مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص‌ص 283-294

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارزیابی مدل گرادیانی تنظیم شده در محاسبهٔ تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای با تصحیح حلگر پیمپل‌فوم در نرم‌افزار اپن‌فوم

الیاس لارکرمانی[1]، احسان روحی[2]*

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
* مشهد، صندوق پستی 91775-1111، e.roohi@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 31 فروردین 1396
پذیرش: 28 خرداد 1396
ارائه در سایت: 29 تیر 1396

کلید واژگان:
مدل گرادیانی تنظیم شده
تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای
جریان کانال آشفته
نرم‌افزار اپن‌فوم

چکیده

مدل‌سازی مناسب مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در تعیین دقت محاسبات روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در تحلیل جریان‌های آشفته از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. در سال‌های اخیر، شاخهٔ جدیدی از مدل‌های زیرشبکه‌ای موسوم به مدل‌های گرادیانی در محاسبهٔ تانسور تنش و بردار شار حرارتی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای توسعه یافته‌اند و در روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این پژوهش، برای اولین‌بار معادلات مدل زیرشبکه‌ای گرادیانی تنظیم شده در نرم‌افزار اپن‌فوم پیاده‌سازی شده و ایدهٔ تصحیح حلگر پیمپل‌فوم برای بهبود دقت نتایج مدل مذکور استفاده شده است. این مدل برمبنای بسط سری تیلور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای بنا شده است و از فرضیهٔ تعادلی محلی به منظور ارزیابی انرژی جنبشی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای استفاده می‌کند. برای ارزیابی دقت مدل گرادیانی تنظیم شده و تغییرات اعمال شده در حلگر پیمپل‌فوم، شبیه‌سازی جریان کانال آشفته در عدد رینولدز اصطکاکی 395 با استفاده از نرم‌افزار متن‌باز اپن‌فوم انجام شده و نتایج روش فوق با داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم و دیگر مدل‌های مختلف زیرشبکه‌ای مانند مدل اسماگورینسکی، اسماگورینسکی دینامیکی و دییردورف مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل گرادیانی تنظیم شده کمیت‌های آشفتگی مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم را با دقت بالایی بازیابی می‌کند.

Evaluating modulated gradient model in computing subgrid scales stress tensor accompanied with pimpleFoam correction in the OpenFOAM package

Elyas Lar Kermani, Ehsan Roohi*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, e.roohi@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 April 2017
Accepted 18 June 2017
Available Online 20 July 2017

Keywords:
Modulated Gradient Model
Sub-Grid Scale Stress Tensor
Turbulent Channel Flow
OpenFOAM Software

ABSTRACT

Accurate modeling of the sub-grid scales (SGS) is crucial in determining the accuracy of the large eddy simulations (LES) in turbulent flow analysis. In recent years, new branches of the sub-grid scales models called gradient-based models were developed in computing the sub-grid scales stresses and heat fluxes and used in large eddy simulations. In this work, the modulated gradient model (MGM) equations were implemented in the OpenFOAM package, and pimpleFoam solver was modified to improve the solution accuracy. The modulated gradient model is based on the Taylor-series expansion of the sub-grid scales stress and employs the local equilibrium hypothesis to evaluate the sub-grid scales kinetic energy. To assess the accuracy of the modulated gradient model as well as the improved pimpleFoam solver, turbulent channel flow at a frictional Reynolds number of 395 was simulated via the OpenFOAM package and results were compared with the direct numerical simulation (DNS) data as well as the numerical solution of the Smagorinsky, Dynamic Smagorinsky and Deardorff models. The results show that modulated gradient model evaluates first and second order turbulence parameters with a high-level of accuracy.

1- مقدمه

تحلیل جریان‌های آشفته از مسائلی است که سال‌ها مورد توجه محققین قرار داشته اما با گذشت بیش از یک قرن هنوز درک صحیحی از این جریان‌ها وجود ندارد. هنگامی که تنش برشی[1] یا نرخ برش روی دیواره افزایش یابد، انتقال جریان از آرام به آشفته صورت می‌گیرد [1]. شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ[2] یک مدل ریاضی برای آشفتگی است که در دینامیک سیالات محاسباتی کاربرد دارد. این مدل اولین‌بار در سال 1963 توسط جوزف اسماگورینسکی [2] در شبیه‌سازی جریان جوی پیشنهاد شد و بعدها در سال 1970 توسط دییردورف [3] توسعه یافت. در حال حاضر شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در طیف گسترده‌ای از کاربردهای جریان آشفته در

[1] Shear stress

[2] Large eddy simulation (LES)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

E. Lar Kermani, E. Roohi, Evaluating modulated gradient model in computing subgrid scales stress tensor accompanied with pimpleFoam correction in the OpenFOAM package, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 283-294, 2017 (in Persian)

مهندسی؛ از جمله احتراق و مطالعهٔ رفتار لایه‌مرزی استفاده می‌شود.

شبیه‌سازی عددی جریان آشفته که با حل معادلات ناویراستوکس[1] انجام می‌شود، به تحلیل محدوده‌ی وسیعی از مقیاس‌های مکانی و زمانی احتیاج دارد. شبیه‌سازی عددی مستقیم[2] با حل تمام مقیاس‌های مکانی و زمانی داده‌های بسیار دقیقی از میدان جریان ارائه می‌دهد اما از نظر محاسباتی پرهزینه و زمان‌بر است. ایدهٔ اصلی شبیه‌سازی مقیاس‌های بزرگ برای کاهش هزینهٔ محاسباتی و افزایش بهره‌وری، کاهش محدودهٔ مقیاس‌های مکانی و زمانی حل‌شده[3] برای معادلات ناویراستوکس فیلتر شده است [4].

شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ از جریان‌های آشفتهٔ ناهمسان‌گرد از سال 1960 به یک زمینهٔ فعال و چالش‌برانگیز بدل شده است. در جریان آشفته دو نوع ساختار وجود دارد: یکی ساختار با مقیاس کوچک که دربرگیرندهٔ گردابه‌های کوچک (آشفتگی و نوسانات کوچک) بوده و دیگری ساختار با مقیاس بزرگ که دربرگیرندهٔ گردابه‌های بزرگ (جریان متوسط و نوسانات بزرگ) می‌باشد. در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ مقیاس‌های بزرگ به‌طور صریح تحلیل شده درحالی‌که اثرات مقیاس‌های زیرشبکه‌ای[4] مدل و پارامتری می‌شوند. از آن‌جایی که مقیاس‌های کوچک تمایل بیش‌تری نسبت به مقیاس‌های بزرگ برای ایزوتروپ‌بودن دارند، می‌بایست امکان پارامتری‌کردن آن‌ها با استفاده از مدل‌های جامع‌تر و ساده‌تر از مدل‌های تنش رینولدز استاندارد وجود داشته باشد [5,4].

کوچک‌ترین مقیاس‌های طولی در جریان آشفته تابعی از انرژی اتلافی (ε) و عامل اتلاف یعنی لزجت (υ) می‌باشند.

$$\eta = f(\varepsilon, \upsilon) = \frac{\upsilon^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \tag{1}$$

نسبت کوچک‌ترین مقیاس طولی، η که به مقیاس طولی کلموگروف مشهور است و بزرگ‌ترین مقیاس طولی (l) برابر است با:

$$\frac{\eta}{l} = \frac{\upsilon^{3/4}}{\varepsilon^{1/4} l} = \frac{1}{\mathrm{Re}^{3/4}} \tag{2}$$

پارامتر بدون بعد عدد رینولدز (Re) نسبت اینرسی به لزجت جریان را توصیف می‌کند:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_b h}{\upsilon} \tag{3}$$

سرعت بالک (u_b) و مقیاس طولی (h) به‌عنوان کمیت‌های مرجع برای بی‌بعدسازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. هرچه شدت آشفتگی و عدد رینولدز بیش‌تر باشد، ساختار مقیاس‌های کوچک ریزتر است و فاصلهٔ بین مقیاس‌های طولی بزرگ و کوچک‌ترین مقیاس طولی بیش‌تر می‌شود. در نتیجه تبادل مستقیم انرژی و اطلاعات بین دو مقیاس کم‌تر می‌گردد و این دو حرکت در میدان جریان به‌طور آماری از یک‌دیگر مستقل می‌شوند. این بیان نشان می‌دهد که در جریان‌های آشفته با عدد رینولدز بالا برای شبیه‌سازی مقیاس‌های کوچک به شبکه‌بندی با دقتی در ابعاد کوچک‌ترین مقیاس طولی نیاز است [6]. چنان‌چه این‌گونه تحلیل‌ها توسط شبیه‌سازی عددی مستقیم انجام شود، هرچند نتایج به‌دست‌آمده بسیار دقیق و قابل استناد است، اما از آن‌جایی که می‌بایست زمان و هزینهٔ زیادی صرف شود، مقرون‌به‌صرفه نیست. از این‌رو ایده‌ی استفاده از مدل‌های مختلف مقیاس‌های زیرشبکه‌ای تحوّل شگرفی در شبیه‌سازی بهینهٔ جریان‌های آشفته ایجاد کرد.

[1] Navier-Stokes
[2] Direct numerical simulation (DNS)
[3] Resolved
[4] Sub grid scale (SGS)

2- مدل‌سازی آشفتگی و روش‌های عددی

این بخش به ارائهٔ مدل‌های ریاضی و روش‌های عددی می‌پردازد که شامل توصیف معادلات حاکم، تشریح مدل‌سازی آشفتگی، مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای، الگوریتم پیمپل‌فوم برای حل معادلات ناویراستوکس فیلتر شده در نرم‌افزار اپن‌فوم و تصحیح آن برای مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای گرادیانی است.

