط بالا اندیس‌ها به صورت رابطه (۱۵) معرفی می‌شوند:

$$(\cdot)_{L/R} = \begin{cases} (\cdot)_L & \text{if } M_K \geq 0 \\ (\cdot)_R & \text{else} \end{cases} \quad (15)$$

بنابراین نحوه گسسته‌سازی شار کلی (F_K) در وجه سلول در حالت دو بعدی، مطابق معادله (۱۶) است:

$$F_K = \begin{cases} \rho_L \xi_s \tilde{a} M_K \Phi_L + g P_K & \text{if } M_K \geq 0 \\ \rho_R \xi_s \tilde{a} M_K \Phi_R + g P_K & \text{else} \end{cases} \quad (16)$$

$$g = [0, n_x, n_y, 0]^T, \xi_s = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (17)$$

$$\Phi = \frac{m}{\rho} = [1, u, v, H]^T \quad (18)$$

در روابط فوق n_x و n_y مولفه‌های بردار نرمال بر سطح سلول می‌باشند و ξ_s معکوس بردار قائم بر سطح سلول است که جهت بی بعدسازی از آن استفاده شده است و \tilde{a} در آن مقدار عددی سرعت صوت را نشان می‌دهد که در اعداد ماخ

پایین، جایگزین سرعت صوت متوسط می‌شود [۱۴ و ۱۵]. سرعت صوت متوسط در وجه سلول به صورت رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$\bar{a} = \frac{a_L + a_R}{2} \quad (19)$$

ماخ انتقال دهنده اطلاعات و فشار در وجه سلول به صورت تابع وزنی از مجموع عدد ماخ چپ و راست وجه سلول محاسبه می‌گردند که روابط مورد نیاز جهت محاسبه آن به صورت روابط (۲۰-۲۳) ارائه گردیده است [۱۶]:

$$M_K = M_L^+ + M_R^- \quad (20)$$

$$P_K = P^+ P_L + P^- P_R \quad (21)$$

$$\begin{cases} M^+ = M_{2L}, P^+ = P_{5L} & \text{if } |M_L| < 1 \\ M^+ = M_{1L}, P^+ = \frac{M_{1L}}{M_L} & \text{else} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} M^- = M_{2R}, P^- = P_{5R} & \text{if } |M_R| < 1 \\ M^- = M_{1R}, P^- = \frac{M_{1R}}{M_R} & \text{else} \end{cases} \quad (23)$$

بالانویس + و - مربوط به انتشار اطلاعات از چپ و راست سلول می‌باشند و زیر نویس L و R نیز، مربوط به سلول چپ و راست وجه می‌باشند. $M_{1,2L,R}$ چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم از اعداد ماخ چپ و راست هستند که به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$M_{1R} = \min(M_R, 0), M_{1L} = \max(M_L, 0) \quad (24)$$

$$M_{2R} = -\frac{1}{4}(M_R - 1)^2, M_{2L} = \frac{1}{4}(M_L + 1)^2 \quad (25)$$

$P_{5L,R}$ نیز به صورت چندجمله‌ای درجه پنجم $M_{L,R}$ بیان می‌شوند:

$$P_{5L} = +M_{2L}(2 - M_L) + \frac{3}{16}M_L(M_L^2 - 1)^2 \quad (26)$$

$$P_{5R} = -M_{2R}(2 + M_R) - \frac{3}{16}M_R(M_R^2 - 1)^2 \quad (27)$$

عدد ماخ در چپ و راست وجه سلول، با توجه به سرعت صوت روی وجه سلول بدست می‌آید که برای محاسبه آن می‌توان از روابط ساده (۲۸-۲۹) استفاده کرد [۱۷]:

$$M_{R,L} = \frac{V_{R,L}}{a_{j+\frac{1}{2}} \xi_s} \quad (28)$$

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{a_j a_{j+1}} \text{ OR } a_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(a_j + a_{j+1})}{2} \quad (29)$$

$$\text{OR } a_{j+\frac{1}{2}} = \min(a_j, a_{j+1})$$

الگوریتم AUSM+ برای جریان با ماخ پایین نیز توسعه یافته است. برای این کار با تعریف سرعت صوت عددی \tilde{a} الگوریتم عددی را از اعمال پیش شرط برای محاسبات جریان‌های ماخ پایین بی نیاز کرد و با بزرگ کردن مجازی عدد ماخ از کوچک شدن بیش از حد توابع وزنی که بر اساس

۴- مشخصات هندسی حجم کنترل یک بعدی و

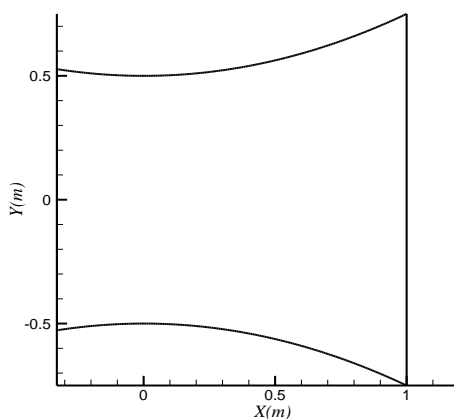
دو بعدی

شکل ۲ هندسه نازل همگرا-واگرای مورد بررسی در جریان مافوق صوت غیرلزج یک بعدی را نشان می‌دهد که معادله منحنی آن مطابق با معادله (۳۲) و نسبت سطح خروجی به گلوگاه در آن برابر با ۱/۵ می‌باشد.

