سیزدهمین کنفرانس
آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

# برازش مدل جدید به داده‌های درآمد خانوارها در ایران

**علی خسروی طناک، غلامرضا محتشمی برزادران و جعفر احمدی** [۱]
**گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد**

**چکیده:** مدل‌های بسیاری تاکنون برای توزیع درآمد معرفی شده‌اند که از بین آنها مدل بتای تعمیم یافته نوع دوم (GB2) و زیررده‌های آن از معروف‌ترین و پرکاربردترین مدل‌ها هستند. خسروی و همکاران (۲۰۱۵) با استفاده از اصل درستنمایی ماکسیمم و بر اساس نابرابری‌های درآمدی، مدلی پارامتری برای توزیع درآمد معرفی نمودند و نشان دادند که این توزیع نسبت به خانواده GB2، داده‌های درآمد مورد بررسی را بهتر مدل بندی می‌کند. در این مقاله، برخی از خواص این مدل را ارائه و برازندگی آن را به داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ بررسی می‌کنیم. به علاوه با برازش خانواده توزیع‌های GB2 به داده‌های مذکور، نتایج نیکویی برازش را با هم مقایسه می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع درآمد، نابرابری اقتصادی، توزیع بتای تعمیم یافته.
**کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** 91B82، 62P20، 62F10.

## ۱ مقدمه

چگونگی توزیع درآمد و سطح نابرابری در اقتصاد یک کشور مورد توجه سیاستگزاران و برنامه ریزان آن کشور است. تاکنون مطالعات بسیاری پیرامون نحوه‌ی اندازه گیری و برآورد توزیع درآمد و بررسی اثرات عوامل مختلف اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی بر آن انجام شده است. از مهم‌ترین دلایل گرایش و توجه محققان به موضوع توزیع درآمد، می‌توان به پیامدهای توزیع عادلانه درآمد بر افزایش رفاه اجتماعی و کاهش فقر اشاره نمود. گرچه بررسی توزیع درآمد از چندین دهه قبل در کشورهای مختلف جهان مورد توجه قرار گرفته و مقالات مختلفی در این زمینه منتشر شده، ولی در ایران سابقه‌ی چندان طولانی نداشته است.

یکی از روش‌های تجزیه و تحلیل و نمایش توزیع درآمد، انتخاب یک مدل پارامتری مناسب برای داده‌های درآمد است. مدل‌های پارامتری آماری از قرن هجدهم برای مدل بندی توزیع‌های درآمد مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بعد از مدل نمایی، مدل‌های دو پارامتری لگ نرمال (گیلبرت (۱۹۳۱))، گاما (سالم و مونت (۱۹۷۴)) و وایبل (بارتلز و ون‌متل (۱۹۷۵)) برای توزیع درآمد پیشنهاد شدند. سپس مدل‌های سه پارامتری مانند گامای تعمیم یافته (تایل (۱۹۸۱))، سینگ-مادالا (سینگ و مادالا (۱۹۷۶)) و داگوم (۱۹۷۷) معرفی شدند. مکدونالد (۱۹۸۴) مدل‌های چهار

---
[۱] علی خسروی طناک: khosravi.a_66@yahoo.com

پارامتری بتای تعمیم یافته‌ی نوع اول و دوم (GB2, GB1) را معرفی کرد. مدل GB2 همه مدل‌های یک، دو و سه پارامتری که ذکر کردیم را به عنوان حالت خاص یا حدی شامل می‌شود. از لحاظ تجربی نشان داده شده که توزیع GB2 بهتر از سایر مدل‌ها برازنده‌ی داده‌های درآمد است (مکدونالد (۱۹۸۴)؛ بردلی و همکاران (۱۹۹۶)؛ بندرین و همکاران (۲۰۰۳)؛ دستروپ و همکاران (۲۰۰۷)؛ مکدونالد و رنسوم (۲۰۰۸)). در دهه‌های اخیر محققین زیادی توزیع درآمد در ایران را مورد بررسی قرار داده‌اند که از میان آن‌ها می‌توان به اوشیما (۱۹۷۰)، پسران (۱۹۷۴)، صمدی (۱۳۷۱)، ابونوری (۱۳۷۶) اشاره کرد. تعدادی از محققین از مدل‌های پارامتری برای تحلیل توزیع درآمد استفاده کرده‌اند. مجیری و همکاران (۱۳۸۷) به این نتیجه رسیدند که مدل GB2 بهترین مدل برای توصیف داده‌های درآمد مورد بررسی آن‌هاست. بختیاری و محموداوغلی (۱۳۹۳) مدل داگوم را برای داده‌ها برگزیدند.