2–1– معادلات حاکم

معادلهٔ ممنتم برای سیال لزج تراکم‌ناپذیر با عنوان معادلهٔ ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر شناخته می‌شود. این معادله را می‌توان با ساده‌سازی از معادلهٔ ممنتم کوشی به دست آورد.

$$\frac{D\rho V}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + S_f \tag{4}$$

معادلهٔ (4) نیروهای حجمی خالص و نیروهای سطحی را منشأ شتاب ذرات سیال می‌داند. کمیت ρ بیان‌گر چگالی سیال در نقطهٔ مورد نظر از محیط پیوسته، σ تانسور تنش، S_f نیروهای حجمی و V میدان بردار سرعت جریان است. تانسور تنش به دو تانسور تنش‌های عمودی استاتیک $(-p\mathrm{I})$ و تنش‌های برشی لزجی (τ) قابل تجزیه است. تانسور تنش‌های برشی لزجی با معادلهٔ (5) معرفی می‌شود که در آن D تانسور نرخ کرنش می‌باشد.

$$\tau = [2\mu D + [(\lambda + \kappa)\nabla \cdot V]\mathrm{I}] \tag{5}$$

$$D = \frac{1}{2}(\nabla \cdot V + (\nabla \cdot V)^{\mathrm{T}}) \tag{6}$$

κ لزجت بالک نام دارد که مقدار آن برای گازهای ایده‌آل، صفر و برای گازهای متراکم و مایعات قابل چشم‌پوشی است. پارامتر λ لزجت ثانویه بوده و برای سیالات نیوتونی با $-2/3\,\mu$ برابر است. مقدار این پارامتر در سیالات تراکم‌ناپذیر که انبساط و انقباض در آن‌ها رخ نمی‌دهد، صفر است. با جایگذاری تانسور تنش‌های عمودی استاتیک و تنش‌های برشی لزجی در معادلهٔ (4)، شکل کامل معادلهٔ ناویراستوکس استخراج می‌شود.

$$\frac{D\rho V}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \cdot V + (\nabla \cdot V)^{\mathrm{T}}) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla \cdot V\right]\mathrm{I}] + S_f \tag{7}$$

با صرف‌نظر از نیروهای حجمی و با فرض تراکم‌ناپذیری سیال، معادلهٔ ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر حاصل می‌شود.

$$\rho\frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \cdot V + (\nabla \cdot V)^{\mathrm{T}})] \tag{8}$$

معادلهٔ ناویراستوکس در کنار معادلهٔ پیوستگی $(\nabla \cdot V = 0)$، معادلات حاکم برای توصیف کامل جریان بدون تغییرات دمایی را شکل می‌دهند. شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ تنها با محاسبه‌ی مستقیم گردابه‌هایی با مقیاس طولی بزرگ‌تر از یک مقیاس طولی مشخص (Δ) سعی در کاهش حجم شبکه‌بندی محاسباتی و افزایش گام زمانی دارد. جدایش مقیاس‌ها با عملیات فیلترکردن صورت می‌گیرد که در بیان ریاضی، میدان جریان مرتبط به همراه هستهٔ فیلتر منتخب انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\bar{\phi}(x,t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t) G(x-\xi,\Delta) d^3\xi \tag{9}$$

هستهٔ فیلتر با نماد G بیان می‌شود و Δ عرض فیلتر را نشان می‌دهد که پارامتر تعیین‌کننده‌ی اندازه‌ی مقیاس‌های عبوری از فیلتر است. کمیت‌های فیلتر شده با خط تیره در بالای آن‌ها شناخته می‌شوند. آن قسمت از میدان جریان که پس از فیلترکردن کنار گذاشته می‌شود و مقیاس‌های حل نشده (اغتشاشی) را دربر می‌گیرد، با معادلهٔ (10) مشخص می‌شود.

$$\phi''(x,t) = \phi(x,t) - \bar{\phi}(x,t) \tag{10}$$

مقیاس‌های طولی در ارتباط با بخش حل نشده، مقیاس‌های زیرشبکه‌ای نامیده می‌شوند. تعداد زیادی از فیلترها با ویژگی‌های منحصربه‌فرد در مقالات اخیر معرفی شده‌اند [7,4]. با این وجود، اعمال و اجرای برخی از آن‌ها در کدهای دینامیک سیالات محاسباتی دشوار و پیچیده است. فیلتر تاپ-هت[1] به‌طور معمول در گسسته‌سازی حجم محدود استفاده می‌شود [8].

$$G(x-\xi,\Delta)=\begin{cases}1/\Delta^3 & |x-\xi|\le\Delta/2\\ 0 & |x-\xi|>\Delta/2\,.\end{cases}\qquad(11)$$

این فیلتر مقدار میانگین کمیت‌ها را بر روی یک حجم مکعبی (Δ^3) ارائه می‌دهد. برای تعیین مقدار Δ، استفاده از ریشهٔ سوم حجم سلول محاسباتی انتخاب مناسبی است.

$$\Delta=\sqrt[3]{\Delta x\Delta y\Delta z}\qquad(12)$$

ابعاد سلول محاسباتی در راستای محورهای مختصات با Δx، Δy و Δz مشخص می‌شوند. با استفاده از رابطهٔ (12) برای تعیین مقدار Δ، می‌توان $\bar{\phi}$ را معادل میانگین کمیت ϕ در سلول محاسباتی در نظر گرفت.

با اعمال عملگر فیلتر به معادلات پیوستگی و ناویراستوکس امکان استخراج قوانین بقا برای متغیرهای فیلترشدهٔ جریان فرآهم می‌گردد. با توجه به خطی‌بودن معادلهٔ پیوستگی، شکل آن پس از اعمال فیلتر بدون تغییر باقی می‌ماند.

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_i}=0\qquad(13)$$

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_iu_j}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]\qquad(14)$$

جمله‌های x_i و $\bar{u}_i$ با $i=1,2,3$ به ترتیب بیان‌گر x، y، z و $\bar{u}$، $\bar{v}$، $\bar{w}$ هستند. معادلهٔ (14) قابلیت گسسته‌سازی عددی در یک دقت مکانی از مرتبهٔ Δ را داراست، که معمولاً بسیار مقرون به‌صرفه‌تر از شبیه‌سازی عددی مستقیم است، زیرا شبیه‌سازی عددی مستقیم به دقتی نزدیک به مقیاس طولی کلموگروف یعنی η نیاز دارد. در معادلهٔ (14) جملهٔ جابه‌جایی تابعی از جملهٔ $\bar{u}_i$ نیست و حل معادله را با مشکل روبه‌رو می‌سازد. برای رفع این مشکل، تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای (B) تعریف می‌شود.

$$B_{ij}=\overline{u_iu_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j\qquad(15)$$

معادلهٔ (14) را می‌توان با تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i\bar{u}_j\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]\qquad(16)$$

به منظور تشکیل یک سیستم معادلات بسته لازم است تا تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای مدل شود.

مدل‌سازی دقیق جمله‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای ناشی از فیلترکردن معادلات ناویراستوکس در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. این جملات بسته نشده، شامل تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در معادلهٔ بقای ممنتم هستند. محدودهٔ وسیعی از مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در طول سالیان متمادی توسعه یافته‌اند [4] که می‌توان آن‌ها را در دو گروه مدل‌های حاوی لزجت گردابه[2] و بدون لزجت گردابه طبقه‌بندی نمود. در مدل‌های نوع لزجت گردابه از فرضیهٔ پخش گرادیانی استفاده شده است که تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای را به تانسور نرخ کرنش ارتباط می‌دهد. در مقابل، مدل‌های بدون لزجت گردابه فرضیهٔ پخش گرادیانی را برای مدل‌سازی جملات باز مقیاس‌های زیرشبکه‌ای به‌کار نمی‌گیرند.

تعداد اندکی از مدل‌های ارائه شده در نشریات معتبر توانسته‌اند در بستهٔ نرم‌افزاری اپن‌فوم اعمال شوند. یکی از دلایل آن را می‌توان در پیچیدگی چارچوب کلی زبان برنامه‌نویسی نرم‌افزار اپن‌فوم برای پذیرش هر گونه معادلات و گسسته‌سازی‌های لازم جستجو کرد. پژوهش حاضر به توسعه و ارزیابی مدل گرادیانی (مدل بدون لزجت گردابه) پرداخته است که شامل میدان‌های اسکالر، سرعت‌های متوسط، تنش‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای و دیگر پارامترهای آشفتگی جریان می‌باشد. از دیگر دستآوردهای این پژوهش می‌توان به اعمال مدل گرادیانی تنظیم‌شده[3] در نرم‌افزار اپن‌فوم و ارائهٔ کتابخانه‌ای شامل کدهای محاسباتی برای تحلیل جملات تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای اشاره کرد. تصحیح حلگر پیمپل‌فوم[4] برای بهبود نتایج مدل گرادیانی تنظیم‌شده، نیز از دیگر نوآوری‌های تحقیق حاضر می‌باشد.