$$y = 0.25x^2 + 0.5 \quad (38)$$

شکل ۳ نیز، هندسه پره مورد نظر که مربوط به مقطع میانی پره‌ی ثابت توربین بخار است و مرزهای میدان جریان را نشان می‌دهد. همچنین همانگونه که ملاحظه می‌شود، شبکه مورد استفاده در پره توربین در تحقیق حاضر، از شبکه استاندارد و ساده نوع H است که در نقاط حساس جریان به ظرافت آن افزوده شده است. علاوه بر هندسه جریان که متعلق به یک مقطع از پره توربین بخار است، خواص سیال از جمله ثابت گاز، گرمای مخصوص و گاما بر اساس خواص بخار آب استفاده شده است.

باتوجه به شکل ۳، چهار نوع مرز قابل تشخیص است که عبارتند از مرز ورودی AH، مرز خروجی DE، مرز صلب یا دیواره GF و BC و مرزهای پرودیک AB، CD، EF و GH. لازم به ذکر است، روی سطوح صلب برای سیال واقعی و یا ایده‌آل یک اصل عدم عبور جریان وجود دارد. به عبارت دیگر، مولفه عمودی (نسبت به سطح صلب) سرعت جریان باید روی سطح صفر در نظر گرفته شود که مفهوم فیزیکی آن عدم عبور دبی جرمی از سطح صلب است. مولفه مماسی سرعت (نسبت به سطح پره) مجدداً در جهت محور مختصات (x, y)، به دو مولفه u و v تصویر می‌شود.



شکل ۲- هندسه نازل همگرا- واگرا

آن میزان استفاده از ماخ بالادست و پایین دست را مشخص می‌کنند، از جواب‌های غیرمنطقی جلوگیری کرد. برتری این الگوریتم از آنجا ناشی می‌شود که اگر سرعت جریان به صفر میل کند، سرعت صوت عددی نیز به صفر میل می‌کند. همانطور که اشاره شد، در روش‌های خانواده AUSM شار عبوری از وجه سلول برحسب عدد ماخ و سرعت صوت متوسط تعریف می‌شود که البته ابداع کنندگان مجموعه این روش‌ها نشان دادند در صورت استفاده از سرعت صوت عددی به جای سرعت صوت متوسط، می‌تواند منجر به نتایج بهتری به ویژه در سرعت‌های بسیار کم گردد. مقدار عددی سرعت صوت به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\bar{a} = f(\bar{M}, M) \bar{a} \quad (30)$$

که در آن ضریب مقیاس کننده به صورت روابط (۳۱) تعریف می‌شود:

$$f(\bar{M}, M_*) = \frac{\sqrt{(1-M_*^2)^2 \bar{M}^2 + 4M_*^2}}{(1+M_*^2)} \quad (31)$$

عدد ماخ مرجع و متوسط نیز، توسط روابط (۳۲-۳۳)

محاسبه می‌شوند:

$$M_*^2 = \min(1, \max(\bar{M}^2, M_{CO}^2)) \quad (32)$$

$$\bar{M} = \frac{\bar{M}_L + \bar{M}_R}{2} \quad (33)$$

مقدار M_{CO}^2 را لیبو 10^{-4} پیشنهاد کرده است که جهت جلوگیری از ایجاد شرایط تکین در نقطه سکون است. همین طور جهت اطمینان از پیوستگی میدان فشار و سرعت (به دلیل واگرایی جواب‌ها در اعداد ماخ پایین)، جملات پخش فشاری D_p و پخش سرعت D_v به روابط ارائه شده برای محاسبه عدد ماخ و فشار در وجه سلول افزوده می‌شود:

$$M_K = M^+ + M^- + D_p, \quad P_K = P^+ P_L + P^- P_R + D_p \quad (34)$$

در معادلات (۳۴) جملات پخش فشاری D_p و پخش

سرعت D_v به صورت روابط (۳۵-۳۶) خواهند بود:

$$D_v = -P^+ P^- \left(\frac{\rho_L + \rho_R}{2} \right) \bar{a} (M_R - M_L) \quad (35)$$

$$D_p = \frac{1}{4} \frac{\Delta M (P_L - P_R)}{M^{*2} (P_L - P_R)} \quad (36)$$

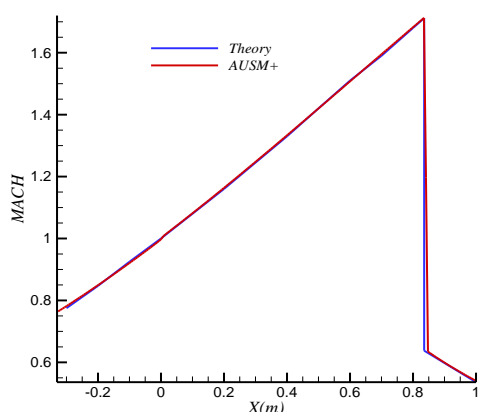
در روابط فوق، ΔM به صورت معادله (۳۷) استفاده می-