توزیع چهار پارامتری GB2 توسط مکدونالد (۱۹۸۴) معرفی شد، که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$f(x;a,b,p,q)=\frac{ax^{ap-۱}}{b^{ap}B(p,q)(۱+(\frac{x}{b})^{a})^{p+q}},\ x\geq ۰,$$

که در آن $B(u,v)=\Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$ تابع بتا است. همه پارامترها نامنفی، $b$ پارامتر مقیاس و $a$، $p$ و $q$ پارامترهای شکل هستند. توزیع گامای تعمیم یافته یک حالت حدی توزیع GB2 است وقتی $b=q^{۱/a}\beta$ و $q\to\infty$، که تابع چگالی آن برابرست با

$$g(x;a,\beta,p)=\frac{ax^{ap-۱}e^{-(\frac{x}{\beta})^{a}}}{\beta^{ap}\Gamma(p)},\ x\geq ۰.$$

توزیع بتای تعمیم یافته نوع دوم توزیع‌های گامای تعمیم یافته (GG) ، بتای نوع دوم (B2)، سینگ-مادالا (SM) ، داگوم (D)، لگ‌نرمال (LN) ، گاما (GA) ، وایبل (W) ، فیسک (Fisk) و نمایی (Exp) را به عنوان حالت خاص یا حدی شامل می‌شود. برای آشنایی بیشتر با ویژگی‌های توزیع GB2 به کلیبر و کوتز (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

پراکندگی توزیع درآمد در یک جامعه به نابرابری‌های درآمدی معروف است که تحلیل آن یکی از مباحث مهم در اقتصاد است. اقتصاددانان همواره به دنبال یافتن شاخصی بوده‌اند که به درستی میزان نابرابری را در جامعه نشان دهد. راه‌های مختلفی برای اندازه گیری نابرابری وجود دارد. منحنی لورنز شاید معروف‌ترین وسیله برای اندازه‌گیری نابرابری درآمد باشد که توسط لورنز (۱۹۰۵) معرفی شد. منحنی لورنز سهم درآمد واحدهای دریافت کننده پایین از کل درآمد جامعه را نشان می‌دهد. فرض کنید $X$ متغیر تصادفی درآمد در یک جامعه با تابع توزیع $F$ باشد و $E(X)=\mu$. منحنی لورنز برای این توزیع به صورت

$$L(u)=\frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{u}F^{-۱}(x)dx,\quad ۰\leq u\leq ۱,\tag{۱.۱}$$

تعریف می‌شود که در آن $F^{-۱}(x)=\inf\{t: F(t)\geq x\}$. در واقع $L(u)$ نسبتی از درآمد کل است که $۱۰۰u$ درصد کم‌درآمد جامعه دریافت می‌کنند. این منحنی مبنای تعریف بسیاری از اندازه‌های نابرابری است. ضریب جینی به عنوان مشهورترین شاخص نابرابری درآمد توسط جینی (۱۹۱۴) به صورت زیر معرفی شد

$$G(F)=۲\int_{۰}^{۱}(u-L(u))du.\tag{۲.۱}$$

به سادگی می‌توان نشان داد

$$G(F)=۱-\frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{\infty}\bar{F}^{۲}(x)dx,\tag{۳.۱}$$

که در آن $\bar{F}$ تابع بقای $X$ است. هر چه شاخص جینی بزرگتر باشد نابرابری توزیع درآمد بیشتر است.