در مدل‌های حاوی لزجت گردابه، تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای با به‌کارگیری فرضیهٔ بوزینسک[5] تعیین می‌شود [4]. این فرضیه تنش‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای را با ساختاری مشابه با تنش‌های لزجی مدل می‌کند.

$$B_{ij}=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(B_{ij}\right)\delta_{ij}-\upsilon_{\mathrm{sgs}}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\qquad(17)$$

لزجت مقیاس‌های زیرشبکه‌ای (لزجت گردابه) با υ_{sgs} و دلتای کرونکر[6] با δ_{ij} بیان شده‌اند. $\mathrm{tr}\left(B_{ij}\right)$ اثر تانسور[7] B_{ij} است. مقدار اثر تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای با دو برابر انرژی جنبشی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای برابر است. چنان‌چه تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای مدل شده در معادلهٔ (16) جایگذاری شود، لزجت گردابه تنها مجهول سیستم معادلات را تشکیل می‌دهد.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i\bar{u}_j\right)=&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}\\&+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon+\upsilon_{\mathrm{sgs}}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right.\\&\left.-\frac{2}{3}k_{\mathrm{sgs}}\delta_{ij}\right]\end{aligned}\qquad(18)$$

مجموع لزجت ملکولی (υ) و لزجت گردابه با عبارت لزجت مؤثر (υ_{Eff}) تعریف می‌شود. با اضافه و کم‌کردن قسمت ایزوتروپ تانسور تنش، گام نهایی در اعمال این معادله به نرم‌افزار اپن‌فوم برداشته می‌شود. این عمل به دلیل تعریف کمیت دویاتوریک ($\mathrm{dev}A=A-1/3\,\mathrm{tr}(A)\mathrm{I}$) در کدهای نرم‌افزار اپن‌فوم انجام می‌شود و از طرف دیگر سبب پایداری دستگاه معادلات می‌گردد.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i\bar{u}_j\right)=&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}\\&+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon_{\mathrm{Eff}}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{3}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}-\frac{1}{3}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}-\frac{2}{3}k_{\mathrm{sgs}}\delta_{ij}\right]\end{aligned}\qquad(19)$$

انرژی جنبشی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای سهم بسیار ناچیزی از انرژی آشفتگی را شامل می‌شود و می‌توان از مقدار آن در معادلهٔ بالا صرف‌نظر کرد. جملهٔ $\partial\bar{u}_k/\partial x_k$ با توجه به تراکم‌ناپذیری سیال و رابطهٔ پیوستگی ($\nabla\cdot V=0$) کنار گذاشته می‌شود، درحالی‌که قرینهٔ آن برای پایداری حل حذف نمی‌شود.

[1] Top-hat filter
[2] Eddy-viscosity type
[3] Modulated gradient model (MGM)
[4] PimpleFoam
[5] Boussinesq assumption
[6] Kronecker delta
[7] Matrix Trace

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i\bar{u}_j\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_{\mathrm{Eff}}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_{\mathrm{Eff}}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}-\frac{1}{3}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \tag{20}$$

معادلهٔ (20) در فایل معادلهٔ سرعت[1] از حلگر پیمپل‌فوم قرار گرفته است. دو جملهٔ آخر در سمت راست از این معادله با عنوان دیورژانس تنش‌های انحرافی موثر[2] در نرم‌افزار اپن‌فوم تعریف شده‌اند. مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای، از شیوه‌های گوناگونی برای مدل‌سازی لزجت گردابه استفاده می‌کنند. با تعیین لزجت گردابه، سیستم معادلات کامل گردیده و توسط حلگر قابل محاسبه است.

در مدل‌های بدون لزجت گردابه (مدل‌های گرادیانی)، تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای به‌طور صریح و بدون نیاز به لزجت گردابه مدل‌سازی می‌شود. از این‌رو با قراردادن رابطهٔ تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای از مدل‌های متنوع در معادلهٔ (16)، سیستم معادلات تکمیل می‌شود. از آن‌جایی که نرم‌افزار اپن‌فوم برای مدل‌سازی تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای از مدل‌های لزجت گردابه بهره می‌گیرد، کتابخانه‌ای مستقل برای محاسبهٔ تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای حاصل از مدل‌های گرادیانی ایجاد نشده است. لذا در این تحقیق علاوه بر اعمال مدل گرادیانی تنظیم شده در قسمت مدل‌های آشفتگی نرم‌افزار، کتابخانه‌ای با هدف محاسبهٔ تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای گرادیانی نیز ایجاد شد.

2-2- مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای

مدل‌های متنوعی در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ ارائه شده‌اند که بیش‌تر آن‌ها بر پایهٔ مدل‌های بنیادی‌تر بنا شده‌اند [9]. مدل‌سازی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای به فرآیندهای فیزیکی در مقیاس‌هایی اشاره می‌کند که ابعاد طولی آن‌ها کوچک‌تر از ابعاد شبکه‌بندی محاسباتی است. در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ، مدل‌سازی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای برای نشان‌دادن اثرات حرکت مقیاس‌های کوچک در معادلات حاکم به‌کار گرفته می‌شود. عموماً اثرات حرکت مقیاس‌های زیرشبکه‌ای بر مقیاس‌های حل شده همانند درجهٔ آزادی ملکول‌ها در نظریهٔ جنبشی گازها مدل می‌شود که در آن شار ممنتم به صورت خطی با نرخ کرنش مقیاس‌های حل شده مرتبط است [4]. این بیان تعریف دیگری از لزجت گردابه می‌باشد. می‌توان نوشت:

$$\tau_{ij}^{\mathrm{ed}}=-2\upsilon_T\bar{S}_{ij} \tag{21}$$

که در آن υ_T لزجت گردابهٔ سینماتیکی است. بهترین و شناخته شده‌ترین مدل لزجت گردابه در سال 1963 توسط جوزف اسماگورینسکی [2] در شبیه‌سازی جریان جوی پیشنهاد شد.

2-2-1- مدل‌های لزجت گردابه

مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای اسماگورینسکی و اسماگورینسکی دینامیکی[3] در حوزهٔ مدل‌های لزجت گردابه قرار می‌گیرند. این دو مدل از معادلات مشابهی پیروی می‌کنند اما مقایسهٔ نتایج آن‌ها از دقت بالای مدل اسماگورینسکی دینامیکی خبر می‌دهد.

2-2-1-1- مدل اسماگورینسکی

در رایج‌ترین مدل که نخستین‌بار توسط اسماگورینسکی [2] توسعه داده شده است، لزجت گردابه با فرض این‌که مقیاس‌های کوچک در تعادل هستند، تعیین می‌گردد. به بیان دیگر تولید و اتلاف انرژی در تعادل قرار دارند:

$$\upsilon_T=(C_S\Delta)^2|\bar{S}| \tag{22}$$

Δ عرض فیلتر (که با اندازهٔ شبکه متناسب است)، C_S ثابت اسماگورینسکی، $|\bar{S}|=(2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$ اندازهٔ تانسور نرخ کرنش مقیاس‌های بزرگ با

$$\bar{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{23}$$

و $\bar{u}_i$ سرعت مقیاس‌های بزرگ است.

لیلی [10] برای اغتشاش همگن و همسان‌گرد با فیلتر برش[4] در زیرمحدودهٔ اینرسی و Δ برابر با اندازهٔ شبکه، مقدار C_S را در حدود 0.23 محاسبه کرد. اگرچه او این مقدار را از شبیه‌سازی جریان آشفتهٔ کانال با فرض برش متوسط به علّت کاهش بیش از حد اغتشاشات مقیاس‌بزرگ به دست آورد، دییردورف [3] از $C_S=0.1$ استفاده کرد. آزمایش‌هایی که توسط مک میلان و همکاران [11] بر روی آشفتگی همگن انجام شد، ثابت کرد که مقدار C_S با افزایش نرخ کرنش کاهش می‌یابد. میسون و کلن [12] مقدار C_S را برابر با 0.2 به دست آوردند که چنان‌چه دقت شبکه‌بندی به اندازهٔ کافی ریز باشد، نتایج خوبی را ارائه می‌دهد. آن‌ها هم‌چنین دریافتند که اگر دقت عددی کافی نباشد، مقداری کم‌تر از 0.2 برای این ضریب به دست می‌آید. نتایج آن‌ها توسط پیوملی و همکاران [13] که مقدار بهینهٔ C_S را در حدود 0.1 به‌دست آوردند، تأیید نشد. این درحالی بود که شبکه‌بندی آن‌ها بسیار ریزتر از شبکه‌بندی میسون و کلن [12] بود. لازم به ذکر است که میسون و کلن لایه‌مرزی دیواره را نادیده گرفتند. مقدار ثابت اسماگورینسکی در نرم‌افزار اپن‌فوم از رابطهٔ $C_S{}^2=C_k\sqrt{C_k/C_e}$ با ضرایب $C_k=0.094$ و $C_e=1.048$ معادل با 0.1677 تعیین شده است.

شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ با عبور از رژیم گذرا به آشفته در لایه‌مرزی [14] و جریان داخل کانال [15] مسطح نشان می‌دهد که در طی مراحل اولیهٔ رژیم گذرا، مدل اسماگورینسکی [2] کاهش شدیدی از ساختارهای حل‌شده (مقیاس‌های بزرگ) را در نظر می‌گیرد که منجر به رشد نادرست نرخ آشفتگی‌های اولیه می‌گردد. برای فائق‌آمدن بر این مشکل یک فرضیهٔ تجربی دیگر در فرم تابع متناوب معرفی شد که ثابت اسماگورینسکی را به‌طور مؤثر در طی مراحل اولیهٔ خطی و غیرخطی رژیم گذرا صفر قرار می‌دهد. این بررسی کوتاه نشان می‌دهد اگرچه اصلاحات و تغییرات مدل اسماگورینسکی به‌طور مؤفقیت‌آمیز در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ از جریان‌های گذرا و آشفته اعمال شده است، این امکان وجود ندارد تا با تنها یک ثابت جامع و کلی انواع پدیده‌های موجود در جریان‌های مورد بررسی، مدل شوند [15]. علاوه بر این مدل اسماگورینسکی [2] نمی‌تواند جریان انرژی از مقیاس‌های کوچک به مقیاس‌های بزرگ را محاسبه کند[5] [16]. از این‌رو با معرفی مدل‌های بهینه، تا حدودی کاستی‌های مدل‌های پیشین جبران شده و تصویر واقعی‌تری از جریان‌های آشفته ترسیم شده است.