شود:

$$\Delta M = (M_{2L} - M_{1L}) - (M_{2R} - M_{1R}) \quad (37)$$

عدد ماخ در ورودی نازل از حدود ۰/۷۷ شروع می‌شود و با کاهش سطح مقطع تا نزدیکی خروجی کانال تا حدود ۱/۷ افزایش می‌یابد و سپس یک موج ضربه‌ای عمودی اتفاق می‌افتد. چگونگی پیش‌بینی موقعیت موج ضربه‌ای، مقادیر عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای و همچنین مقدار افت فشار سکون توسط روش بالادست AUSM+ و حل تئوری در جدول ۱ آمده است. همانگونه که از جدول ۱ و شکل ۴ مشاهده می‌شود، روش AUSM+ انطباق بسیار مطلوبی با نتایج تئوری دارد و هیچگونه نوسانی در اطراف موج ضربه‌ای از خود نشان نمی‌دهد [۱۹].

شکل ۵ نیز، نمودار توزیع فشار سکون نسبت به فشار سکون ورودی در طول نازل را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۵ و جدول ۱ مشاهده می‌شود، افت فشار سکون ناشی از موج ضربه‌ای در نازل در روش AUSM+ به مقدار بدست آمده از حل تئوری بسیار نزدیک است و هیچگونه نوسانی در نزدیکی موج ضربه‌ای مشاهده نمی‌شود؛ لذا می‌توان به تصدیق کد نوشته شده AUSM+ اطمینان حاصل کرد.



شکل ۴- توزیع عدد ماخ در طول نازل همگرا- واگرا

جدول ۱- مقایسه افت فشار سکون، موقعیت موج ضربه‌ای و عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای

AUSM+	تئوری (جدول دینامیک گازها)	نام طرح
۰/۸۴۶	۰/۸۴۹	افت فشار سکون
۰/۸۳۵	۰/۸۳۶	شروع موج ضربه‌ای (m)
۰/۸۴۷	۰/۸۳۶	انمام موج ضربه‌ای (m)
۱/۷۱۲	۱/۷۱۱	عدد ماخ قبل از موج ضربه ای
۰/۶۳۵	۰/۶۳۸	عدد ماخ بعد از موج ضربه ای

به علت انبساطی بودن جریان در توربین‌ها لایه مرزی بسیار نازک و با تقریب قابل قبول جریان می‌تواند غیر لزج فرض شود. شرط‌های مرزی برای جریان پایدار دو بعدی با زاویه ورودی صفر، تراکم پذیر، آدیاباتیک و غیر لزج در دو حالت اعمال می‌شود:

۱- حالت مافوق صوت در پایین دست پره:

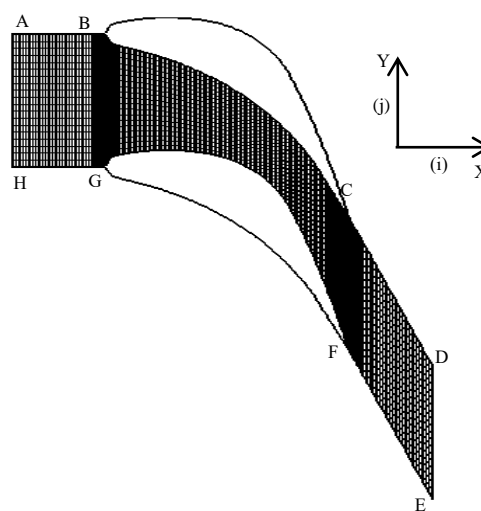
$$\frac{P_{out}}{P_{0in}} = 0.48, \quad T_{0in} = 654.3 \text{ K}$$

$$P_{0in} = 170 \text{ kPa}$$

۲- حالت مادون صوت در پایین دست پره:

$$\frac{P_{out}}{P_{0in}} = 0.57, \quad T_{0in} = 265.2 \text{ K}$$

$$P_{0in} = 170 \text{ kPa}$$

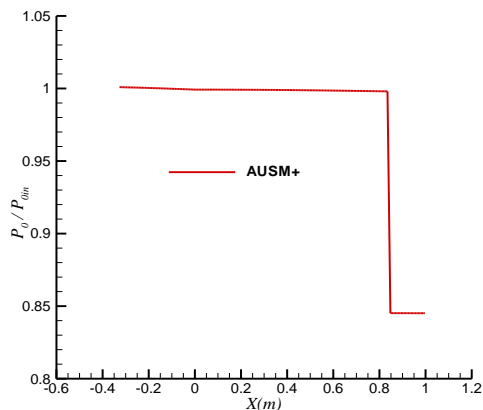


شکل ۳- شبکه استاندارد نوع H

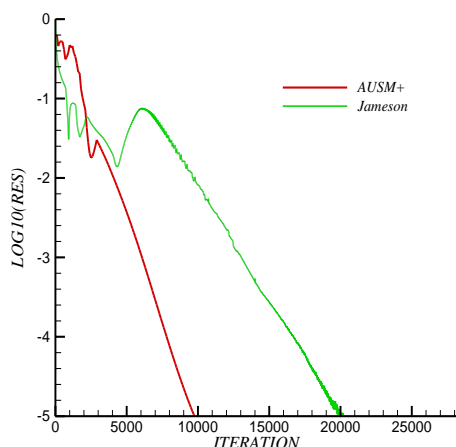
۵- بحث و بررسی نتایج

در ابتدا برای بررسی عملکرد صحیح برنامه با استفاده از روش عددی بالادست AUSM+ به مدلسازی جریان یک بعدی غیرلزج داخل نازل همگرا-واگرا با معادله منحنی مطابق با معادله (۳۲) و با شبکه بندی استاندارد با تعداد ۲۰۰ سلول در راستای X پرداخته شده است که با این تعداد نقاط شبکه حل از شبکه مستقل است. در این حالت، جریان گذر صوت با نسبت فشار پایین دست به فشار سکون ورودی برابر با ۰/۷ مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج حاصل از روش بالادست AUSM+ با نتایج تئوری به دست آمده از جداول موج ضربه‌ای عمودی مقایسه شده است. شکل ۴، توزیع عدد ماخ در طول نازل با استفاده از روش بالادست AUSM+ و حل تئوری را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این حالت

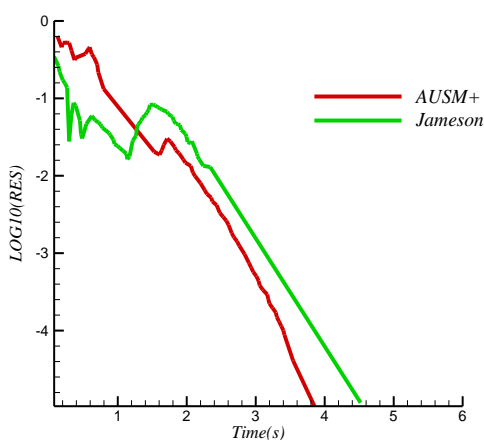
داده شده است که در آن نسبت فشار پشت به فشار سکون ورودی برابر با ۰/۴۸ است.



شکل ۵- تغییرهای نسبت فشار سکون به فشار سکون ورودی در طول نازل



شکل ۶- نرخ همگرایی بر حسب تکرار



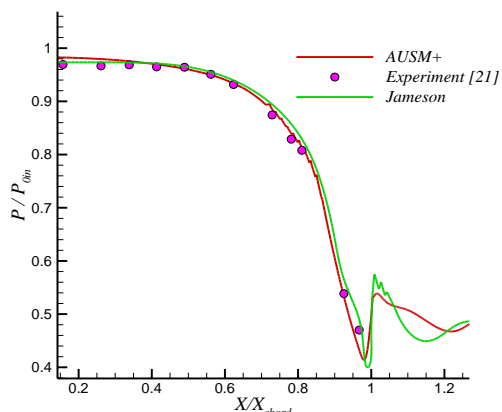
شکل ۷- نرخ همگرایی بر حسب زمان

شکل ۶، نرخ همگرایی که معیار آن بر اساس معادله پیوستگی و اختلاف مقادیر چگالی در دو مرحله است را بر حسب تعداد تکرار برای روش‌های جیمسون و AUSM+ در نازل و با نسبت فشار پایین دست به فشار سکون ورودی برابر با ۰/۷ نشان می‌دهد. سرعت همگرایی، وابسته به عدد CFL است که در این بررسی، این مقدار برای هر دو طرح یکسان و برابر با ۰/۵ در نظر گرفته شده است. همانطور که از شکل ۶ مشخص می‌شود، سرعت همگرایی روش جیمسون نسبت به روش AUSM+ بسیار پایین تر است، به عبارت دیگر، روش بالادست AUSM+ به تعداد تکرار کمتری برای رسیدن به یک مقدار مشخص باقیمانده در مقایسه با روش جیمسون نیاز دارد. شکل ۷ نیز، نرخ همگرایی بر حسب زمان را برای دو روش جیمسون و AUSM+ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، روش AUSM+ زمان کمتری برای همگرا شدن نیاز دارد.