یکی دیگر از اندازه‌های نابرابری که با استفاده از منحنی لورنز بدست می‌آید شاخص پترا است. این شاخص توسط پترا (۱۹۳۲) به صورت

$$P(F) = \max_{۰\leq u\leq ۱}\{u - L(u)\}. \tag{۴.۱}$$

معرفی شد که بیشتر برای بیان نابرابری در توزیع‌های نامتقارن مفید است. به سادگی می‌توان نشان داد

$$P(F) = \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{\infty}\max\{۰, x-\mu\}f(x)dx, \tag{۵.۱}$$

برای آشنایی بیشتر با اندازه‌های نابرابری درآمد می‌توان به کلیبر و کوتز (۲۰۰۳) مراجعه کرد.

در بخش دوم این مقاله، مدل معرفی شده توسط خسروی و همکاران (۲۰۱۵) برای توزیع درآمد و برخی ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم و در بخش سوم مدل معرفی شده به همراه خانواده توزیع‌های GB2 را به داده‌های درآمد خانوار در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ برازش داده و نتایج نیکویی برازش را بررسی می‌کنیم.

## ۲ معرفی مدل

خسروی و همکاران (۲۰۱۵) بر اساس اصل آنتروپی ماکسیمم تحت قیدهای میانگین و ضریب جینی تعمیم یافته، توزیع درآمد جدیدی را معرفی کردند و با ارائه مثال‌هایی برتری آن را نسبت به خانواده توزیع‌های GB2 نشان دادند. مدل سه پارامتری پیشنهادی آن‌ها با نام ME برای توزیع درآمد دارای تابع چگالی به صورت زیر است

$$f(x;a,b,c) = \frac{abce^{bx}}{(ce^{bx}+۱-c)^{a+۱}},\ x\geq ۰. \tag{۱.۲}$$

که در آن هر سه پارامتر $a$، $b$ و $c$ نامنفی هستند. در صورتی که $c(a+۱)<۱$، تابع چگالی ME تک مدی است و در نقطه $x_{mode}$ ماکسیمم می‌شود،

$$x_{mode} = \frac{۱}{b}\ln\left(\frac{۱-c}{ac}\right).$$

اگر $c(a+۱)\geq ۱$، این تابع چگالی اکیداً نزولی است و ماکسیمم آن در نقطه صفر است ($x_{mode}=۰$). در حالت خاص، اگر $c=۱$، تابع چگالی ME همان تابع چگالی توزیع نمایی (با میانگین $\frac{۱}{ab}$) است. میانه این توزیع برابرست با

$$x_{median} = \frac{۱}{b}\ln\left(\frac{c-۱+\sqrt[a]{۲}}{c}\right).$$

نمودارهایی از تابع چگالی ME به ازای مقادیر مختلفی از پارامترها در شکل ۱ نمایش داده شده است.

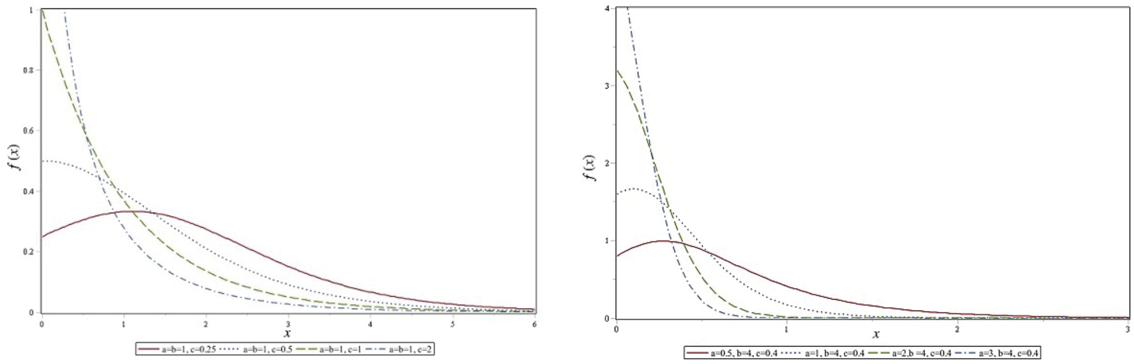
می‌توان نشان داد میانگین و ضریب جینی توزیع ME به ترتیب برابرست با

