

تعیین ضرایب ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی به کمک روش خطوط مشخصه تنش

حامد غلامی¹، سید احسان سیدی حسینی نیا^{2*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: تیر 1392 پذیرش مقاله: آبان 1393	
واژگان کلیدی: ظرفیت باربری، روش خطوط مشخصه، شالوده حلقوی، ضرایب ظرفیت باربری.	در این مقاله، ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی تحت بار قائم مورد مطالعه قرار گرفته است. استفاده از ایننوع شالوده در مقایسه با شالوده دایروی اقتصادی‌تر می‌باشد، زیرا از مصالح کمتری استفاده می‌شود. این در حالیست که تحقیقات نظری کمی در خصوص ظرفیت باربری اینگونه شالوده‌ها در ادبیات فنی موجود است. روش تحلیلی مورد استفاده در این مقاله، روش خطوط مشخصه از نوع تنش می‌باشد که از آن، جهت تعیین ظرفیت باربریشالوده حلقوی بر روی سطح افقی زمین استفاده شده است. در محاسبات، از اصطکاک میان خاک و سطح زبرشالوده صرف نظر شده است. خاک زیر شالوده، از نوع اصطکاکی چسبنده بوده و برای آن، از معیار گسیختگی مور- کولمب استفاده شده است. در این مقاله، با استفاده از مفهوم اصل رویهم گذاری که اولین بار توسط ترزاقی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های سطحی بکار گرفته شد، ضرایب ظرفیت باربری برای شالوده‌های حلقوی بدست آمده است. هندسه شالوده حلقوی با کمک نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی تعریف شده و ضرایب ظرفیت باربری برای نسبت های مختلف صفر (حالت دایروی)، 0/25، 0/5، 0/7 و 0/9 بدست آمده است. جهت ارزیابی روند صحیح مدل سازی، مقادیر بدست آمده با مقادیر موجود در ادبیات فنی مقایسه شده که نشان‌دهنده تطابق خوبی با نتایج کسب شده می‌باشد. مقادیر این ضرایب بصورت جدول، نمودار و رابطه های ریاضی جهت کاربرد در مهندسی ژئوتکنیک ارائه شده است. در پایان، با در نظر گرفتن چندین مثال، نشان داده شده است که استفاده از معادله ساده شده ظرفیت باربری، نسبت به یک تحلیل دقیق خمیری، جوابهای کمتر و در نتیجه محافظه کارانه تری را نتیجه می‌دهد و در نتیجه، با اطمینان خاطر می‌توان از این شیوه استفاده کرد.

1- مقدمه

می‌تواند از نوع سطحی و یا عمیق باشد. انواع شالوده‌های سطحی را بر اساس شکل هندسی آنها دسته بندی می‌کنند که یکی از انواع آن، شالوده حلقوی می‌باشد. شالوده‌های حلقوی در سازه‌هایی مانند پایه‌های پل، مخازن هوایی، آب،

بار حاصل از سازه‌های روزمینی توسط سازه دیگری بنام شالوده به زمین منتقل می‌شود که بسته به ابعاد آن،

2. استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: eseyedi@um.ac.ir

1. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گرایش مکانیک خاک و مهندسی پی، دانشگاه فردوسی مشهد

سیلوه‌ها و موارد مشابه استفاده می‌شود. باید در نظر داشت که با وجود شباهت ظاهری بین شالوده حلقوی و شالوده دایروی، رفتار آنها بخاطر توزیع فشار سطح تماس در زیر شالوده و نحوه نشست متفاوت است. هندسه یک شالوده حلقوی به صورت سطح میان یک دایره خارجی به شعاع (r_o) و دایره کوچکتر داخلی دیگر به شعاع (r_i) تعریف می‌شود و برای توصیف آن، معمولاً از نسبت شعاعی¹ $n = r_i/r_o$ استفاده می‌شود.

در خصوص مقایسه اقتصادی میان شالوده دایروی و حلقوی ذکر این نکته ضروری است که در ساخت شالوده حلقوی از مصالح کمتری استفاده می‌شود. ولی هزینه قالب بندی در شالوده حلقوی پرهزینه تر و پرزحمت تر از شالوده دایروی است. لذا ممکن است که ساخت شالوده حلقوی از نظر اقتصادی بصره‌تر نباشد.

یکی از عوامل موثر در انتخاب نوع شالوده، مقدار توان تحمل فشار حاصل از خاک به آن در اثر واکنش بار اعمالی به زمین از طرف سازه می‌باشد که به آن، ظرفیت باربری شالوده گویند. اگر بار اعمالی به شالوده بیش از ظرفیت آن باشد، منجر به گسیختگی خاک زیر آن شده و در نتیجه، کل سازه فرو می‌ریزد. اولین رابطه ظرفیت باربری توسط ترزاقی برای شالوده‌های سطحی بصورت زیر ارائه شد [1]:

$$q_u = cN_c s_c + q_0 N_q s_q + 0.5 \gamma B N_\gamma s_\gamma \quad (1)$$

که در آن، γ و c به ترتیب، وزن مخصوص و چسبندگی خاک و B عرض شالوده سطحی است. ضرایب N_γ ، N_q ، N_c ضرایب ظرفیت باربری نام دارند که مقدار این ضرایب بر حسب زاویه اصطکاک خاک ϕ تعریف می‌شود. در این رابطه، s_γ ، s_q ، s_c ضرایب شکل هستند که بسته به هندسه شالوده تعریف می‌شوند. افراد خیلی زیادی بر روی ظرفیت باربری شالوده‌ها مطالعه و تحقیق کرده اند و روابطی برای تعیین آن نیز ارائه نموده اند [2-10]. اکثر پژوهش‌های انجام گرفته بر روی شالوده‌ها، مربوط به شکل مربع، دایره و

شالوده‌های نواری بوده و تحقیق کمی بر روی شالوده‌های حلقوی انجام شده است.

در محدوده مطالعات آزمایشگاهی بر روی ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی، ساها [11] سعی کرد در مقیاس کوچک (شالوده ای به شعاع 7/5 سانتیمتر) مقدار ضریب N_γ شالوده‌های حلقوی برای شالوده‌های زبر و صاف را برای نسبت های شعاعی مختلف بدست آورد. بر اساس نتایج او، مقدار این ضریب با افزایش نسبت شعاعی، مرتباً کاهش می‌یابد. در تحقیق های کوچک مقیاس دیگری توسط اوری [12] و بوشهریان و هائف [13]، تاثیر شکل حلقه بر ظرفیت باربری شالوده حلقوی مطالعه شد. آنها مشاهده کردند که ظرفیت باربری شالوده عمیق در حالت غیر از دایره می‌تواند ظرفیت باربری بیشتری در محدوده $n = 0.4$ ایجاد کند. نقطه ضعف این مطالعات این است که ظرفیت باربری در مقیاس کوچک انجام شده و نمی‌توان مقدار N_γ را بطور مستقیم بدست آورد. زیرا بر اساس نتایج دبیر [14]، تعیین ضریب ظرفیت باربری N_γ تابعی از ابعاد شالوده می‌باشد. انجام این مطالعات آزمایشگاهی با مقیاس بزرگ معمولاً با مشکلات زیادی همراه بوده و هم اکنون، برخی محققان از روش‌های تحلیلی - عددی جهت مطالعه بهتر ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی استفاده کرده‌اند [15-17].