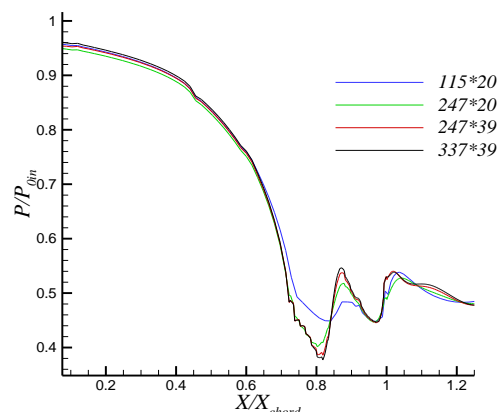
پس از مدلسازی جریان یک بعدی و غیر لزج داخل هندسه نازل همگرا- واگرا و اعتبارسنجی آن، به بررسی روش بالادست AUSM+ در مدلسازی جریان دو بعدی غیرلزج داخل پره توربین پرداخته می‌شود. در ابتدا برای بررسی عدم وابستگی نتایج حاصل از روش AUSM+ به شبکه، میدان جریان با استفاده از شبکه‌بندی‌های مختلف بررسی شده است.

شکل ۸، تغییرهای نسبت فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح مکش برای شبکه‌بندی‌های مختلف با استفاده از روش AUSM+ را نشان می‌دهد، همانطور که مشاهده می‌شود، رسیدن به جواب مستقل از حل برای روش AUSM+ با استفاده از شبکه 39×247 حاصل می‌شود. همچنین برای روش جیمسون شبکه با اندازه 12×115 انتخاب شده است که استقلال آن در مراجع قبلی به اثبات رسیده است [۲۰ و ۲۱].

نتایج حاصل از اعمال روش بالادست AUSM+ و طرح اتلاف‌مصنوعی جیمسون در حالت‌های جریان خروجی مادون صوت و مافوق صوت در شکل‌های ۹ تا ۱۳ ارائه شده است و با نتایج آزمایشگاهی [۲۱] برای پنج حالت، صحه‌گذاری یا اعتبارسنجی مدل عددی AUSM+ انجام شده است. در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱، تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره به ترتیب در سطوح مکش، فشار و خط مرکزی جریان برای جریان مافوق صوت نشان



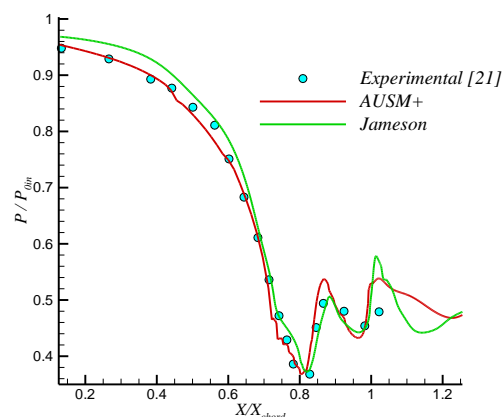
شکل ۱۱- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح فشار جریان مافوق صوت



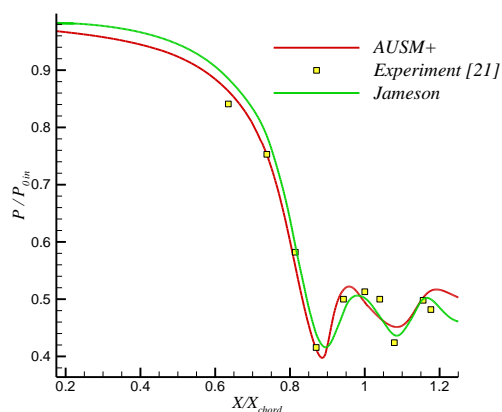
شکل ۸- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح مکش برای شبکه بندی‌های مختلف در روش AUSM+

شکل‌های ۱۲ و ۱۳، تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره به ترتیب در سطوح مکش و فشار برای جریان مادون صوت با نسبت فشار پشت به فشار سکون ورودی برابر با ۰/۵۷ را نشان می‌دهد. تغییرهای شدید فشار در شکل‌های ۹ تا ۱۳ در ناحیه انتهایی پره مشاهده می‌شود که مربوط به موج‌های ضربه‌ای آئروپدینامیکی است. افزایش فشار قابل ملاحظه روی سطح فشار در شکل ۱۱ و ۱۳، ناشی از موج ضربه‌ای آئروپدینامیکی در ناحیه لبه فرار روی سطح مذکور است که تا سطح مکش ادامه می‌یابد. اولین افزایش فشار در روی سطح مکش نشان داده شده در شکل ۹ و ۱۲ نیز، ناشی از انتشار موج ضربه‌ای انتهایی سطح فشار فوقانی و برخورد آن با سطح مکش پایینی است. افزایش فشار بعدی روی سطح مکش نیز، معرف موج ضربه‌ای آئروپدینامیکی در انتهای سطح مکش یا لبه فرار است. همانگونه که در شکل‌های ۹ تا ۱۳ مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از هر دو روش، انطباق نسبتاً مطلوبی با نتایج تجربی دارند، ولی نتایج روش بالادست AUSM+، که متعاقباً آورده می‌شود، از خطاهای عددی کمتر و حفظ بقای جرم بهتری برخوردار است.