$$E(X) = \frac{{}_{۲}F_{۱}(a,a;a+۱;۱-\frac{۱}{c})}{abc^{a}},$$
$$G = ۱-\frac{{}_{۲}F_{۱}(۲a,۲a;۲a+۱;۱-\frac{۱}{c})}{۲c^{a}{}_{۲}F_{۱}(a,a;a+۱;۱-\frac{۱}{c})},$$

که در آن

$${}_{m}F_{n}(a_{۱},a_{۲},...,a_{m};b_{۱},b_{۲},...,b_{n};x) = \sum_{i=۰}^{\infty}\frac{(a_{۱})_{i}...(a_{m})_{i}x^{i}}{(b_{۱})_{i}...(b_{n})_{i}i!},$$

تابع فوق هندسی است و $(a)_{i}=(a)(a+۱)...(a+i-۱)$.




شکل ۱: تابع چگالی ME به ازای مقادیر مختلف پارامترهای شکل.

## ۳ برازش مدل به داده‌ها

در این بخش از توزیع ME برای مدل‌بندی داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ استفاده می‌کنیم و آن را با مدل GB2 و زیررده‌های آن مقایسه می‌کنیم. این داده‌ها از جدول شماره ۴۰ نتایج بررسی بودجه خانوارها (HBS) که توسط مرکز آمار ایران جمع آوری شده و به صورت برخط[۱] (online) در دسترس است، اقتباس شده‌اند.

به دلیل سیاست‌های دولت‌ها از جمله حفظ حریم خصوصی، داده‌های درآمد اغلب به صورت گروه بندی شده ثبت می‌شوند. فرض کنید داده‌ها در $g$ گروه درآمدی به صورت $I_i = [x_i, x_{i+۱})$ ثبت شده باشند، که در آن $x_i$ و $x_{i+۱}$ کران‌های پایین و بالای گروه درآمدی $i$ام است. اگر $f$ و $\Theta$ به ترتیب تابع چگالی و بردار پارامترهای جامعه باشند، آن گاه تابع درستنمایی چندجمله‌ای مربوط به مشاهدات برابرست با

$$L(\Theta) = N! \prod_{i=۱}^{g} \frac{(P_i(\Theta))^{n_i}}{n_i!},$$

که در آن $P_i(\Theta) = \int_{I_i} f(x;\Theta)dx$ احتمال قرار گرفتن یک مشاهده در گروه $i$ام، $n_i$ تعداد مشاهدات گروه $i$ام و $N$ تعداد کل مشاهدات است ($N = \sum n_i$). برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها با ماکسیمم کردن $L(\Theta)$ یا به طور معادل با ماکسیمم کردن

$$\ell(\Theta) = \sum_{i=۱}^{g} p_i \log(P_i(\Theta)),$$

به دست می‌آیند، که در آن $p_i = \frac{n_i}{N}$. برای داده‌های گروه بندی شده از میان برآوردگرها، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم به طور مجانبی کارا هستند. برای جزئیات بیشتر در مورد خواص این برآوردگرها به کاکس و هینکلی (۱۹۷۴) مراجعه کنید.

مدل ME و همچنین مدل GB2 و زیررده‌های آن را به داده‌ها برازش داده‌ایم. برای اندازه‌گیری نیکویی برازش از شاخص‌های مجموع مربعات خطا (SSE) و آماره‌ی کلموگروف–اسمیرنوف (K-S) استفاده کردیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$SSE = \sum_{i=۱}^{g} \left(\frac{n_i}{N} - P_i(\hat{\Theta})\right)^۲,$$

$$K - S = \max_{۱\leq i\leq g} |F_n(x_i) - \hat{F}(x_i)|,$$

که $F_n$ تابع توزیع تجربی و $\hat{F}$ تابع توزیع برازش داده شده با پارامترهای برآورد شده است. برای بدست آوردن نتایج از بسته GB2 نرم افزار R

[۱] http://www.cbi.ir/simplelist/1600.aspx

استفاده کرده‌ایم. نتایج برآورد پارامترها و شاخص‌های نیکویی برازش برای هر توزیع و برای سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است.