2-2-1-2- مدل اسماگورینسکی دینامیکی

یک مدل جدید و دینامیکی از تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای توسط ژرمانو و همکاران [15] معرفی شد، که با محاسبهٔ محلی ضریب لزجت گردابه بر کاستی‌های ناشی از مدل اسماگورینسکی [2] غلبه می‌کند تا رفتار جریان واقعی را به‌درستی پیش‌بینی نماید. این کار با نمونه‌برداری از کوچک‌ترین

[1] UEqn.H
[2] divDevReff
[3] Dynamic Smagorinsky SGS model
[4] Cutoff filter
[5] Backscatter

مقیاس‌های حل‌شده و به‌حداقل‌رساندن خطای ناشی از محاسبهٔ تنش‌های لئونارد[1] (تنش‌های فیلترشده با فیلتر آزمون[2]) انجام می‌شود و با استفاده از این اطلاعات به مدل‌کردن مقیاس‌های زیرشبکه‌ای می‌پردازد. این مدل به تابع میرا یا متناوب احتیاج نداشته و توانایی محاسبهٔ شار انرژی از مقیاس‌های کوچک به مقیاس‌های بزرگ را دارد.

در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ، کمیت‌های مقیاس‌بزرگ مانند سرعت و فشار با ضرب شدن در یک تابع فیلتر مشخص و انتگرال‌گیری بر روی حوزهٔ محاسباتی فیلتر می‌شوند [4,1]. در روند دست‌یابی به هدف نهایی، دو عملگر فیلتر شبکه[3] و فیلتر آزمون معرفی می‌شوند. عرض فیلتر آزمون بزرگ‌تر از عرض فیلتر شبکه است.

با اعمال فیلتر برش به معادلهٔ (8)، معادلهٔ ناویراستوکس فیلترشده و بدون بعد به دست می‌آید؛

$$\frac{\partial \tilde{\bar{u}}_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\tilde{\bar{u}}_j\frac{\partial \tilde{\bar{u}}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \tilde{\bar{u}}_i\tilde{\bar{u}}_j}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \tilde{\bar{P}}}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \tilde{\bar{u}}_i}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (24)$$

در معادلهٔ (24)، تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای به صورت $T_{ij}=\widetilde{\overline{u_iu_j}}-\tilde{\bar{u}}_i\tilde{\bar{u}}_j$ بیان شده است. درنهایت، تنش اغتشاشی حل‌شده $\left(\varphi_{ij}\right)$ به صورت معادلهٔ (25) تعریف می‌شود؛

$$\varphi_{ij}=\widetilde{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\tilde{\bar{u}}_i\tilde{\bar{u}}_j \quad (25)$$

تنش‌های اغتشاشی حل‌شده نشان‌دهنده‌ی بخشی از تنش‌های رینولدز با مقیاسی که طول آن میانگینی بین عرض فیلتر شبکه و عرض فیلتر آزمون می‌باشد (مقیاس‌های حل‌شدهٔ کوچک)، هستند. کمیت‌های τ_{ij}، T_{ij} و φ_{ij} با یک رابطهٔ جبری به یک‌دیگر مرتبط می‌شوند.

$$\varphi_{ij}=T_{ij}-\widetilde{\tau_{ij}} \quad (26)$$

این رابطه نشان می‌دهد تنش‌های اغتشاشی حل‌شده می‌توانند به‌طور صریح از تنش‌های زیرشبکه‌ای در سطح آزمون $\left(T_{ij}\right)$ و شبکه $\left(\tau_{ij}\right)$ محاسبه شوند.

معادله‌ی (26) می‌تواند در توسعهٔ مدل‌های تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای دقیق و بهینه به‌کار گرفته شود. محاسبهٔ مقدار مناسب ضریب اسماگورینسکی برای حالت لحظه‌ای جریان، نمونه‌ای از کاربرد این معادله است. با فرض این‌که از تابع یکسانی در پارامتری‌کردن هر دو تنش‌های زیرشبکه‌ای T_{ij} و τ_{ij} استفاده شود (برای مثال مدل اسماگورینسکی)، مدل‌هایی برای قسمت‌های ناهمسان‌گرد T_{ij} و τ_{ij} به صورت M_{ij} و m_{ij} تعریف می‌شوند.

$$\tau_{ij}-\left(\delta_{ij}/3\right)\tau_{kk}\simeq m_{ij}=-2C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \quad (27)$$

$$T_{ij}-\left(\delta_{ij}/3\right)T_{kk}\simeq M_{ij}=-2C\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij} \quad (28)$$

که در آن،

$$\tilde{\bar{S}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\bar{u}}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \tilde{\bar{u}}_j}{\partial x_i}\right) \quad (29)$$

$$|\tilde{\bar{S}}|=\left(2\tilde{\bar{S}}_{ij}\tilde{\bar{S}}_{ij}\right)^{1/2} \quad (30)$$

و $\bar{\Delta}$ مشخصهٔ عرض فیلتر متناسب با فیلتر شبکه و $\tilde{\bar{\Delta}}$ مشخصهٔ عرض فیلتر مرتبط با فیلتر برش می‌باشد. دوّمین عبارت از سمت چپ معادلهٔ (27) و (28) ایجاب می‌کند که تانسور تنش در غیاب برش، همسان‌گرد باشد. قطر اصلی این تانسور با منفی دو برابر انرژی جنبشی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای برابر است. اگر معادلات (27) و (28) در معادلهٔ (26) قرار گیرد و طرفین معادله در $\bar{S}_{ij}$ ضرب شود، معادلهٔ (31) برقرار می‌گردد.

$$\varphi_{ij}\bar{S}_{ij}=-2C\left(\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij}\,\bar{S}_{ij}-\bar{\Delta}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij}\,\bar{S}_{ij}\right) \quad (31)$$

از معادلهٔ (31) ضریب $C(x,y,z,t)$ تعیین می‌شود. در معادلهٔ (31)، حاصل عبارت داخل پرانتز می‌تواند صفر شود. در این حالت مقدار C مبهم و نامعین است و یکی از عیب‌های این روش شناخته می‌شود [15]. این حالت در آزمایش‌های انجام شده در جریان آشفتهٔ کانال نشان داده شده است. از این‌رو برای جریان داخل کانال فرض می‌شود C تنها تابعی از y و t است، لذا میانگینی از هر دو طرف معادلهٔ (31) در طول یک صفحهٔ موازی با دیوار گرفته شده و با <> نمایش داده می‌شود.

$$C(y,t)=-\frac{1}{2}\,\frac{\langle\varphi_{kl}\bar{S}_{kl}\rangle}{\tilde{\bar{\Delta}}^2\langle|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{mn}\,\bar{S}_{mn}\rangle-\bar{\Delta}^2\langle|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{pq}\,\bar{S}_{pq}\rangle} \quad (32)$$

مدل جدید مقیاس‌های زیرشبکه‌ای لزجت گردابهٔ دینامیکی توسط معادلهٔ (33) بیان می‌شود:

$$m_{ij}=\frac{\langle\varphi_{kl}\bar{S}_{kl}\rangle}{\left(\tilde{\bar{\Delta}}/\bar{\Delta}\right)^2\langle|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{mn}\,\bar{S}_{mn}\rangle-\langle|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{pq}\,\bar{S}_{pq}\rangle}|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \quad (33)$$

در محاسبات اخیر فیلتر برش به عنوان هر دو فیلتر شبکه و آزمون استفاده شده است. در محاسبات تفاضل محدود، کمیت‌های فیلتر شده با فیلتر آزمون را می‌توان با متوسط‌گیری مکانی متغیرهای مقیاس‌بزرگ بر روی سلول‌های شبکه‌بندی استخراج نمود.

استفاده از رابطهٔ (33) نشان می‌دهد، اتلاف مقیاس‌های زیرشبکه‌ای مدل شده $\left(\varepsilon_{\mathrm{SGS}}=m_{ij}\bar{S}_{ij}\right)$ با میانگین اتلاف تنش‌های اغتشاشی حل شده $\left(\langle\varphi_{kl}\bar{S}_{kl}\rangle\right)$ متناسب است، لذا این مدل شار انرژی از مقیاس‌های کوچک به مقیاس‌های بزرگ را در نظر می‌گیرد. مدل اسماگورینسکی دینامیکی، تنش‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای را در جریان آرام و مرزهای جامد صفر لحاظ می‌کند. علاوه بر این، رفتار مجانبی صحیح برای مولفه‌های تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در مجاورت دیواره از ویژگی‌های قابل توجه این مدل است.

2-2-2- مدل‌های گرادیانی (بدون لزجت گردابه)

مدل مقیاس زیرشبکه‌ای گرادیانی تنظیم‌شده در حوزهٔ مدل‌های بدون لزجت گردابه قرار می‌گیرد. انتظار می‌رود مدل‌های بر پایهٔ گرادیان نسبت به مدل‌های لزجت گردابه نتایج مناسبی در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی یا شبیه‌سازی عددی مستقیم [17] بر روی شبکه‌های درشت ارائه کنند. یک اشکال عمده در مدل‌های لزجت گردابه، عدم توانایی آن‌ها در پیش‌بینی صحیح رفتارهای آشفتگی متفاوت در جریان‌های برشی و چرخشی با استفاده از یک قاعدهٔ کلی است. از طرفی ثابت شده است در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در لایه‌مرزی آشفته با عدد رینولدز بالا، مدل‌های استاندارد لزجت گردابه، برش میانگین در ناحیهٔ نزدیک دیواره را بسیار ضعیف پیش‌بینی کرده و پروفیل نادرستی از سرعت ترسیم می‌کنند.