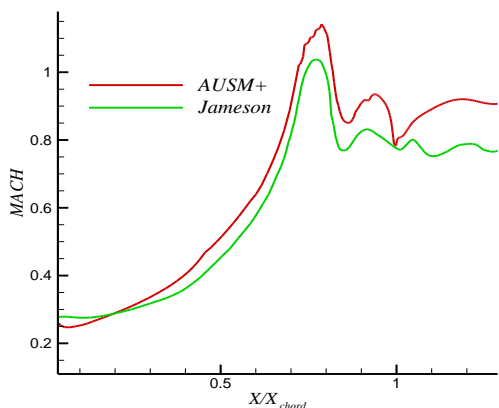
شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ نیز، توزیع عدد ماخ در طول پره در خط مرکزی جریان در حالت جریان مافوق صوت و در سطوح مکش و فشار در حالت جریان خروجی مادون صوت را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج ماخ باتوجه به نتایج توزیع فشار است.



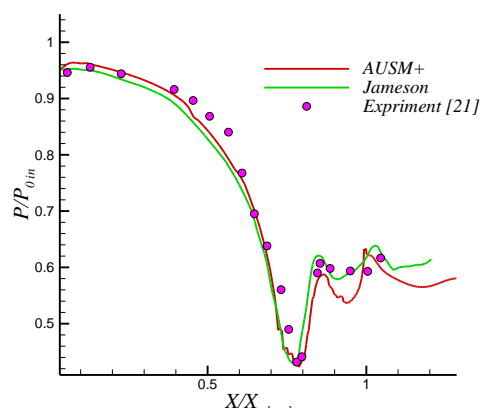
شکل ۹- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح مکش جریان مافوق صوت



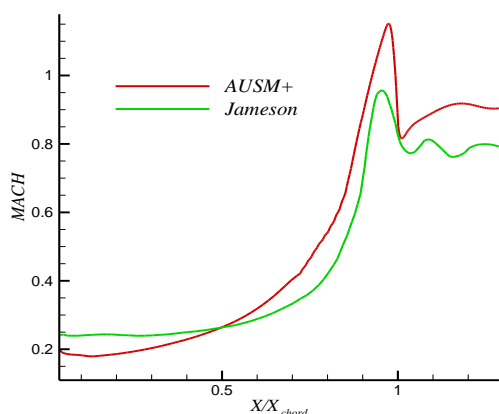
شکل ۱۰- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در خط مرکزی جریان مافوق صوت



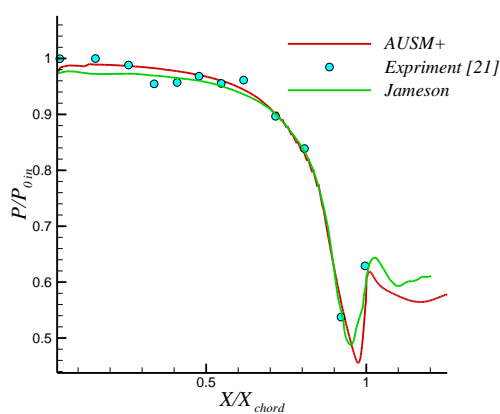
شکل ۱۵- منحنی تغییرهای ماخ در طول پره در سطح مکش جریان مادون صوت



شکل ۱۲- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح مکش جریان مادون صوت



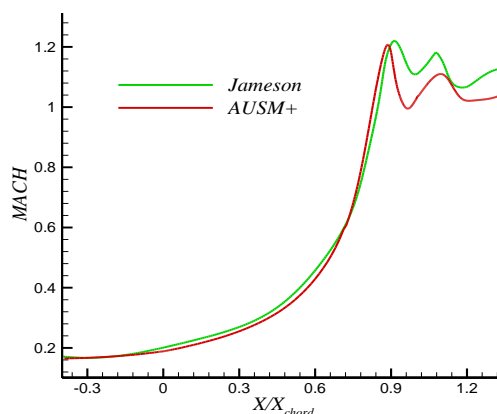
شکل ۱۶- منحنی تغییرهای ماخ در طول پره در سطح فشار جریان مادون صوت



شکل ۱۳- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح فشار جریان مادون صوت

با توجه به این که جریان مورد نظر آدیاباتیک و غیرلزج است، مقدار فشار سکون باید تا قبل از موج ضربه‌ای ثابت بماند. شکل‌های ۱۷ و ۱۸ تغییرهای فشار سکون نسبت به فشار سکون اولیه در طول پره و در خط مرکزی جریان به ترتیب برای جریان مافوق صوت و مادون صوت را نشان می‌دهد، هر چه این تغییرها (نسبت به خط افقی $y=0$) کمتر باشد، خطاهای عددی کمتر بوده، حل جریان به خصوص در محدوده خارج از امواج ضربه‌ای به پیش فرضها نزدیکتر است. از آنجا که این تغییرها و نوسانات در روش بالادست AUSM+ کمتر است، لذا این روش به فرضیات مسئله و همچنین به واقعیت جریان نیز نزدیکتر است.