جدول ۱: توزیع‌های درآمد برآورد شده برای سال ۱۳۹۰

| K–S | SSE | Gini | Mean | $q$ | $p$ | $b(\beta)$ | $a$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | **۱ پارامتری** |
| ۰/۱۸۵ | ۰/۰۲۸۴ | ۰/۵۰۰۰ | ۱۲۱/۸۰ | – | ۱/۰۰۰۰۰ | (۱۲۱/۷۹۶۹) | ۱/۰۰۰۰۰ | Exp |
| | | | | | | | | **۲ پارامتری** |
| ۰/۰۳۰ | ۰/۰۰۲۱ | ۰/۴۱۱ | ۱۳۰/۲۱ | ۱/۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰ | ۹۶/۸۸۳۱ | ۲/۴۳۱۴ | Fisk |
| ۰/۰۵۳۶ | ۰/۰۰۵۲ | ۰/۴۰۱ | ۱۲۴/۱۳ | – | – | $\sigma$ =۰/۷۴۳۵ | $\mu$ =۴/۵۴۵۰ | LN |
| ۰/۰۷۲ | ۰/۰۰۸۳ | ۰/۳۹۱ | ۱۲۱/۹۱ | – | ۱/۰۰۰۰ | (۱۳۳/۷۱۹۸) | ۱/۳۹۷۵ | W |
| ۰/۰۴۴ | ۰/۰۰۴۸ | ۰/۳۷۳ | ۱۲۱/۳۹ | – | ۰/۰۱۶۷ | (۲/۰۲۵۲) | ۱/۰۰۰۰ | GA |
| | | | | | | | | **۳ پارامتری** |
| ۰/۰۲۶ | ۰/۰۰۱۸ | ۰/۳۷۸ | ۱۲۱/۰۷ | ۱/۰۰۰۰ | ۰/۵۶۷۵ | ۱۳۱/۹۳۳۳ | ۳/۰۷۶۵ | D |
| ۰/۰۳۸ | ۰/۰۰۳۳ | ۰/۳۸۰ | ۱۲۱/۲۷ | ۸/۳۷۰۳ | ۲/۷۳۴۷ | ۳۲۶/۸۲۳۱ | ۱/۰۰۰۰ | B2 |
| ۰/۰۴۱ | ۰/۰۰۴۰ | ۰/۳۸۰ | ۱۲۱/۳۷ | ۱/۰۰۰۰ | ۶/۳۹۷۵ | (۳/۵۸۰۱) | ۰/۵۴۴۱ | GG |
| ۰/۰۲۶ | ۰/۰۰۲۰ | ۰/۳۷۷ | ۱۲۱/۳۱ | ۱/۷۹۵۹ | ۱/۰۰۰۰ | ۱۴۲/۱۹۰۰ | ۲/۰۵۸۹ | SM |
| ۰/۰۲۵ | ۰/۰۰۱۵ | ۰/۳۷۷ | ۱۲۱/۳۱ | – | $c$ =۰/۰۹۴۶ | ۰/۰۵۱۶ | ۵/۱۷۶۵ | ME |
| | | | | | | | | **۴ پارامتری** |
| ۰/۰۲۴ | ۰/۰۰۱۸ | ۰/۳۷۹ | ۱۲۲/۷۲ | ۰/۶۴۹۷ | ۰/۴۰۹۵ | ۱۲۲/۰۳۸۳ | ۴/۰۸۰۹ | GB2 |

از جدول‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که توزیع ME برازش بهتری به داده‌ها در سال ۱۳۹۰ بر اساس معیار SSE و در سال ۱۳۹۳ بر اساس هر دو معیار SSE و K-S دارد. توزیع GB2 بر اساس معیار K-S برازش بهتری به داده‌های سال ۱۳۹۳ نسبت به سایر توزیع‌ها دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که توزیع ME نسبت به توزیع‌های خانواده GB2 برای این داده‌ها مناسب‌تر است.