2-2-2-1- مدل گرادیانی تنظیم شده

مطالعات خنا و براشر [18]، جونجا [19] و براشر و پرته‌آجل [20] و همکاران نشان داده است که مدل‌های لزجت گردابه ممکن است در شبکه‌های درشت خطاهای بزرگی در دامنهٔ حل القا کنند؛ چراکه آن‌ها توانایی محاسبهٔ ناهمسان‌گردی شدید جریان در ناحیهٔ نزدیک دیواره را ندارند. علاوه بر این، مدل‌های لزجت گردابه خصوصیات تغییر شکل چرخشی، مشابه تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای واقعی را ندارند [21-24]. از دیگر معایب آن‌ها این است که ساختاری کاملاً اتلافی دارند و اجازهٔ انتقال انرژی از مقیاس‌های حل‌نشده به مقیاس‌های حل‌شده را نمی‌دهند. مدل‌های گرادیانی که به عنوان مدل‌های غیرخطی یاد می‌شوند، از اواخر سال 1970 ارائه شده‌اند [25]. آن‌ها

---

1 Leonard stress
2 Test filter
3 Grid filter

براساس بسط سری تیلور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای توسعه یافته‌اند. مدل گرادیانی تنظیم شده نیز بر پایهٔ بسط تیلور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای بنا شده و از فرضیهٔ تعادلی محلی به منظور محاسبهٔ انرژی جنبشی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای استفاده می‌کند [26]. این مدل از طریق یک مقایسهٔ اصولی با رابطه‌های تجربی پذیرفته‌شده و پیش‌بینی‌های نظری از تنوّع آماری جریان در لایه‌مرزی ارزیابی می‌شود. به‌طور کلی داده‌های آماری حاصل از میدان سرعت شبیه‌سازی‌شده با مدل گرادیانی تطابق خوبی با نتایج تجربی نشان می‌دهند و هم‌چنین بهبود قابل‌توجهی در مقایسه با شبیه‌سازی‌های مدل‌های استاندارد لزجت گردابه [15,10,2] به‌دست آمده است. برای مثال، مدل جدید قادر به بازیابی پروفیل سرعت متوسط در ناحیهٔ لگاریتمی از جریان بوده و طیف انرژی مقیاس‌های جریان را ترسیم می‌کند.

اولین‌بار مدلی که گرادیان‌های میدان‌های حل شده را توصیف می‌کرد، توسط کلارک و همکاران [25] پیشنهاد شد. پیش از این محققان بسیاری بر روی نمونهٔ مشابهی از این مدل مطالعه کرده بودند. تحقیقات قبلی بر مبنای شبیه‌سازی‌های عددی مستقیم و داده‌های آزمایشگاهی برای بررسی عملکرد این مدل صورت گرفته است و تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای مدل شده تطابق بسیار خوبی را با تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای واقعی آشکار می‌سازد [28,27]. این درحالی است که گزارش‌های اخیر حاکی از آن است، این مدل در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ اتلاف ناکافی را فراهم می‌آورد [29] و مستعد پذیرش ناپایداری عددی است [30]. نسخهٔ اصلاح‌شدهٔ مدل اصلی کلارک، توسط لو و پرته‌آجل [26] برای تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای و نیز بردار شار حرارتی اسکالر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای ارائه شد و مدل گرادیانی تنظیم شده نام گرفت. این نمونهٔ اولیه از مدل گرادیانی، بسیار پایدارتر از نمونهٔ قبلی بود و اتلاف گردابه‌های جریان را به شکلی بهینه اعمال می‌کرد. هم‌چنین با مؤفقیت برای شبیه‌سازی جریان در لایه‌های مرزی اتمسفری[1] پایدار و خنثی به‌کار گرفته شد.

مدل گرادیانی تنظیم شده به سرعت‌های فیلتر شده و میدان‌های اسکالر وابسته است. تمام مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای شامل ضرایبی هستند که سطح اتلاف ایجاد شده ناشی از مدل مورد استفاده را کنترل می‌کنند. این ضرایب می‌توانند یک مقدار ثابت و مشخص را به خود اختصاص دهند یا این‌که بسته به شرایط جریان به صورت پویا و دینامیکی محاسبه شوند. مدل گرادیانی تنظیم شده برمبنای تعادل محلی، از یک ضریب ثابت برای تانسور تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای استفاده می‌کند. معادلات (34) تا (37) بیان ریاضی این مدل را نشان می‌دهند [26].

$$B_{ij}=\frac{8\bar{\Delta}^2}{C_\varepsilon^2}\left(-\frac{\bar{G}_{kl}}{\bar{G}_{mm}}\bar{S}_{kl}\right)^2\left(\frac{\bar{G}_{ij}}{\bar{G}_{nn}}\right)H(P) \tag{34}$$

$$B_{iT}=\frac{2\bar{\Delta}^2}{C_{\varepsilon T}^2\mathrm{Pr}}\left(-\frac{\bar{G}_{kl}}{\bar{G}_{mm}}\bar{S}_{kl}\right)\left(-\frac{\bar{G}_{nT}}{\left|\bar{G}_{pT}\right|}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\bar{G}_{iT}}{\left|\bar{G}_{qT}\right|}\right)H(P)H(P_T) \tag{35}$$

که در آن،

$$\bar{G}_{ij}=\frac{\bar{\Delta}_x^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_1}+\frac{\bar{\Delta}_y^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_2}+\frac{\bar{\Delta}_z^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_3} \tag{36}$$

$$\bar{G}_{iT}=\frac{\bar{\Delta}_x^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_1}+\frac{\bar{\Delta}_y^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_2}+\frac{\bar{\Delta}_z^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3} \tag{37}$$

و $\mathrm{Pr}=\upsilon/\kappa_T$ عدد پرانتل می‌باشد. طول فیلتر در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در سه جهت x، y و z به ترتیب $\bar{\Delta}_x$، $\bar{\Delta}_y$ و $\bar{\Delta}_z$ هستند و لزوماً با یک‌دیگر برابر نیستند. طول فیلتر شبکه‌بندی کلی $\bar{\Delta}=\left(\bar{\Delta}_x\bar{\Delta}_y\bar{\Delta}_z\right)^{1/3}$ فرض شده است. در معادلات (34) و (35) تابع‌های $H(P)$ و $H(P_T)$ مقدار تنش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای را در حالتی که تولید ممنتم مقیاس‌های زیرشبکه‌ای $\left(P=-\bar{\tau}_{ij}\bar{S}_{ij}\right)$ و تولید اسکالر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای $\left(P_T=-\bar{G}_{iT}\,\partial\bar{T}/\partial x_i\right)$ دارای مقدار منفی است، صفر لحاظ می‌کنند. در مدل گرادیانی تنظیم‌شده ضرایب C_ε^2 و $C_{\varepsilon T}^2$ مقدار یک را به خود اختصاص می‌دهند.

2-3- حلگر پیمپل‌فوم و تصحیح آن

حلگر پیمپل‌فوم برای حل معادلات ناویراستوکس فیلتر شده در نرم‌افزار اپن‌فوم طراحی و پیاده‌سازی شده است. این حلگر توانایی تحلیل رفتارهای متنوع از جریان‌های مختلف و به‌کارگیری انواع شیوه‌های مدل‌سازی آشفتگی را دارد. الگوریتم استفاده شده در این حلگر بر مبنای ترکیبی از الگوریتم‌های گذرای سیمپل[2] و پیزو[3] شکل گرفته است [31,8]. مراحل اساسی و مهم از الگوریتم حلگر پیمپل‌فوم در "شکل 1" بیان شده است.

الگوریتم پیمپل‌فوم در شروع هر گام زمانی، زمان شبیه‌سازی را به مقدار گام زمانی افزایش می‌دهد. سپس حلقهٔ معادلات کوپل‌شدهٔ فشار و سرعت اجرا می‌شود. داخل این حلقه ابتدا معادلهٔ ممنتم حل شده و پس از آن حلقهٔ تصحیح آغاز می‌شود. داخل حلقهٔ تصحیح، معادلهٔ فشار حل می‌شود و میدان سرعت تا رسیدن به شرایط پیوستگی $(\nabla\cdot V=0)$ اصلاح می‌گردد. در نهایت، حلقهٔ اول با حل معادلات مرتبط با مدل‌سازی آشفتگی پایان می‌یابد.

در نرم‌افزار اپن‌فوم این امکان فراهم شده است تا تعداد اجرای حلقهٔ معادلات کوپل‌شدهٔ فشار و سرعت تنظیم شود. در حالتی که این حلقه تنها یک‌بار انجام شود، الگوریتم پیمپل‌فوم با الگوریتم پیزو یکسان خواهد بود. مشابه حلقهٔ بیرونی، تعیین تعداد دفعات اجرای حلقهٔ تصحیح نیز امکان‌پذیر است. برای دست یافتن به الگوریتم گذرای سیمپل کافی است این تعداد را یک قرار داد.

افزایش تعداد تکرارهای حلقهٔ تصحیح در کنار ضرایب زیرتخفیف[4] مناسب می‌تواند با افزایش گام زمانی همراه باشد که این خود زمان محاسبات کلی را کاهش می‌دهد. گام زمانی در شبیه‌سازی‌های این تحقیق به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب شده است تا عدد کورانت[5] را کم‌تر از یک نگاه دارد. بنابراین تعداد تکرارهای حلقهٔ بیرونی و حلقهٔ تصحیح به ترتیب یک و دو لحاظ شده است. الگوریتم حلگر پیمپل‌فوم فعلی در اپن‌فوم، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ را تنها با مدل‌های لزجت گردابه انجام می‌دهد. برای به‌کارگیری مدل مقیاس زیرشبکه‌ای گرادیانی تنظیم شده در اپن‌فوم لازم است تا کد نوشته شده در فایل معادلهٔ سرعت تصحیح شود به‌گونه‌ای که کتابخانهٔ جدید برای جایگذاری عبارت دیورژانس تنش‌های انحرافی موثر در معادلهٔ ممنتم فراخوانی گردد.