در خصوص بررسی های صورت گرفته بر روی ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی با استفاده از روش‌های تحلیلی - عددی، باید گفت که همانند مطالعات آزمایشگاهی، پژوهش‌ها به تعیین ضریب ظرفیت باربری N_γ محدود شده و مرجعی برای تعیین دو ضریب دیگر (N_q ، N_c) وجود ندارد. در خصوص تعیین ضریب N_γ ، کومار و گوش [15] توانستند با کمک روش خطوط مشخصه، مقدار این ضریب را برای حالت های شالوده صاف و زبر (با در نظر گرفتن سه حالت توزیع زبری زیر شالوده)، بدست آورند. در پژوهش‌های بعدی که به ترتیب توسط ژائو و وانگ [16] و بن مبارک و همکاران [17]، انجام شد، مقدار این ضریب با کمک روش

¹Ring radii ratio

عددی اختلاف محدود¹ بدست آمد. بطور کلی، نتایج این تحقیقات نشان می‌دهد که ضریب باربری N_T با افزایش نسبت شعاعی (n) کاهش می‌یابد. همچنین، مقدار این ضریب برای شالوده‌های زیر بیشتر از مقدار آن در شالوده‌های با سطح صاف بدست آمده است.

در روش‌های عددی نظیر روش اجزای محدود و اختلاف محدود که برای محیط خاک استفاده می‌شوند، مولفه‌های تانسور تنش و تانسور کرنش در نظر گرفته شده و رابطه میان آنها لحاظ می‌شود. در صورتیکه در روش خطوط مشخصه، فقط از تعادل میان مولفه‌های تنش در حالت تسلیم استفاده شده و توجهی به تغییر شکل‌ها نمی‌شود. با این حال، نقطه قوت روش خطوط مشخصه نسبت به روش‌های عددی، سادگی در نحوه محاسبات و تعیین جواب دقیق در حالت حدی نهایی است، بدین صورت که در روش‌های عددی، نیاز به داشتن رابطه میان تانسورهای تنش و کرنش (قانون رفتاری) بوده و در نتیجه، نیازمند حل همزمان معادلات تعادل و سازگاری است که فرایند پیچیده تری نسبت به حل معادلات تعادل در روش خطوط مشخصه دارد و لذا، زمان بیشتری برای تحلیل می‌طلبد. نکته دیگر در خصوص بکارگیری روش‌های عددی این است که انتخاب و بکارگیری یک مدل رفتاری می‌تواند در دقت جواب و نتیجه تحلیل تاثیر بسزایی داشته باشد. زیرا جهت تحلیل مسئله نیاز به داشتن پارامترهای بیشتری بوده و انتخاب یک مقدار نادرست برای هر یک از پارامترهای مدل رفتاری می‌تواند در جواب نهایی تاثیرگذار باشد. این در حالی است که در روش خطوط مشخصه فقط به حالت حدی (خمیری) خاک و پارامترهای آن توجه می‌شود.

از آنجاییکه مساله ظرفیت باربری خاک برای شالوده‌ها از مقوله حالت حدی بوده، مشاهده می‌شود که در ادبیات فنی (بطور مثال [۲۰۳، ۸۱، ۱۵])، غالباً روش خطوط مشخصه برای تعیین ظرفیت باربری استفاده شده است.

در این مقاله، سعی شده است تا با روش خطوط مشخصه از نوع تنش، مقدار هر سه ضریب باربری شالوده‌های حلقوی با سطح صاف بدست آید. جهت ارزیابی روش و مقادیر بدست آمده، از داده‌های موجود در ادبیات فنی استفاده شده و مقادیر محاسبه شده با آن مقادیر مقایسه می‌شود. در ابتدا بطور مختصر، روش خطوط مشخصه شرح داده شده و پس از بیان شیوه شبیه سازی شالوده حلقوی، مقدار ضرایب بدست آمده، ارایه می‌شوند. در انتها، جهت کاربردی تر کردن نتیجه این تحقیق، مقدار این ضرایب در قالب رابطه‌های ریاضی جهت تخمین ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی ارایه می‌شود.

2- روش خطوط مشخصه و تعریف مسئله

روش خطوط مشخصه² در بسط و حل عددی دستگاه مختصات هذلولی شبه خطی درجه اول کاربرد فراوان دارد و با کمک آن، این دستگاه را می‌توان با دستگاهی که توسط خطوط مشخصه بیان می‌شود، جایگزین کرد. بطور کلی، برای مصالحی که به حالت خمیری درآمده اند، می‌توان مولفه‌های تانسور تنش را در هر نقطه از آن محیط بدست آورد. بدین صورت که با در نظر گرفتن همزمان رابطه تعادل میان مولفه‌های تانسور تنش و برقراری معیار تسلیم، یک دستگاه معادلات از نوع مشتق نسبی درجه اول حاصل می‌شود. با کمک فن خطوط مشخصه، این دستگاه مختصات حل شده و دو دسته خط متقاطع آلفا و بتا، که بنام خطوط لغزش³ نیز مشهورند، پیدا شده که در حقیقت، مکان هندسی نقاطی را بیان می‌کنند که بر روی آنها، علاوه بر برقراری معادله سطح تسلیم، تعادل نیز برقرار است. اولین کاربرد خطوط مشخصه برای تعیین ظرفیت باربری بر روی خاکی بی‌وزن، توسط پرنتل [18] انجام شد. کاربرد این روش برای تعیین ظرفیت باربری یک شالوده نواری توسط سوکولوفسکی [19] انجام گرفت که معادلات او پایه و اساس بسیاری از کارهای بعدی شد. زیرا او توانست اثر وزن

³Slip line

¹Finite difference method

²Method of characteristics

$$\begin{aligned}\sigma_r &= s(1 + \sin \phi \cos 2\psi) + c \cos \phi \cos 2\psi \\ \sigma_z &= s(1 - \sin \phi \cos 2\psi) - c \cos \phi \cos 2\psi \quad (3) \\ \tau_{rz} &= (c \cos \phi + s \sin \phi) \sin 2\psi\end{aligned}$$