## بحث و نتیجه‌گیری

مدل‌های پارامتری بسیاری تاکنون برای توزیع درآمد پیشنهاد شده‌اند که از بین آن‌ها مدل GB2 و مدل‌های زیرردهٔ آن بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله مدل دیگری که توسط خسروی و همکاران (۲۰۱۵) معرفی شده است، برای توزیع درآمد خانوارهای ایرانی در دو سال ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ مورد بررسی قرار گرفت. نتایج برازش توزیع‌ها به داده‌ها نشان می‌دهد که مدل جدید به عنوان توزیع درآمد خانوارها در این سال‌ها مناسب‌تر می‌باشد.

جدول ۲: توزیع‌های درآمد برآورد شده برای سال ۱۳۹۳

| K-S | SSE | Gini | Mean | $q$ | $p$ | $b(\beta)$ | $a$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | **۱ پارامتری** |
| ۰/۱۸۲ | ۰/۰۳۲۵ | ۰/۵۰۰۰ | ۲۱۹/۴۳ | – | ۱/۰۰۰۰ | (۲۱۹/۴۳۳۶) | ۱/۰۰۰۰ | Exp |
| | | | | | | | | **۲ پارامتری** |
| ۰/۰۲۷ | ۰/۰۰۲۶ | ۰/۴۱۷ | ۲۳۰/۰۵ | ۱/۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰ | ۱۶۹/۵۶۵۰ | ۲/۳۹۵۸ | Fisk |
| ۰/۰۴۳ | ۰/۰۰۴۶ | ۰/۴۰۱ | ۲۲۰/۴۴ | – | – | $\sigma$ =۰/۷۴۴۲ | $\mu$ =۵/۱۱۸۷ | LN |
| ۰/۰۸۸ | ۰/۰۱۲۱ | ۰/۴۱۰ | ۲۱۹/۹۸ | – | ۱/۰۰۰۰ | (۲۳۸/۷۲۲۱) | ۱/۳۱۴۹ | W |
| ۰/۰۵۴ | ۰/۰۰۶۷ | ۰/۳۸۳ | ۲۱۸/۶۲ | – | ۰/۰۰۸۷ | (۱/۹۰۲۳) | ۱/۰۰۰۰ | GA |
| | | | | | | | | **۳ پارامتری** |
| ۰/۰۳۱ | ۰/۰۰۲۷ | ۰/۳۹۴ | ۲۱۸/۶۰ | ۱/۰۰۰۰۰ | ۰/۶۶۳۱ | ۲۱۵/۱۳۵۷ | ۲/۸۰۱۸ | D |
| ۰/۰۴۰ | ۰/۰۰۳۶ | ۰/۳۹۱ | ۲۱۷/۸۴ | ۵/۷۸۴۹ | ۳/۰۹۵۴ | ۳۳۶/۷۴۲۸ | ۱/۰۰۰۰ | B2 |
| ۰/۰۴۵ | ۰/۰۰۴۲ | ۰/۳۹۱ | ۲۱۷/۸۴ | ۱/۰۰۰۰ | ۲۱/۲۸۱۵ | (۰/۰۰۴۹) | ۰/۲۹۰۸ | GG |
| ۰/۰۳۰ | ۰/۰۰۲۷ | ۰/۳۹۲ | ۲۱۸/۶۳ | ۱/۴۷۰۳ | ۱/۰۰۰۰ | ۲۱۸/۵۲۰۸ | ۲/۱۲۲۴ | SM |
| ۰/۰۲۵ | ۰/۰۰۱۵ | ۰/۳۷۷ | ۱۲۱/۳۱ | – | $c$ =۰/۰۹۱۳ | ۰/۰۳۳۸ | ۰/۱۹۱۱ | ME |
| | | | | | | | | **۴ پارامتری** |
| ۰/۰۴۳ | ۰/۰۰۴۶ | ۰/۴۰۱ | ۲۲۰/۴۰ | ۲۶۵/۵۹۹۲ | ۲۵۱/۹۱۴۲ | ۲۶۱/۵۷۵۴ | ۰/۱۱۸۳ | GB2 |