3- توصیف مسأله

برای شبیه‌سازی، جریان تراکم‌ناپذیر سیال نیوتونی میان دو صفحهٔ موازی با فواصل $y_{\mathrm{dim}}=0$ و $y_{\mathrm{dim}}=2h$ در نظر گرفته شده است. شرط مرزی پریودیک[6] در طرفین کانال و شرط عدم لغزش در دیوارهٔ بالایی و پایینی لحاظ شده است. برای به جریان انداختن سیال، گرادیان فشار معکوس بر مبنای سرعت متوسط اعمال گردیده است. اختلاف دمای سطوح بالا و پایین

[1] Atmospheric boundary layers (ABL)

[2] SIMPLE
[3] PISO
[4] Under-relaxation
[5] Courant number
[6] Periodic boundary condition

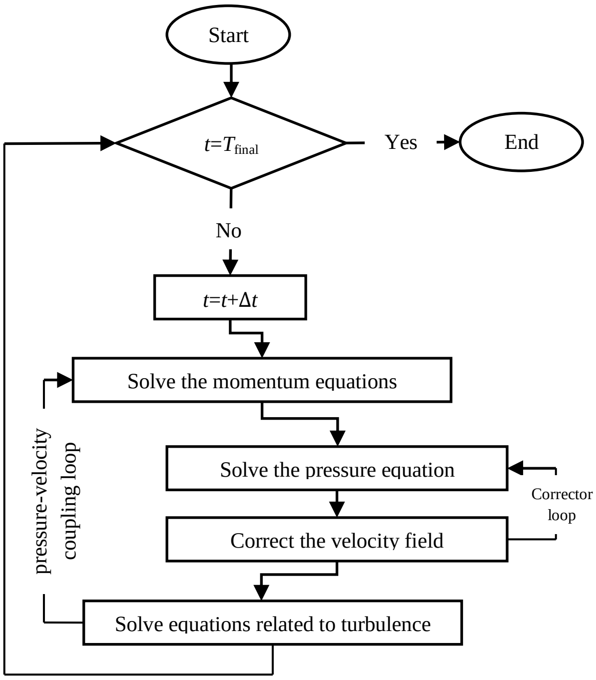

Fig. 1 Essential steps of the algorithm implemented in the pimpleFoam-solver

شکل 1 گام‌های اساسی از الگوریتم پیاده شده در حلگر پیمپل‌فوم

صفر می‌باشد. شبیه‌سازی‌ها در عدد رینولدز اصطکاکی 395 ($\mathrm{Re}_\tau = 395$) انجام شده است. حوزهٔ محاسباتی، یک کانال مستطیل‌شکل به ابعاد $L_x \times L_y \times L_z = 2\pi \times 2 \times \pi$ می‌باشد. شبکه‌بندی بهینه پس از آزمون استقلال از شبکه مشخص می‌شود. شبکه‌بندی در جهت‌های x و z به صورت یکنواخت و برای تحلیل دقیق‌تر گرادیان‌های شدید نزدیک دو دیواره و لایه‌مرزی به شکل متراکم در جهت y ایجاد شده است. تراکم سلول‌ها در نزدیکی $y_{\mathrm{dim}} = 0$ و $y_{\mathrm{dim}} = 2$ با به‌کارگیری رابطهٔ (38) تعیین شده است.

$$z = 2\frac{(\gamma+1)[(\gamma+1)/(\gamma-1)]^{2z_u-1} - \gamma + 1}{2\{1 + [(\gamma+1)/(\gamma-1)]^{2z_u-1}\}} \quad (38)$$

z_u موقعیت نقاط شبکه را در حالت توزیع یکنواخت بیان می‌کند و γ نشان‌دهندهٔ پارامتر تراکم می‌باشد. مقدار پارامترهای عددی در جدول 1 گزارش شده است. کمیت‌های Δx^+، Δy^+ و Δz^+ برحسب u_τ و υ بی‌بعد شده‌اند. در زمینهٔ جریان‌های آشفته، اعداد بدون بعد براساس سرعت اصطکاکی، $u_\tau = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{Re}}\partial\bar{u}_1/\partial y}\,|_{y=0}$ بی‌بعد می‌شوند. جریان کانال یک مسألهٔ کلاسیک برای ارزیابی مدل‌های عددی در پیش‌بینی صحیح آشفتگی داخلی است و به‌طور گسترده در روش‌های محاسباتی و آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار گرفته است [25].

4- روش عددی

جعبه‌ابزار اپن‌فوم یک نرم‌افزار رایگان و متن‌باز می‌باشد که در سال‌های اخیر محبوبیت فراوانی در میان سازمان‌های تجاری و دانشگاهی پیدا کرده است. این جعبه‌ابزار شامل بیش از 170 شبیه‌سازی مبتنی بر قابلیت طراحی و تولید شبکه‌بندی برای انواع جریان‌های تراکم‌ناپذیر، تراکم‌پذیر و چندفازی، جریان‌های شامل واکنش‌های شیمیایی و انتقال حرارت، دینامیک جامدات و الکترومغناطیس می‌باشد. بسیاری از نرم‌افزارهای رایج و تجاری برای ترسیم جریان و شبکه‌بندی هندسه هم‌چون پوینت‌وایز[1] و تک‌پلات[2] تنها بر روی یک پردازنده اجرا می‌شوند. تاکنون کدهای تجاری بسیاری رواج یافته‌اند اما از محدودیت‌های آن‌ها می‌توان به هزینهٔ بالای اولیه، محدودیت دسترسی و محدودیت قابلیت موازی‌سازی اشاره کرد. در اپن‌فوم قابلیت موازی‌سازی حجم گسترده‌ای از تحلیل داده‌ها بدون پرداخت هیچ هزینه‌ای ستودنی است.

بستهٔ نرم‌افزاری اپن‌فوم قابلیت حل معادلات ناویراستوکس فیلتر شده را با روش حجم محدود فراهم می‌سازد. روش حجم محدود بر پایهٔ تقسیم دامنهٔ محاسباتی به حوزه‌های کوچک غیرمتقاطع و چندوجهی به نام حجم کنترل شکل گرفته است. شکل‌های متنوعی از این روش توسعه یافته است اما در اپن‌فوم تمام متغیرها در مرکز حجم کنترل ذخیره می‌شوند. این مقدار مرکزی به تمام حجم کنترل نسبت داده می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که این تقریب‌ها، از دقت مرتبهٔ دوم هستند [31]. استخراج معادلات گسسته شده با انتگرال‌گیری از معادلات اولیه بر روی حجم کنترل در بازهٔ زمانی ΔT آغاز می‌شود.

اپن‌فوم گسترهٔ وسیعی از طرح‌های عددی برای گسسته‌سازی زمان، گسسته‌سازی مکان، ارتباط معادلات فشار و سرعت، حلگرهای ماتریس و مدل‌های آشفتگی متداول را در اختیار کاربران قرار می‌دهد. از طرح‌های گسسته‌سازی زمانی می‌توان به طرح‌های زمانی اویلر، تفاضل پس‌رو و کرنک نیکلسون اشاره کرد. برای گسسته‌سازی ممنتم، لاپلاسین و دیورژانس طرح‌های مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم توسعه یافته‌اند. در این شبیه‌سازی از طرح‌های تفاضل پس‌رو، تفاضل مرکزی مرتبهٔ دوم و تفاضل مرکزی مرتبهٔ دوم به صورت محدود شده و تصحیح شده به ترتیب برای گسسته‌سازی جملات زمانی، گرادیانی، دیورژانس و لاپلاسین استفاده شده است.

کد مدل آشفتگی گرادیانی تنظیم شده در کتابخانهٔ اپن‌فوم نوشته و اجرا شده است، توانایی پردازش اطلاعات به صورت موازی بر روی حافظه‌ی توزیع‌یافته را دارا می‌باشد. هم‌چنین با به‌کارگیری پیغام عبور، دسترسی رابط میان پردازنده‌ها امکان‌پذیر می‌گردد. برای بررسی اثر شبکه‌بندی، شبیه‌سازی‌ها با سه نوع شبکه‌بندی متفاوت، درشت ($62 \times 90 \times 78$)، ریز ($80 \times 136 \times 100$) و خیلی ریز ($104 \times 204 \times 128$) تنها برای مدل گرادیانی تنظیم شده انجام شده است. "شکل 2" نشان می‌دهد با افزایش شبکه‌بندی، نتایج بهبودیافته و به داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم نزدیک‌تر شده است. علّت این بهبود کاهش مدل‌سازی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای با افزایش سلول‌های محاسباتی است. زیرا با کوچک‌شدن سلول محاسباتی، معادلات ناویراستوکس به‌طور مستقیم برای مقیاس‌های در ابعاد شبکهٔ محاسباتی حل می‌شوند. از این‌رو انتظار می‌رود نتایج حاصل، اختلاف اندکی را با داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم پیش‌بینی نمایند. شبکهٔ ریز بر روی 14 پردازندهٔ اینتل[3] با آخرین نسخهٔ ماژول حافظه[4] با در نظرگرفتن هر دو پارامتر هزینهٔ محاسباتی و زمان شبیه‌سازی، به مدت 255 ساعت نتایج قابل قبولی را ارائه داد و به عنوان شبکهٔ بهینه در این تحقیق برگزیده شد.