در مسائل تقارن محوری، معمولاً تنش عمود بر صفحه (σ_θ) را به عنوان تنش اصلی بیشینه و یا کمینه در نظر می‌گیرند [23]. در این پژوهش، مطابق با تحقیقات مشابه [2, 3, 15, 22] فرض شده که این تنش، تنش اصلی کمینه باشد. در نتیجه داریم:

$$\sigma_\theta = s(1 - \sin \phi) \quad (4)$$

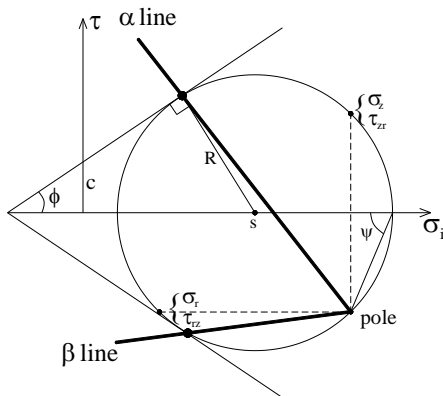
بادر نظر گرفتن روابط 2 تا 4 و با برقراری شرط وجود یک جواب واحد در این دستگاه مختصات، دو دسته معادله خط مطابق زیر بدست می‌آید [24]:

$$\frac{dr}{dz} = \tan(\psi \mp \mu) \quad (5)$$

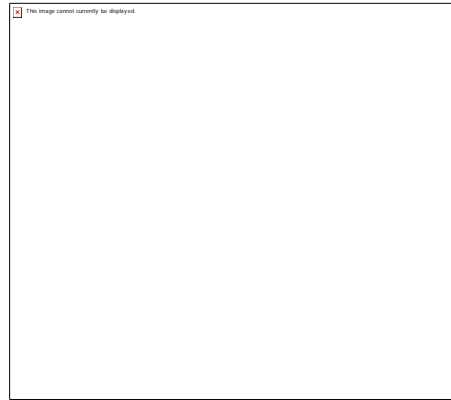
بطوریکه $\mu = \pi/4 - \phi/2$. علامت های منفی و مثبت در رابطه بالا به ترتیب بیان کننده خطوط آلفا و بتا می‌باشند که در شکل 2 نشان داده شده اند. با قراردادن رابطه 5 در رابطه 2، این دسته معادله تبدیل به دو معادله دیگر شده که تغییرات تنش میانی (s) در راستای دو خط آلفا و بتا بر حسب زاویه تمایل (ψ) و مختصات نقطه مورد نظر (r, z) مطابق شکل 2-ب را نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned}\cos \phi ds \pm (c \cos \phi + s \sin \phi) \left(2d\psi + \frac{\cos \phi dr \pm (\sin \phi - 1) dz}{r} \right) \\ + (\pm \cos \phi dz - \sin \phi dr) \gamma = 0\end{aligned} \quad (6)$$

در این رابطه، علامت های مثبت و منفی به ترتیب نشانگر خطوط آلفا و بتا هستند.



را هم در معادلات وارد کند. کاکس [20] توانست معادلات خطوط مشخصه را برای اولین بار در حالت تقارن صفحه‌ای و در حالت بدون در نظر گرفتن وزن توده خاک ارائه کند. در ادامه، پژوهشگران دیگری توانستند ظرفیت باربری شالوده دایروی را که در حالت تقارن محوری حل می‌شود، با در نظر گرفتن اثر وزن بدست آورند. [2, 3, 8, 21, 22]



شکل 1- نمایش یک المان خاک در فضای مختصات استوانه ای

با توجه به شکل 1، مولفه های تانسور تنش $(\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz} = \tau_{zr})$ یک المان را در دستگاه مختصات محوری $(r-z)$ در نظر بگیرید. معادلات تعادل در شرایط تقارن محوری بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma\end{aligned} \quad (2)$$

که در آن، γ وزن مخصوص خاک در راستای z است. در این پژوهش، فرض می‌شود که توده خاک از معیار تسلیم مور-کولمب که برای خاکهای اصطکاکی و چسبنده تعریف می‌شود، تبعیت کند. با توجه به شکل 2-الف، شعاع دایره مور برابر است با: $R = c \cos \phi + s \sin \phi$ که در آن، s مرکز دایره مور است $(s = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2})$. سه مولفه تنش در این فضا $(\sigma_z, \sigma_r, \tau_{rz} = \tau_{zr})$ را می‌توان بر حسب s و زاویه تمایل ψ ، که نشاندهنده زاویه میان راستای تنش اصلی با سطح افق است، بصورت زیر نوشت:

جهت حل این مسئله، یک کد رایانه ای با زبان MATLAB برنامه نویسی شده و مسئله حل شده است. با معلوم شدن مقدار تنش در هر نقطه زیر شالوده، می توان ظرفیت باربری را بدست آورد. بدین صورت که ابتدا لازم است تا مولفه قائم تنش (σ_z) بدست آید. با توجه به تعریف تنش های زیر پی در یک قطاع از دایره (مطابق شکل 3) و اینکه مقدار تنش یکسان نبوده، مقدار متوسط آن در نظر گرفته می شود. مقدار متوسط تنش اعمالی زیر شالوده، از تقسیم کل نیروی وارد به سطح شالوده (Q_u) بر سطح مقطع شالوده بدست می آید، بطوریکه داریم:

$$q_u = \frac{Q_u}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} \quad (7)$$

مقدار نیروی کل وارد بر سطح شالوده، با انتگرال گیری عددی از حاصلضرب تنش نقاط در مساحت نوار باریک حلقه متناظر آن نقطه مطابق زیر بدست می آید:

$$Q_u = \int_{r_i}^{r_o} 2\pi r \sigma_z dr \quad (8)$$

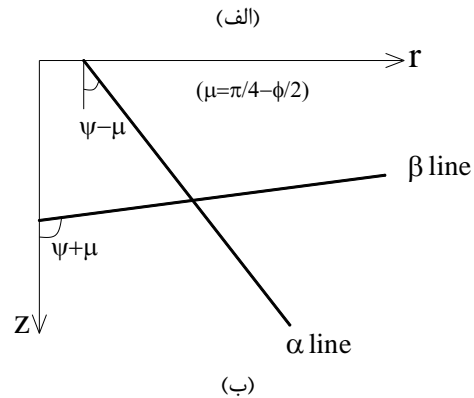
3- رابطه ظرفیت باربری شالوده حلقوی

مشابه آنچه ترزاقی در خصوص ظرفیت باربری شالوده های دایروی، مربعی و نواری مطابق رابطه 1 بیان کرد، در اینجا یک رابطه مشابهی برای شالوده های حلقوی بصورت زیر بیان می شود:

$$q_u = cN_c^* + q_0 N_q^* + 0.5\gamma D_o N_\gamma^* \quad (9)$$

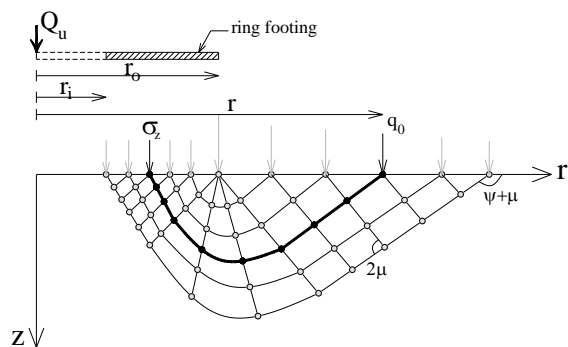
در این رابطه، منظور از D_o قطر خارجی شالوده حلقوی بوده و برابر با $D_o = 2r_o$ است. N_c^* , N_q^* , N_γ^* ضرایب ظرفیت باربری برای شالوده های حلقوی تعریف می شوند که نه فقط تابع زاویه اصطکاک داخلی خاک بوده، بلکه اثر شکل حلقه را نیز لحاظ می کنند. به عبارت دیگر، در مقایسه با رابطه 1 داریم: $N_c^* = N_c s_c$, $N_q^* = N_q s_q$, $N_\gamma^* = N_\gamma s_\gamma$.