# مراجع


ابونوری، ا. (۱۳۷۶). اثر شاخص‌های اقتصاد کلان بر توزیع درآمد در ایران، *تحقیقات اقتصادی* شماره ۵۱.

مجیری، آ.، محتشمی برزادران، غ.، واقعی، ی.، ج. (۱۳۸۷). برآورد منحنی لورنتس و ضریب جینی به روش پارامتری .*گزیده مطالب آماری* شماره ۱، ص ۱-۱۴.

صمدی، م. (۱۳۷۱). بررسی تاثیر تورم الگوی توزیع درآمد در ایران، *پایان نامه کارشناسی ارشد* دانشگاه اصفهان.

بختیاری، ص. و محموداوغلی، س. (۱۳۹۳). مدلسازی توزیع درآمد براي ایران: مقایسه الگوی داگوم با چند مدل منتخب، *فصلنامه مدلسازي اقتصادي* شماره ۲، ص ۱-۲۰.

Bandourian, R., McDonald, J.B., and Turley, R.S. (2003), A comparison of parametric models of income distribution across countries and over time, *Estadistica*, **55**, 135–152.

Bartels, C.P.A., and Van Metele, H. (1975), Alternative probability density functions of income, Vrije University Amsterdam: Research memorandum 29.

Bordley, R. F., McDonald, J.B., and Mantrala, A. (1996), Something new, something old: parametric models for the size distribution of income, *Journal of Income Distribution*, **6**, 91–103.

Cox, D. R. and D. V. Hinkley (1974),*Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, London.

Dagum, C. (1977), A new model for personal income distribution: specification and estimation, *Economie Appliquée*, **30**, 413–437.

Dastrup, S. R., R. Hartshorn and J. B. McDonald (2007), The impact of taxes and transfer payments on the distribution of income: A parametric comparison, *Journal of Economic Inequality*, **5**, 353–369.

Gibrat, R. (1931), *Les Inegalites Economiques*. Sirey, Paris.

Gini, C. (1914), Sulla misura della concentrazione e della variabilita‘ dei caratteri, *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, **73**, 1203–1248.

Khosravi Tanak, A., Mohtashami Borzadaran, G. R. and Ahmadi, J. (2015), Entropy maximization under the constraints on the generalized Gini index and its application in modeling income distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **438**, 657–666.

Kleiber, C. and Kotz, S. (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Lorenz, M. O. (1905), Methods of measuring the concentration of wealth, *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, **9**, 209–219.

McDonald, J. B. (1984), Some generalized functions for the size distribution of income, *Econometrica*, **52**, 647–663.

McDonald, J. B. and Ransom, M. (2008), The generalized beta distribution as a model for the distribution of income: estimation and related measures of inequality, in D. Chotikapanich, (ed.), *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, New York, 147–166.

Oshima , H. (1973)., Income distribution, *Mission paper*, **2**.

Pesaran, M. H. (1974). Income distribution trends in rural and urban, *Mineograpled paper*, BMI, Tehran.

Pietra, G. (1932), Nuovi contributi alla methodologia degli indici di variabilita edi concentrazione, *Atti del Reale Instituto Veneto di Scienze*, Lettere ed Arti, **91**, 989–1008.

Salem, A.B. and Mount, T. D. (1974), A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density, *Econometrica*, **42**, 1115–1127.

Singh, S.K., and Maddala, G.S. (1976), A function for the size distribution of incomes, *Econometrica*, **44**, 963–970.

Taille, C. (1981), Lorenz ordering within the generalized gamma family of income distributions, *Statistical Distributions in Scientific Work*, **6**, 181–192.