جدول 1 پارامترهای عددی در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ از جریان آشفتهٔ کانال

Table 1 Numerical parameters in LES of turbulent channel flow

نام مدل	Δx^+	Δy^+	Δz^+	γ
مدل اسماگورینسکی	40.0867	1.1396	25.0542	1.015
مدل اسماگورینسکی دینامیکی	24.2845	0.4609	15.1778	1.015
مدل دییردورف	26.3579	0.7491	16.4737	1.015
مدل گرادیانی تنظیم‌شده	24.1588	0.6868	15.0992	1.015

[1] PointWise
[2] Tecplot
[3] Intel® Xeon® processor E5-2600 v3 series, Socket R3 LGA2011
[4] 16 DDR4 DIMM slots up to 2400/2133 MHz

شبکهٔ درشت بر روی 8 پردازنده به مدت 120 ساعت به طول انجامید درحالی‌که شبکهٔ خیلی ریز بر روی 24 پردازنده مدت زمان تقریبی 368 ساعت را صرف نمود. حوزهٔ محاسباتی در تمام شبیه‌سازی‌ها توسط یک پروفیل پایه بر مبنای اغتشاشات سینوسی مقداردهی اولیه شده است. این پروفیل برای سرعت‌ها از شرایط جریان آرام کاملاً توسعه‌یافته استخراج شده است (مولفهٔ $\bar{u}$ یک پروفیل سهموی و مولفه‌های $\bar{v}$ و $\bar{w}$ مقدار صفر را به خود اختصاص می‌دهند). تمام داده‌های آماری بعد از گذشت زمانی معادل با 100 برابر زمان مورد نیاز سیال که به‌طور کامل تمام ناحیهٔ محاسباتی را طی کند (T) و جریان به شرایط دائمی دست یابد، محاسبه شده‌اند. هم‌چنین به‌دلیل وجود نوسانات شدید در ابتدای حل، از متوسط‌گیری کمیت‌ها تا زمان $20T$ ثانیه خودداری شده است. متوسط‌گیری‌ها شامل متوسط‌گیری زمانی و مکانی هستند.

5- نتایج

در این قسمت نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی، ارائه و تحلیل شده است. به منظور ارزیابی دقت نتایج، داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم [17] برای عدد رینولدز اصطکاکی 395 استفاده شده است. از علامت قرارگرفته در بالای کمیت‌های فیلتر شده برای اختصار صرف‌نظر شده است. نتایج به صورت تابعی از y^+ ترسیم شده که بیانی از کمیت‌ها را در نگاه نزدیک دیواره به تصویر می‌کشد.

5–1- کمیت‌های اصلی جریان

منظور از کمیت‌های اصلی جریان، متغیرهای اسکالری است که جریان را توصیف می‌کنند. سرعت اصطکاکی و سرعت متوسط در خط مرکزی نمونه‌ای از این متغیرها هستند. ارائهٔ این کمیت‌ها اولین گام در تحلیل نتایج به شمار می‌رود. جدول 2 مقادیر به‌دست‌آمده از سرعت اصطکاکی و سرعت متوسط در خط مرکزی را برای مدل‌های مختلف مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در عدد رینولدز اصطکاکی 395 نشان می‌دهد. مهم‌ترین آن‌ها سرعت اصطکاکی متوسط (u_τ) و یا معادل آن عدد رینولدز اصطکاکی (Re_τ) می‌باشد. علامت متوسط مکانی <> برای سادگی حذف شده و سرعت اصطکاکی متوسط به اختصار با u_τ نوشته شده است. مقدار هدف برای سرعت اصطکاکی متوسط، کمیت U_b/u_τ و مقیاس طولی لزجت به ترتیب برابر با 0.0079، 16.90 و 0.00253 می‌باشد.

بیش‌تر نتایج با سرعت اصطکاکی متوسط (u_τ) مقیاس شده‌اند. داده‌های هر شبیه‌سازی با مقدار سرعت اصطکاکی متوسط حاصل از همان شبیه‌سازی مقیاس شده‌اند. عدد بدون‌بعد y^+ با سرعت اصطکاکی متوسط متناسب بوده و مقدار آن برای هر شبیه‌سازی محاسبه شده است. این بدین معناست که داده‌های ترسیم‌شده در یک مقدار یکسان از y^+ در موقعیت‌های مکانی متفاوت (y) قرار گرفته‌اند.

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\upsilon} \tag{39}$$

5–2- پروفیل سرعت متوسط

این بخش به بررسی پروفیل‌های سرعت متوسط جریان در راستای x پرداخته است. مقدار میانگین مولفه‌های دیگر در تمام دامنهٔ جریان صفر هستند. در "شکل 3" پروفیل‌های متوسط‌گیری‌شدهٔ مولفهٔ سرعت محوری بی‌بعد از

جدول 2 پارامترهای اصلی جریان

Table 2 Computed global flow parameters

پارامتر	مدل اسماگورینسکی	مدل اسماگورینسکی دینامیکی	مدل دیردورف	مدل گرادیانی تنظیم‌شده
سرعت اصطکاکی متوسط $u_\tau(m/s)$	0.01276	0.00773	0.00839	0.00769
سرعت مرکزی متوسط $U_c(m/s)$	0.15504	0.15642	0.15544	0.15522
Re_τ	638	386.5	419.5	384.5
Re_c	7752	7821	7772	7761
U_b/u_τ	10.76	17.77	16.37	17.86
U_c/u_τ	12.15	20.23	18.53	20.18
U_c/U_b	1.13	1.14	1.13	1.13
مقیاس طولی لزجت $\delta_\upsilon = \upsilon/u_\tau\,(m)$	0.00156	0.00258	0.00238	0.0026

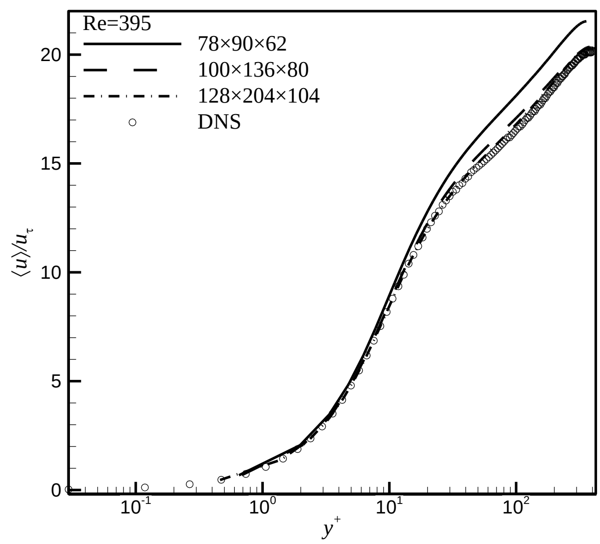

Fig. 2 Profile of the mean of the normalized streamwise component of velocity in three different grid size.

شکل 2 پروفیل متوسط‌گیری‌شدهٔ مولفهٔ سرعت محوری بی‌بعد در سه شبکهٔ متفاوت.

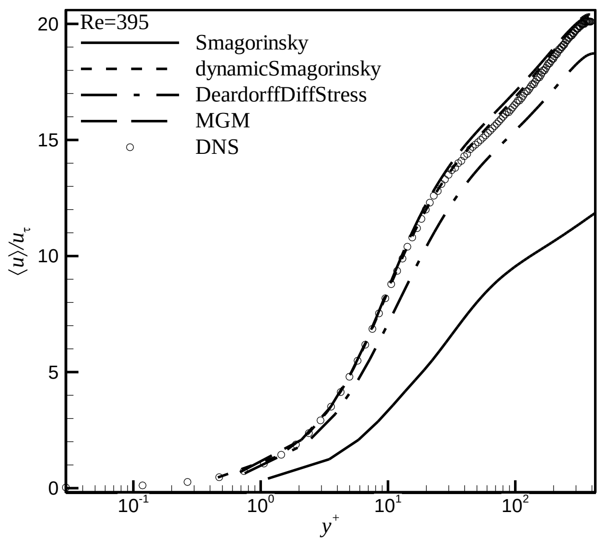

Fig. 3 Profiles of the mean of the normalized streamwise component of velocity.

شکل 3 پروفیل‌های متوسط‌گیری‌شدهٔ مولفهٔ سرعت محوری بی‌بعد.

مدل‌های مختلف مقیاس‌های زیرشبکه‌ای نشان داده شده است.

تشخیص تفاوت میان پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده دشوار است، اما پروفیل‌های دو مدل دیگر اختلاف زیادی را نشان می‌دهند. ناحیهٔ زیرلایهٔ لزج[1] با مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی، گرادیانی تنظیم شده و دییردورف به خوبی پیش‌بینی شده است. در لایهٔ حائل[2] پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده بر نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم منطبق هستند و مدل دییردورف اختلاف ناچیزی را نشان می‌دهد. در ناحیهٔ لگاریتمی[3] پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده مقادیر مولفهٔ سرعت محوری متوسط‌گیری شده و بی‌بعد را بیش‌تر از شبیه‌سازی عددی مستقیم محاسبه کرده‌اند، اما نتایج مدل اسماگورینسکی دینامیکی به نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم بسیار نزدیک است تا جایی‌که پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی، گرادیانی تنظیم شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم در $y^+ \approx 300$ یک‌دیگر را قطع می‌کنند. مدل دییردورف در تمام سه ناحیه در زیر پروفیل مولفهٔ سرعت محوری بی‌بعد شبیه‌سازی عددی مستقیم قرار گرفته و با اختلاف اندکی رفتار کلی آن را پیروی می‌کند. مدل اسماگورینسکی با ضریب $C_S = 0.1677$ عملکرد خوبی را ارائه نکرده است و با فاصله‌گرفتن از دیواره اختلاف شدیدی در پیش‌بینی نتایج آن رخ می‌دهد.

5-3- اغتشاشات سرعت

مولفه‌های تانسور تنش رینولدز از کمیت‌های اصلی در توصیف اغتشاشات آشفتگی محسوب می‌شوند. ابتدا به تحلیل مولفه‌های واقع بر روی قطر اصلی تانسور تنش پرداخته شده است. این مولفه‌ها، $\langle u_i'^2 \rangle$، واریانسی از مولفه‌های سرعت هستند. با این وجود، استفاده از انحراف استاندارد از ریشهٔ مربع متوسط[4] u_i، $u_i^{rms} = \sqrt{\langle u_i'^2 \rangle}$ رایج و مرسوم است. "شکل‌های 4 تا 6" توزیعی از انحراف استاندارد سه مولفهٔ سرعت را در راستای عمود بر دیواره نشان می‌دهند.