جهت تعیین ضرایب ظرفیت باربری، لازم است تا مسئله ظرفیت باربری با پارامترهای مناسب در سه مرحله حل شود، بطوریکه، در هر مرحله اثر دو جمله از سه جمله رابطه 9 صفر شود. از آنجاییکه این روش تحلیل، تابعی از ابعاد

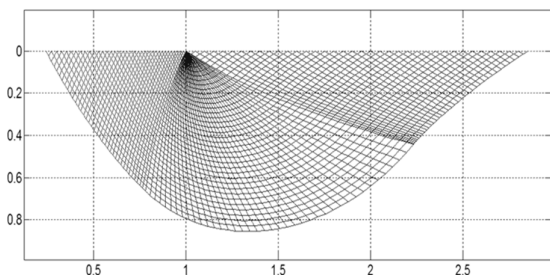


شکل 2- نمایش (الف) دایره مور و موقعیت نقاط تنش؛ (ب) خطوط آلفا و بتا و دستگاه مختصات $r-z$

هندسه مسئله مورد نظر در این پژوهش در شکل 3 نشان داده شده است. یک شالوده حلقوی به شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o بر روی سطح افق زمین واقع شده است. بر روی این شالوده، بار قائم (Q_u) به وسط شالوده بدون خروج از محوریت وارد می شود. بر روی سطح زمین، یک سربار معادل q_0 می تواند وارد شود. هدف از حل این مسئله، تعیین مقدار تنش در نقاط زیر سطح شالوده است. به عبارت دیگر، سطح زمین طرف معلوم مسئله بوده و سطح زیر شالوده نقاط مجهول مسئله هستند. در طرف معلوم مسئله، مقدار s ، مقدار زاویه ψ و مختصات نقطه مورد نظر در دسترس است و در نتیجه، با انتگرال گیری گام به گام از رابطه 6 در توده خاک، مقادیر مجهول در نقاط مختلف خاک و در نهایت در نقاط زیر سطح شالوده بدست می آید.



شکل 3- نمایش هندسه مسئله و نحوه حل آن



شکل 4- نمایش هندسه مسئله و نحوه حل آن

4- نتایج و بحث

محاسبات ضرایب ظرفیت باربری برای پنج حالت یک شالوده حلقوی شامل نسبت های شعاعی برابر با صفر (دایره)، 0/25، 0/5، 0/7 و 0/9 و برای مقادیر مختلف زاویه اصطکاک داخلی خاک در بازه صفر تا 50 درجه با فاصله پنج درجه انجام شده است. نتیجه تحلیل ها طبق جدول 1 ارائه شده است. همچنین، جهت مطالعه و بررسی بهتر نتایج، ضرایب در قالب نمودارهای نیمه لگاریتمی بر حسب نسبت شعاعی (n) طبق شکل 5 ارائه شده اند. همانطور که مشاهده می شود، مقدار هر سه این ضرایب با افزایش نسبت شعاعی کاهش می یابند. همچنین، تغییرات ضریب N_{γ}^* نسبت به n در مقایسه با دو ضریب دیگر بیشتر است. در ادامه این بخش، مقادیر بدست آمده از تحقیق حاضر با مقادیر موجود در ادبیات فنی مقایسه می شود.

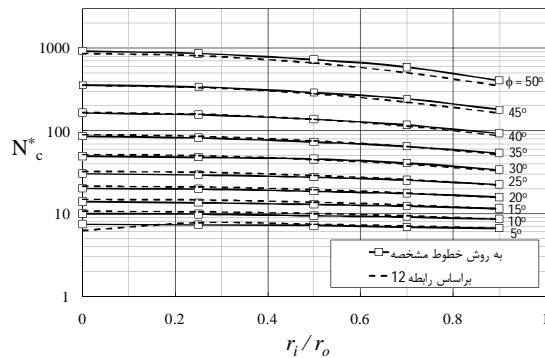
شالوده نیست، برای سادگی کار، شعاع خارجی شالوده حلقوی برابر یک متر در نظر گرفته شده است. برای یافتن ضریب N_{γ}^* ، باید مسئله بدین صورت حل شود که خاک غیرچسبنده بوده ($c = 0$) و هیچگونه سرباری بر روی سطح زمین نباشد ($q_0 = 0$). با لحاظ کردن وزن مخصوص خاک برابر با واحد (یک نیوتن بر متر مکعب)، رابطه ظرفیت باربری (رابطه 9) ساده شده و برابر با $N_{\gamma}^* = q_u$ می شود. برای تعیین ضریب N_q^* کافی است تا مسئله بصورت خاک بی وزن ($\gamma = 0$) و بدون چسبندگی ($c = 0$) حل شود. در این حالت، باید یک سربار ثابت بر روی سطح زمین معادل $q_0 = 1kPa$ در نظر گرفته شود. در این حالت، داریم: $N_q^* = q_u$. در نهایت برای تعیین ضریب N_c^* ، باید مسئله برای یک خاک چسبنده با ($c = 1kPa$) ولی بدون وزن و بدون سربار حل شود که در نتیجه آن، داریم: $N_c^* = q_u$. ذکر این نکته ضروری است که در حالت های بدون سربار، جهت جلوگیری از ایجاد خطاهای عددی، یک مقدار کوچکی از سربار ($q_0 = 0.001$) در محاسبات اعمال شده است. بدین ترتیب، هر سه ضریب ظرفیت باربری برای تمام حالت های شالوده حلقوی (نسبت های n برابر با صفر، 0/25، 0/5، 0/7 و 0/9) بدست می آید. در شکل 4، شبکه خطوط مشخصه برای تعیین ضریب N_q^* برای یک شالوده حلقوی با $n = 0/25$ را نشان می دهد.