لازم به ذکر است، در شرایط پایدار برای بقای جرم، باید میزان دبی ورودی در طول مسیر ثابت باشد. شکل‌های ۱۹ و



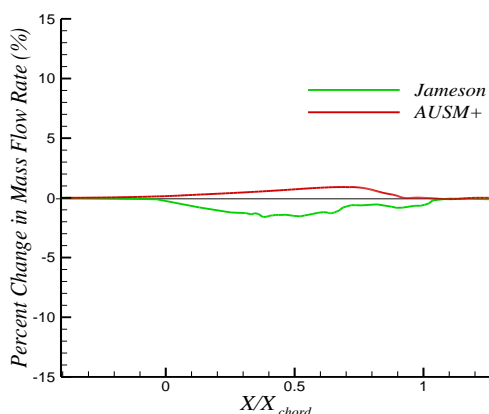
شکل ۱۴- منحنی تغییرهای ماخ در طول پره در خط مرکزی جریان مافوق صوت

لج در هندسه ساده نازل همگرا-واگرا و مشاهده انطباق مطلوب نتایج با نتایج تحلیلی، به مدلسازی دو بعدی جریان غیرلج بین پره‌های ثابت توربین با استفاده از شبکه استاندارد و ساده نوع H با استفاده از روش عددی بالادست AUSM+ پرداخته شده است. همچنین از مقایسه نتایج حاصل از روش بالادست AUSM+، روش اتلاف مصنوعی جیمسون و نتایج آزمایشگاهی مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش عددی بالادست AUSM+ ضمن ارائه نتایج منطبق با نتایج تجربی در تمام طول پره، در مقایسه با نتایج حاصل از روش جیمسون، دارای اتلافات فشار سکون کمتری است؛ لذا روش بالادست AUSM+ خطاهای عددی کمتری دارد و در نتیجه به واقعیت جریان نزدیک‌تر می‌باشد. ضمن این‌که روش بالادست AUSM+، شرط بقای جرم را بهتر ارضا نموده و

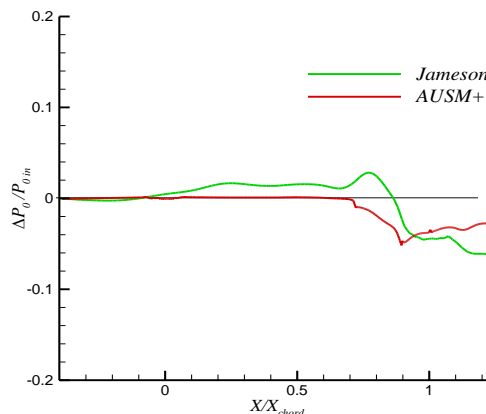
۲۰، تغییرات دبی جرمی نسبت به دبی جرمی ورودی در طول پره به ترتیب برای جریان خروجی مافوق صوت و مادون صوت با استفاده از دو روش اتلاف مصنوعی جیمسون و روش بالادست AUSM+ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود، در روش AUSM+ نوسانات دبی جرمی کمتر و بنابراین شرط بقای جرمی شرایط مطلوب‌تری را کسب کرده است.

۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

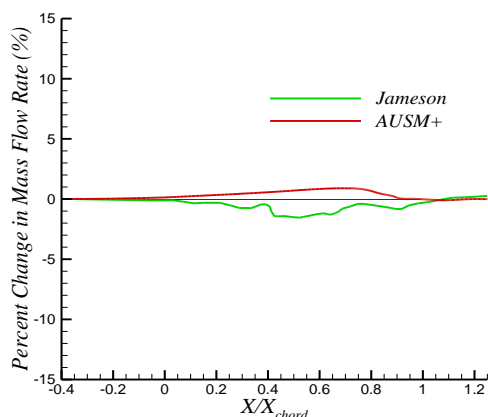
به منظور شناسایی دقیق عملکرد توربین‌ها، روش‌های عددی مختلفی ارائه شده است، با داشتن اهمیتی که در راندمان این تجهیزات وجود دارد، هدف بر راستای افزایش راندمان قرار داده می‌شود. در تحقیق حاضر، پس از اطمینان از دقت عملکرد برنامه با استفاده از مدلسازی جریان یک بعدی غیر-



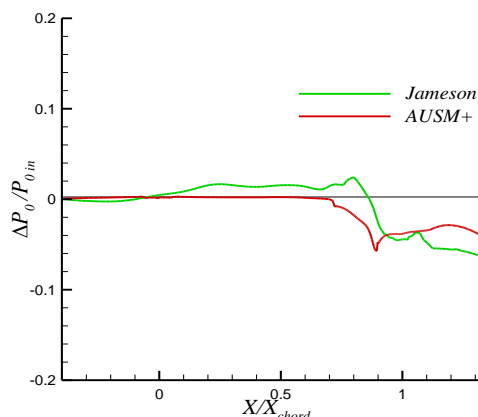
شکل ۱۹- تغییرهای نسبت دبی جرمی به دبی جرمی ورودی جریان مافوق صوت