جدول 1- ضرایب مختلف ظرفیت باربری شالوده های حلقوی به کمک روش خطوط مشخصه بر حسب نسبت شعاعی (n) و زاویه اصطکاک خاک (ϕ)

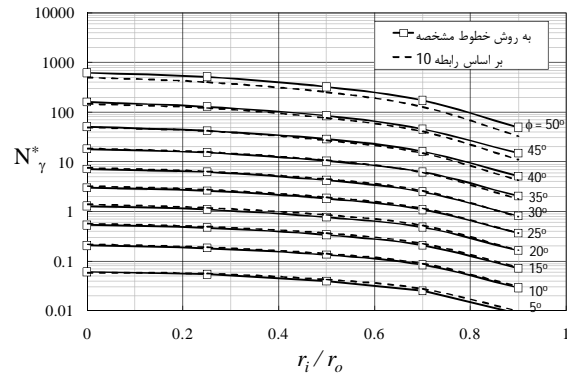
		ضریب N_{γ}^*											
		ϕ (درجه)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$n=r_i/r_o$	0	-	0.060	0.20	0.53	1.26	2.97	7.11	18.11	49.87	159.90	615.4	
	0.25	-	0.054	0.18	0.47	1.10	2.60	6.22	15.27	41.97	129.00	508.5	
	0.5	-	0.039	0.13	0.33	0.77	1.80	4.21	10.27	28.77	84.00	319.7	
	0.7	-	0.025	0.08	0.21	0.48	1.07	2.49	6.15	16.00	45.00	170.2	
	0.9	-	0.009	0.03	0.07	0.16	0.36	0.80	2.05	5.13	14.94	48.8	

		ضریب N_q^*											
		ϕ (درجه)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$n=r_i/r_o$	0	1	1.65	2.76	4.72	8.31	15.23	29.45	61.12	139.17	359.13	1098.8	
	0.25	1	1.64	2.73	4.64	8.22	14.77	28.65	58.57	132.35	337.89	1021.1	
	0.5	1	1.63	2.67	4.47	7.81	13.83	27.22	52.69	116.81	289.23	867.2	
	0.7	1	1.61	2.61	4.30	7.36	12.80	24.57	46.44	99.31	242.61	698.3	
	0.9	1	1.58	2.52	4.08	6.75	11.51	20.48	38.64	79.10	180.85	480.7	

		ضریب N_c^*											
		ϕ (درجه)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$n=r_i/r_o$	0	5.69	7.44	9.97	13.87	20.07	30.49	49.28	85.86	164.81	358.21	922.4	
	0.25	5.63	7.35	9.84	13.58	19.84	29.56	47.92	82.27	156.65	337.16	856.8	
	0.5	5.52	7.15	9.48	12.96	18.71	27.53	45.44	73.87	138.12	288.46	727.5	
	0.7	5.39	6.92	9.11	12.33	17.47	25.32	40.85	64.94	117.25	241.80	585.6	
	0.9	5.23	6.65	8.64	11.50	15.81	22.55	33.77	53.78	93.15	179.99	402.8	



(پ)

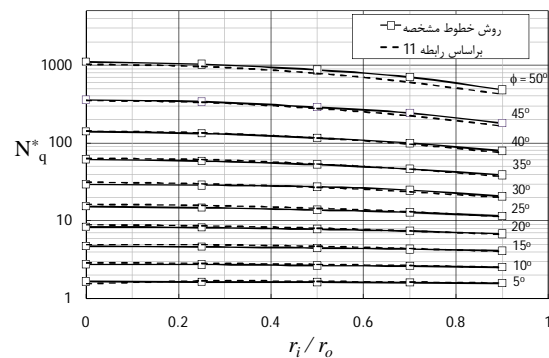


(الف)

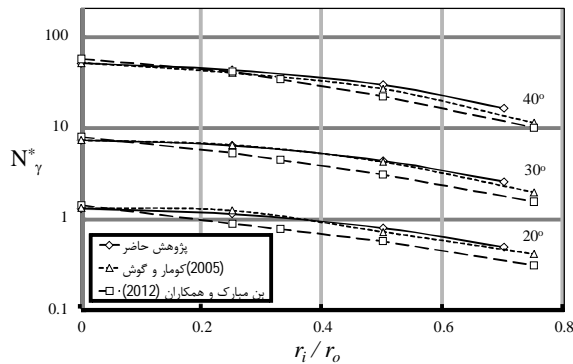
شکل 5- نمایش تغییرات سه ضریب ظرفیت باربری (الف) N_{γ}^* ، (ب) N_q^* ، (پ) N_c^* بر حسب نسبت شعاعی

4-1- ضریب N_{γ}^*

برای ارزیابی مقدار ضریب N_{γ}^* بدست آمده از روش خطوط مشخصه، در ابتدایی ترین قدم، به مقایسه مقدار بدست آمده در این تحقیق با مقادیر بدست آمده از دیگران برای ساده ترین حالت یعنی شالوده دایروی پرداخته می‌شود. در



(ب)



شکل 6- مقایسه ضریب N_γ^* برای شالوده‌های حلقوی حاصل از این تحقیق با نتایج حاصل از دیگران

جهت کاربردی تر کردن رابطه ظرفیت باربری برای شالوده‌های حلقوی، سعی شده است تا بتوان یک رابطه ریاضی میان ضریب N_γ^* و پارامترهای نسبت شعاعی (n) و زاویه اصطکاک خاک (ϕ) بدست آید. با کمک برازش کردن تابع های ریاضی مختلف و تحلیل معکوس، رابطه زیر برای تخمین ضریب N_γ^* پیشنهاد می‌شود:

$$N_\gamma^* \approx 0.35(1-n)(n+1.5)N_q^* \tan 0.9\phi \quad (10)$$

این رابطه بر اساس ضریب N_q^* تعریف شده که رابطه آن در بخش بعدی معرفی می‌گردد. برای بررسی صحت این رابطه، مقادیر حاصل از این رابطه در کنار مقادیر واقعی در شکل 5-الف رسم شده است که مقایسه نتایج، حاکی از برازش خوب این رابطه دارد.

شایان ذکر است که رابطه 10 (و همچنین رابطه 11)، با کمک یک روند تجربی به‌مراه سعی و خطا و استفاده از مفاهیم ریاضی (شکل توابع مختلف)، تعیین شده‌اند. به عبارت دیگر، می‌توان با کمک توابع دیگر، معادله دیگری بر اساس برازش آن از میان نتایج حاصل شده استخراج کرد و روابط دیگری ارائه کرد.

جهت تعیین رابطه 10، سعی شده است تا مقدار N_γ^* برحسب N_q^* تعریف و نوشته شود. بر اساس نتایج بدست آمده از تحلیل، مشاهده می‌شود که روند تغییرات این دو ضریب شبیه بهم هستند. اگر تغییرات N_γ^* / N_q^* در مقابل تانژانت زاویه اصطکاک خاک ($\phi = 5^\circ \sim 50^\circ$) رسم شود،

ادبیات فنی، افراد مختلفی این ضریب را برای شالوده دایروی به روش‌های مختلف شامل روش خطوط مشخصه [2, 3, 8, 22]، تعادل حدی [1, 9, 10, 25] و روش‌های عددی [5] بدست آورده‌اند. مقایسه نتیجه این روش‌ها با نتیجه پژوهش حاضر بطور خلاصه در جدول 2 ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تطابق خیلی خوبی میان جواب‌های این تحقیق و کارهای دیگران، مخصوصاً در میان نتایج با روش خطوط مشخصه وجود دارد که نشان از درستی نتایج بدست آمده در این تحقیق می‌باشد.

جدول 2- مقایسه ضریب N_γ^* حاصل از این تحقیق با نتایج حاصل از روش‌های مختلف برای شالوده دایروی

ϕ°	روش خطوط مشخصه					روش اختلاف محدود		
	تحقیق حاضر	کومار و گوش (2005)	بولتون و لانو (1993)	مارتین (2005)	کسیدی و هولسی (2002)	بن مبارک و همکاران (2012)	ژائو و وانگ (2008)	اریکسون و درشر (2002)
5	0.06	0.06	0.06	-	0.06	-	0.06	-
10	0.20	0.21	0.21	0.28	0.2	-	0.21	-
15	0.53	0.52	0.60	-	0.55	-	0.62	-
20	1.26	1.28	1.30	1.58	1.22	1.37	1.31	1.7
25	2.97	3.00	3.00	-	2.87	-	3.20	3.13
30	7.11	7.13	7.10	7.65	6.94	7.38	7.71	7.26
35	18.11	18.00	18.20	-	17.88	-	19.7	21
40	49.87	50.27	51	43.19	50.46	51.33	55.5	58
45	159.90	160.00	160	-	165.10	-	179.5	186
50	615.39	619.59	621	372	-	-	-	-

همانطور که قبلاً اشاره شد، ضریب N_γ^* برای شالوده‌های حلقوی توسط دیگران به روش خطوط مشخصه [15] و روش اختلاف محدود [17] بدست آمده بود. در این قسمت، مقادیر این ضریب با هم مقایسه می‌شوند. این مقایسه بصورت گرافیکی در شکل 6 برای $\phi = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ نشان داده شده است. بر اساس این مقایسه، بطور کلی می‌توان گفت که نتایج این پژوهش با نتایج دیگران تطابق خوبی دارد. این تطابق با نتایج کار کومار و گوش [15] بسیار خوب بوده، ولی نسبت به نتایج بن مبارک [17]، کمی بیشتر بدست آمده است. دلیل تفاوت مقدار ضریب میان این تحقیق با نتایج بن مبارک، تفاوت روش تحلیل بوده است. در روش خطوط مشخصه فقط مقادیر تنش وارد محاسبات می‌شوند، ولی در روش اختلاف محدود، تحلیل با در نظر گرفتن هردو تانسور تنش و کرنش و رابطه میان آن دو تعریف می‌شود.

می‌توان مشاهده کرد که یک مقدار تقریباً ثابتی برای نسبت داخلی خاک بدست می‌آید. بطور مشابه، این مقدار ثابت (α) برای تمام n های مختلف بدست آمد. در مرحله بعدی، این مقدار ثابت نسبت به مقادیر مختلف n بر روی یک نمودار رسم شد. در این نمودار سعی شد تا بتوان بر روی نقاط حاصل، یک خط با معادله درجه دوم (نظیر $N_q^* / N_q^* = (an^2 + bn + c) \tan \phi$) برازش شود. در نهایت، با کمک فاکتورگیری از n ، متوسط گیری و اعمال ضریب جبرانی 0/9 بر روی ϕ جهت بهتر کردن انطباق، صورت رابطه 10 بدست آمد.

2-4- ضریب N_q^*

در این قسمت، مقدار N_q^* حاصل از محاسبات، با مقادیر بدست آمده توسط دیگران برای شالوده دایروی مقایسه می‌شود. یادآوری می‌شود که این ضریب برای شالوده‌های حلقوی قبلاً بدست نیامده است.

جدول 3- مقایسه ضریب N_q^* حاصل از این تحقیق با نتایج حاصل از روش‌های مختلف برای شالوده دایروی

ϕ (درجه)	روش خطوط مشخصه				ترکیب اجزای محدود و روش حد پایین
	پژوهش حاضر	مارتین (2005)	دسیمون (1985)	بولتن و لانو (1993)	کومار و ختری (2011)
5	1.65	1.65	1.67	1.65	1.64
10	2.76	2.76	2.74	2.8	2.72
15	4.72	4.72	4.62	4.7	4.62
20	8.31	8.31	8.24	8.3	8.05
25	15.23	15.23	14.92	15.2	14.55
30	29.45	29.46	28.52	29.2	28.20
35	61.12	61.13	59.22	61	58.04
40	139.17	139.30	131.75	140	130.17
45	359.13	359.81	336.47	359	325.85
50	1098.79	-	-	1103	-

جدول 3 مقادیر حاصل از محاسبات این تحقیق را با دیگران که از روش‌های خطوط مشخصه [2, 8, 21] و ترکیب اجزای محدود و حد پایین تحلیل حدی [26] استفاده شده، مقایسه می‌کند. مطابق جدول، تطابق خیلی خوبی میان

نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه وجود دارد و مقادیر بدست آمده توسط همه مشابه هم هستند. همچنین، مقادیر بدست آمده در مقایسه با روش حد پایین، بیشتر بدست آمده اند که نشان از برآورده کردن این حد نیز می‌باشد.

مشابه با ضریب N_q^* ، یک رابطه ریاضی برای ضریب N_q^* نیز بدست آمد. بر اساس فن تطابق نمودارها و تحلیل معکوس، رابطه ریاضی زیر برای ضریب N_q^* ارائه می‌شود:

$$N_q^* \approx e^{(6.25-n^2) \tan 0.96\phi} \quad (11)$$

که در آن، از تابع نپر (e) استفاده شده است. نحوه استخراج رابطه 11 مشابه با روش استخراج رابطه 10 است. بدین صورت که برای هر یک از مقادیر n ، مقدار N_q^* نسبت به تانژانت زاویه های مختلف اصطکاک داخلی خاک رسم شد و مشاهده شد که بهترین خط برازش شده میان نقاط نمودار بصورت تابعی از عدد نپر به فرم $N_q^* = e^{\beta \tan(\phi)}$ است. با تکرار رسم نمودارها برای تمام n ها، مقدار β برای تمام مقادیر n بدست آمد. در مرحله بعدی، تغییرات مقادیر مختلف β نسبت به n بر روی یک نمودار دیگر رسم شد و روند تغییرات β بر حسب n با کمک یک خط با معادله درجه دوم برازش شد. در نهایت، با ساده سازی و اعمال ضریب جبرانی 0/96 بر روی ϕ جهت کسب انطباق بیشتر، صورت رابطه 11 حاصل شد.