شکل ۱۷- درصد تغییرهای نسبت فشار سکون به فشار سکون ورودی در خط مرکزی جریان مافوق صوت



شکل ۲۰- تغییرهای نسبت دبی جرمی به دبی جرمی ورودی جریان مادون صوت



شکل ۱۸- درصد تغییرهای نسبت فشار سکون به فشار سکون ورودی در خط مرکزی جریان مادون صوت

[۱۱] یوسفی راد ادریس، مه پیکر محمدرضا، تیمورتاش علیرضا (۱۳۹۳) بکارگیری روش کاسپ و بهینه سازی آن با استفاده از روش معکوس جهت بهبود روش حجم محدود جیمسون دوبعدی. مجله علمی و پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۸، صفحه ۱۷۴-۱۸۲.

[۱۲] یوسفی راد ادریس، مه پیکر محمدرضا، تیمورتاش علیرضا (۱۳۹۱) به کارگیری روش کاسپ جهت بهبود حل عددی دو بعدی در روش حجم محدود جیمسون بین پره های ثابت توربین. دوازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه صنعتی امیر کبیر.

[13] Hajzman M, Bublik O, Vimmr J (2007) On the Modelling of Compressible inviscid flow problems using AUSM Schemes. ACM 1: 469-478.

[14] Liou MS, Edwards JR (1999) Numerical Speed of Sound and its Application to Schemes for All Speed. AIAA Paper 993268.

[15] Liou M S, (2006) A sequel to AUSM, Part II: AUSM+up for all speeds. J Comput Phys 214: 137-170.

[16] Colonia S, Steil R, Barakos GN (2014) Implicit Implementation of the AUSM+ and AUSM+up Schemes. Int J Numer Meth Eng 75: 687-712.

[17] Liou MS (2001) Ten years in the making-AUSM-family. AIAA Paper 2521.

[18] Chima RV, Liou MS (2003) Comparison of the AUSM+ and H-CUSP schemes for turbomachinery applications. AIAA Paper 4120.

[۱۹] ابراهیم‌زاده فهیمه، پسندیده فرد محمود، مه پیکر محمدرضا (۱۳۹۳) بررسی طرح‌های بالادست AUSM+، تفاضل مرکزی کاسپ و اسکالر در جریان با بازه ماخ های بسیار کم تا ماوراء صوت. بیست و سومین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه صنعتی امیر کبیر.

[۲۰] یوسفی راد ادریس، مه پیکر محمدرضا (۱۳۹۱) به کارگیری روش معکوس جهت تلفیق حل عددی دوبعدی، حجم محدود و تفاضل محدود بین پره های ثابت توربین. هجدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران.

[21] Bakhtar F, Mahpeykar MR, Abbas K (1995) An investigation of nucleating flows of steam in a cascade of turbine blading-theoretical treatment. J Fluids Eng 117(1).

حدود ۲۵ درصد بهبود می‌یابد. لازم به ذکر است که با مقایسه نمودارهای توزیع فشار مربوط به جریان خروجی مادون‌صوت و جریان خروجی مافوق‌صوت مشاهده می‌شود که روش بالادست AUSM+ برای ماخ‌های بالاتر نسبت به نتایج روش اتلاف‌مصنوعی جیمسون به مراتب بهتر است.

۷- مراجع

[1] Singh R, Holmes G (2012) Evaluation of an Artificial Dissipation and AUSM based Flux Formulation: AD-AUSM. AIAA paper 2012-3069.

[2] Jameson A (1995) Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence. Int J Comput Fluid Dyn 4(2): 171-218.

[3] Jameson A (1995) Analysis and design of numerical scheme for gas dynamics, 2: artificial diffusion and discrete shock structure. Int J Comput Fluid Dyn 5(1-2): 1-38.

[4] Liu F, Jennions I, Jameson A (1998) Computational of turbomachinery flow by a convective-upwind-split-pressure (CUSP) scheme. 36th ASME. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

[5] Pasandideh fard M, Salari M, Mansoor M, Malek Jafarian M (2008) An investigation and comparison of ROE upwin methods with CUSP central difference schemes. 12th ACFM. Daejeon, Korea.

[۶] مظاهری کیومرث، دربندی مسعود، وکیلی پور شیدوش (۱۳۸۵) اعمال یک روش ضمنی و بالادست بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی برای حل میدان جریان لزج. مجله علمی و پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۶، شماره ۱، صفحه ۱-۱۲.

[7] Liou MS, Steffen CJ (1993) A new flux splitting scheme. J Comput Phys 107: 23-39.

[8] Liou MS (2010) The evolution of AUSM scheme. deffence SCI J 60(6): 606-613.

[9] Liou MS (1996) A sequel to AUSM: AUSM+. J Comput Phys 129: 364-382.

[10] Jameson A (1995) Positive schemes and shock modelling for compressible flows. Int J Numer Met Fl 20(8-9): 743-776.