نتایج حاصل از این رابطه به همراه مقادیر اصلی در شکل 5-ب نشان داده شده است. با مقایسه می‌توان گفت که رابطه 11 بخوبی می‌تواند مقادیر N_q^* را پیش بینی کند.

3-4- ضریب N_c^*

برای ارزیابی مقدار N_c^* حاصل از تحلیل های حاضر، مقدار آن با مقادیر ارائه شده در ادبیات فنی برای شالوده دایروی مقایسه می‌شود. مقادیر مختلف N_c^* حاصل از روش‌های مختلف شامل روش خطوط مشخصه [2, 8]، ترکیب روشهای اجزای محدود و حد پایین [26] و روش اختلاف محدود [5] در جدول 4 ارائه شده است. با مقایسه نتایج

می‌توان گفت تطابق خیلی خوبی میان روش‌ها و مخصوصاً میان نتایج حاصل از خطوط مشخصه وجود دارد. همچنین نتایج بدست آمده، شرط حد پایین را ارضا کرده و با نتایج روش اختلاف محدود نیز تطابق دارد.

جدول 4- مقایسه ضریب N_c^* حاصل از این تحقیق با نتایج حاصل از روش‌های مختلف برای شالوده دایروی

روش اختلاف محدود	ترکیب اجزای محدود و حد پایین	روش خطوط مشخصه		
		پژوهش حاضر	مارتین (2005)	بولتن و لائو (1993)
اریکسون و درشر (2002)	کومار و خستری (2011)	5.69	6.69	-
-	-	7.44	7.43	7.43
-	-	9.97	9.99	10.21
-	-	13.87	13.87	13.81
19.50	19.38	20.07	20.07	20.06
-	29.06	30.49	30.52	30.45
-	47.10	49.28	49.29	49.36
84.00	81.47	85.86	85.88	85.69
161.00	153.94	164.81	164.82	165.65
320.00	324.85	358.21	358.81	358.00
-	-	922.44	-	924.69

مقدار بدست آمده از این رابطه به همراه مقادیر حاصل از محاسبات N_c^* در شکل 5-پ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، رابطه مذکور بخوبی می‌تواند مقدار N_c^* را از روی مقدار N_q^* بدست آورد.

5- ارزیابی رابطه ظرفیت باربری پیشنهادی

رابطه ظرفیت باربری که توسط ترزاقی ارائه شد (رابطه 1)، در حقیقت از فرضی ساده کننده تبعیت می‌کند. طبق این رابطه، ظرفیت باربری یک شالوده سطحی از جمع کردن آثار قوای سه مسئله متفاوت خمیری بدست می‌آید که بطور مجزا حل شده و نتیجه آنها بطور خطی با هم جمع می‌شود. در نتیجه، این رابطه همراه با خطا بوده و مقدار ظرفیت باربری را نادرست تخمین می‌زند، زیرا اثر جمع پذیری فقط در مسائل کشسان خطی برقرار بوده و به هیچ وجه، برای مسائل خمیری برقرار نمی‌باشد. با این حال، افراد مختلفی نشان دادند که جواب حاصل از برهم نهی، کمتر از جواب واقعی بدست آمده و در نتیجه، جواب محافظه کارانه تری را نتیجه می‌دهد [2, 25, 27].

با توجه به اینکه رابطه پیشنهادی ظرفیت باربری در این مقاله، از همان روش ترزاقی بدست آمده است، باید کنترل شود که نتایج حاصل از این رابطه نیز دست بالا بوده و در حاشیه اطمینان قرار دارد. از این رو، در این مقاله، دو دسته مسئله دلخواه مختلف به دو شیوه حل شده و جوابهای آنها با هم مقایسه می‌شود. در شیوه اول، با کمک خطوط مشخصه، هر دسته مسئله بطور دقیق و با در نظر گرفتن هر سه عامل وزن خاک، سربار و چسبندگی خاک در نظر گرفته شده و ظرفیت باربری شالوده بدست می‌آید. در شیوه دوم، ظرفیت باربری با کمک رابطه ارایه شده (رابطه 9) تعیین می‌شود و در نهایت، جوابها با هم مقایسه می‌شوند. مشخصات مثال‌ها و جواب‌های حاصل از هر دو شیوه، در جدول 5 ارایه شده است. با مقایسه نتایج، می‌توان گفت که نتیجه حاصل از خاصیت جمع پذیری همواره کمتر از تحلیل مستقیم بدست آمده و مقدار خطا در بیشترین

در این تحقیق، مقادیر N_c^* بطور مستقیم با توجه به روشی که در بخش 3 این مقاله شرح داده شد، بدست آمده اند. مقدار N_c^* را می‌توان از راه دیگر و بطور غیر مستقیم نیز بدست آورد. این راه غیرمستقیم، در حقیقت نشانگر رابطه میان ضرایب N_q^* و N_c^* را بیان می‌کند. این روش با در نظر گرفتن مسئله بصورت یک خاک بی‌وزن می‌باشد که یک سربار معادل $q_{eq} = c \cot \phi$ بر روی سطح زمین و نیز در محدوده شالوده وارد می‌شود. از آنجایی که این سربار به کل مجموعه خاک وارد شده است، می‌توان فرض کرد که این خاک فقط اصطکاکی بوده و معیار سطح تسلیم آن، به اندازه این سربار جابجا شده است. در چنین حالتی، ظرفیت باربری شالوده برابر با $q_{eq} N_q^*$ خواهد بود، با این تفاوت که قبلاً در این محدوده، سربار مذکور نیز وارد شده است. در نتیجه، ظرفیت باربری خالص شالوده برابر با $(N_q - 1)q_{eq}$ می‌شود. در نتیجه، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$N_c^* = (N_q^* - 1) \cot \phi \quad (12)$$

حالت، به 15% می‌رسد که خطای ناچیزی است. در هر حال، می‌توان گفت که استفاده از رابطه پیشنهادی، مقدار محافظه کارانه تری داشته و در نتیجه می‌توان از این رابطه در طراحی شالوده‌های حلقوی با اطمینان استفاده کرد.

جدول 5- مقایسه جواب های حاصل از روش حل مستقیم و روش برهم نهی آثار (رابطه ظرفیت باربری) برای حالت های مختلف شالوده حلقوی

اختلاف نسبی (%)	تحلیل مستقیم (kPa)	رابطه 9 (جمع پذیری) (kPa)	نسبت شعاعی	پارامترهای خاک و بارگذاری	شعاع خارجی (متر)
-4	7.91	7.57	0	$\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ $\phi = 35^\circ$ $q = 100 \text{ kPa}$ $c = 10 \text{ kPa}$	3.5
-3	7.44	7.19	0.25		
-3	6.51	6.35	0.5		
-2	5.60	5.50	0.7		
-1	4.50	4.47	0.9		
-14	1.32	1.13	0	$\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ $\phi = 30^\circ$ $q = 0 \text{ kPa}$ $c = 10 \text{ kPa}$	10
-13	1.18	1.02	0.25		
-11	0.93	0.83	0.5		
-10	0.70	0.63	0.7		
-8	0.44	0.41	0.9		

6- نتیجه گیری

در این مقاله، ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی مورد مطالعه قرار گرفت و بر اساس رابطه ظرفیت باربری مطابق با رابطه ترازقی، ضرایب ظرفیت باربری شامل N_q^* ، N_γ^* ، N_c^* بدست آمدند. در این پژوهش، از روش تحلیلی خطوط مشخصه تنش استفاده شد. مقدار ضرایب برای هندسه های مختلف شالوده حلقوی شامل نسبت شعاعی صفر (حالت دایروی)، 0/25، 0/5، 0/7 و 0/9 محاسبه شد. جهت ارزیابی

7- مراجع

صحت نتایج، مقادیر این ضرایب حاصل از این تحقیق برای شالوده دایروی با مقادیر ارائه شده در روش های مختلف شامل روش خطوط مشخصه تنش [۲،۳،۸،۱۵،۲۱،۲۲]، اختلاف محدود [۵،۱۶،۱۷] و روش ترکیبی حد پایین و اجزای محدود [26] استفاده شده بود، مقایسه شد که نشان دهنده وجود تطابق خوب میان نتایج است. همچنین، مقایسه ای میان مقادیر مختلف ضریب N_γ^* و نتایج مراجع [15] و [17] برای شالوده‌های حلقوی حاصل از روش‌های مختلف شامل روش خطوط مشخصه و روش اختلاف محدود انجام شد که تطابق خوبی میان نتایج دیده می‌شود. بطور کلی، می‌توان گفت مقدار ضرایب ظرفیت باربری شالوده‌های حلقوی متأثر از نسبت شعاعی بوده و با افزایش آن، یعنی باریک شدن حلقه، کاهش می‌یابد. از میان این ضرایب، ضریب N_γ^* نسبت به افزایش نسبت شعاعی حساس تر بوده و کاهش بیشتری نسبت به دیگر ضرایب دارد.

جهت استفاده بهینه از ضرایب بدست آمده در این تحقیق، سعی شد تا رابطه ریاضی میان ضرایب و بر حسب نسبت شعاعی و زاویه اصطکاک داخلی خاک ارائه شود. در پایان، با حل چندین مثال، نشان داده شد که استفاده از رابطه ظرفیت باربری پیشنهاد شده، که از اصل برهم نهی آثار قوا در حالت خمیری تبعیت می‌کند، نتایج محافظه کارانه‌ای می‌دهد و در نتیجه، می‌توان با اطمینان از آنها در طراحی استفاده نمود.

[1]K. Terzaghi(1943).Theoretical soil mechanics, John Wiley & Sons, New York.

[2]M.D. Bolton, C.K. Lau(1993) Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr-Coulomb soil, Canadian Geotechnical Journal, 30 1024-1033.

[3]M.J. Cassidy, G.T. Houlsby(2002) Vertical bearing capacity factors for conical footings on sand, Géotechnique, 52 687-692.

[4]E.H. Davis, J.R. Booker(1971).the bearing capacity of strip footings from the standpoint of plasticity theory, 1st Australian- New Zealand Conference in GeomechanicsMelbourne, pp. 276-283.

- [5] H.L. Erickson, A. Drescher (2002) Bearing capacity of circular footings, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128 38-43.
- [6] D.V. Griffiths (1982) Computation of bearing capacity factors using finite elements, *Géotechnique*, 32 195-202.
- [7] G.T. Houlsby, C.P. Wroth (1983). Calculation of stresses on shallow penetrometers and footings, *Proc. IUTAM / IUGG Symposium on Seabed Mechanics Newcastle upon Tyne*, pp. 107-112.
- [8] C.M. Martin (2005). Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics, 11th international conference IACMAG Turin, pp. 441-450.
- [9] G.G. Meyerhof (1963) Some recent research on the bearing capacity of foundations, *Canadian Geotechnical Journal*, 1, 26-16
- [10] A.A. Vesic (1973) Analysis of ultimate loads of shallow foundations, *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, ASCE, 99 45-73.
- [11] M.C. Saha (1978). Ultimate bearing capacity of ring footings on sand, University of Roorkee, Roorkee, U.P., India.
- [12] M.L. Ohri, D.G.M. Purhit, M.L. Dubey (1997). Behavior of ring footings on dune sand overlaying dense sand, *Proceedings of International Conference of Civil Engineers Tehran, Iran*.
- [13] J.H. Boushehrian, N. Hataf (2003) Experimental and numerical investigation of the bearing capacity of model circular and ring footings on reinforced sand, *Geotextiles and Geomembranes*, 21 241-256.
- [14] E.E. De Beer (1965). Bearing capacity and settlement of shallow foundations on sand, *Bearing capacity and settlement of foundation symposium Duke University, Durham, North Carolina*, pp. 15-34.
- [15] J. Kumar, P. Gosh (2005) Bearing capacity factor N_g for ring footings using the method of characteristics, *Canadian Geotechnical Journal*, 42 1474-1484.
- [16] L. Zhao, J.H. Wang (2008) Vertical bearing capacity for ring footings, *Computers and Geotechnics*, 35 292-304.
- [17] S. Benmebarek, M.S. Remadna, N. Benmebarek, L. Belouar (2012) Numerical evaluation of bearing capacity factor N_g of ring footings, *Computers and Geotechnics*, 44 132-138.
- [18] L. Prandtl (1920). *Über die harte plastischen Körper*, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Math.-phys.*, pp. 74-85.
- [19] V.V. Sokolovskii (1960). *Statics of granular media*, Pergamon, Oxford.
- [20] A.D. Cox, G. Eason, H.G. Hopkins (1961) Axially symmetric plastic deformation in soils, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, series A*, 254 1-45.
- [21] P. De Simone (1985). Bearing capacity of a circular footing on a Coulomb medium, *Proceedings of 5th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics Nagoya*, pp. 829-836.
- [22] L.A. Larkin (1968) Theoretical bearing capacity of very shallow footings, *ASCE Journal of the soil mechanics and foundations division*, 94 1347-1357.
- [23] A. Haar, T. von Karman (1909). *Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien*, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Math.-phys.*, pp. 204-218.
- [24] ح. غلامی (1391). بررسی ظرفیت باربری پی های حلقوی با استفاده از روش خطوط مشخصه. دانشکده مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

[25]J.B. Hansen(1970) A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity, Danish Geotechnical Institute, 28 5-11.

[26]J. Kumar, V.N. Khatri(2011) Bearing capacity factors of circular foundations for a general c-f soil using lower bound finite elements limit analysis, International Journal for Numerical and Analytical Methods In Geomechanics, 35 393-405.

[27]R.L. Michalowski(1997) An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis, Soils and Foundations, 37 57-64.