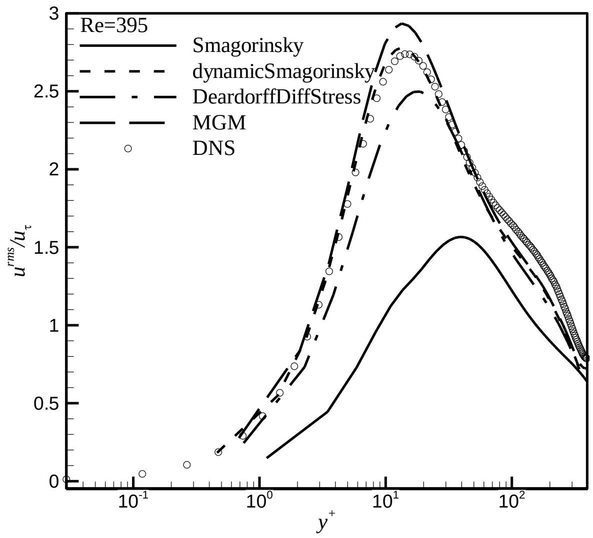

Fig. 4 Profiles of the normalized standard deviation of the streamwise component of velocity, u^{rms}/u_τ.

شکل 4 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفهٔ محوری سرعت.

[1] Viscous sub-layer
[2] Buffer layer
[3] Log-law region
[4] Root mean square

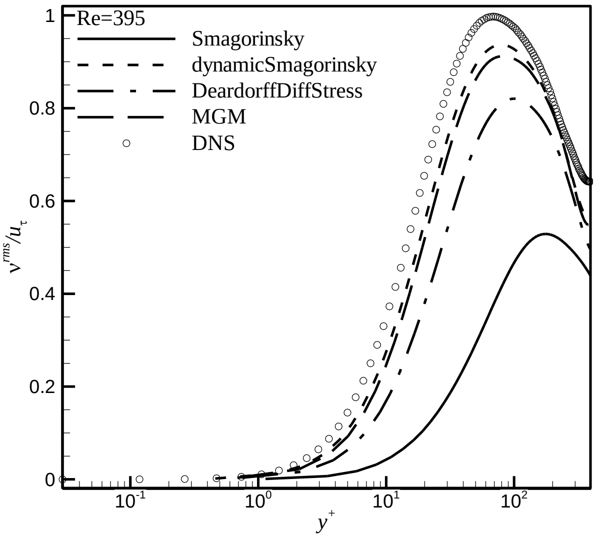

Fig. 5 Profiles of the normalized standard deviation of the wall-normal component of velocity, v^{rms}/u_τ

شکل 5 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفهٔ عرضی سرعت

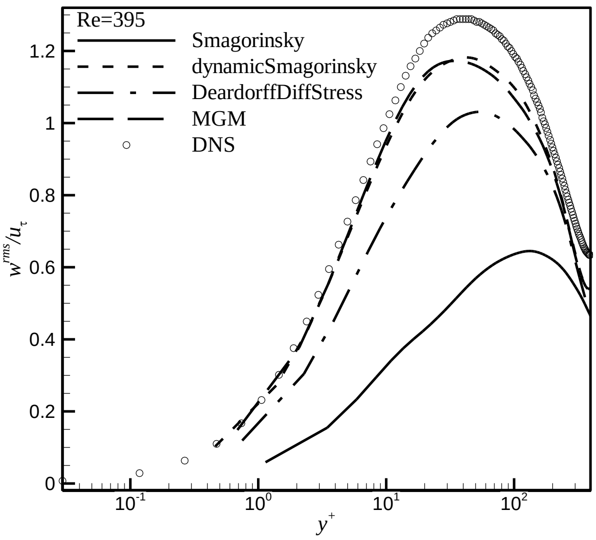

Fig. 6 Profiles of the normalized standard deviation of the spanwise component of velocity, w^{rms}/u_τ

شکل 6 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفهٔ عمقی سرعت

در نمودار انحراف استاندارد هر دو مولفهٔ عرضی و عمقی سرعت، مقادیر به‌دست آمده از همهٔ مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای کم‌تر از مقادیر پروفیل شبیه‌سازی عددی مستقیم هستند. مدل اسماگورینسکی دینامیکی مقدار انحراف استاندارد مولفهٔ محوری سرعت را تا $y^+ \approx 17$ بالاتر از نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم پیش‌بینی کرده است، این درحالی است که مدل گرادیانی تنظیم شده تا $y^+ \approx 51$ در بالای نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم قرار گرفته است. پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده توانسته‌اند موقعیت بیش‌ترین مقدار انحراف استاندارد هر سه مولفهٔ سرعت را با دقت بالایی تخمین بزنند. این موقعیت در مدل دییردورف با اختلاف اندک و در مدل اسماگورینسکی با جابه‌جایی فاحش مواجه شده است. شیب تند پروفیل شبیه‌سازی عددی مستقیم در لایهٔ حائل و ناحیهٔ لگاریتمی با مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی، گرادیانی تنظیم شده و دییردورف به خوبی بازیابی شده است و تنها مدل دییردورف در مولفهٔ عمقی سرعت اندکی خطا را دربر دارد.

5-4- تنش برشی آشفتگی

تحلیل مولفه‌های غیر قطر اصلی از تانسور تنش رینولدز حائز اهمیت است. تقارن جریان کانال عامل صفرشدن مولفه‌های xz و yz از تانسور تنش رینولدز می‌باشد. بنابراین تنها، مولفهٔ xy باقی می‌ماند که با ضرب شدن در مقدار منفی یک، به عنوان تنش برشی آشفتگی شناخته می‌شود.

به سادگی می‌توان نشان داد برای جریان کانال، پروفیل تنش برشی کلی، یعنی مجموع تنش‌های برشی آشفتگی و لزجی به‌صورت خطی در عرض کانال تغییر می‌کند [7]. تنش‌های لزجی نقش برجسته‌ای را تنها در ناحیهٔ نزدیک دیواره $(y^+ < 50)$ بازی می‌کنند. به تبع آن، می‌توان انتظار داشت در بیرون از این ناحیه، پروفیل تنش برشی آشفتگی خطی باشد. "شکل 7" پروفیل‌های تنش برشی آشفتگی بی‌بعد از چهار مدل مقیاس زیرشبکه‌ای را به همراه نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم ترسیم می‌کند.

پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده در پیش‌بینی مقادیر تنش برشی آشفتگی بسیار شبیه به‌هم عمل کرده‌اند. این مدل‌ها رفتار پروفیل تنش برشی آشفتگی شبیه‌سازی عددی مستقیم را با دقت بسیار بالایی رصد کرده و در تعیین موقعیت دقیق مقدار ماکزیمم تنش برشی آشفتگی مؤفق بوده‌اند. پروفیل هر چهار مدل آشفتگی در پایین پروفیل شبیه‌سازی عددی مستقیم واقع شده است. تلاش مدل اسماگورینسکی در بازیابی نتایج تنش برشی آشفتگی از شبیه‌سازی عددی مستقیم در هر سه ناحیهٔ زیرلایهٔ لزج، لایهٔ حائل و لگاریتمی بی‌نتیجه بوده است.

5-5- اغتشاشات گردابه

ترسیم پروفیل انحراف استاندارد از مولفه‌های بردار گردابه $(\omega = \nabla \times u)$، در تعیین توانایی‌های شاخص یک مدل مقیاس زیرشبکه‌ای کمک شایانی می‌کند. تحلیل پروفیل‌های گردابه می‌تواند به بینشی عمیق در مورد ماهیت و رفتار ساختارهای گردابی حاضر در جریان مورد بحث منجر شود. پروفیل‌های انحراف استاندارد از سه مولفهٔ بردار گردابه در "شکل‌های 8 تا 10" ارائه شده‌اند.

هر سه شبیه‌سازی خصوصیات برجستهٔ داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم را بازتولید کرده‌اند. پروفیل‌های انحراف استاندارد سه مولفهٔ بردار گردابه برای مدل‌های زیرشبکه‌ای اسماگورینسکی و دییردورف با اختلاف

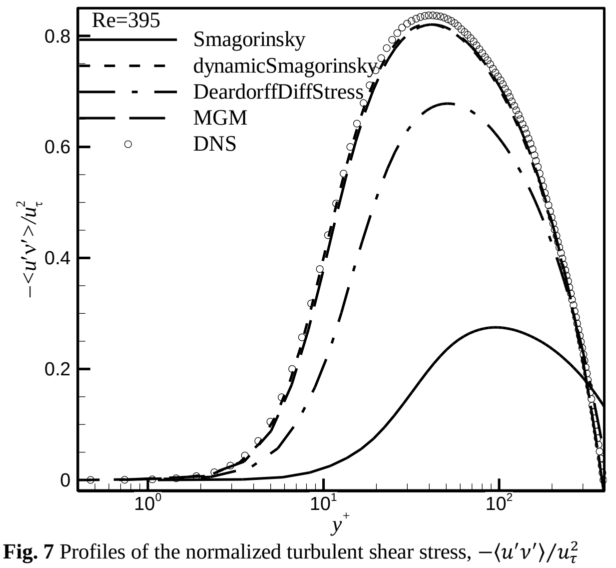

Fig. 7 Profiles of the normalized turbulent shear stress, $-\langle u'v'\rangle/u_\tau^2$

شکل 7 پروفیل‌های تنش برشی آشفتگی بی‌بعد

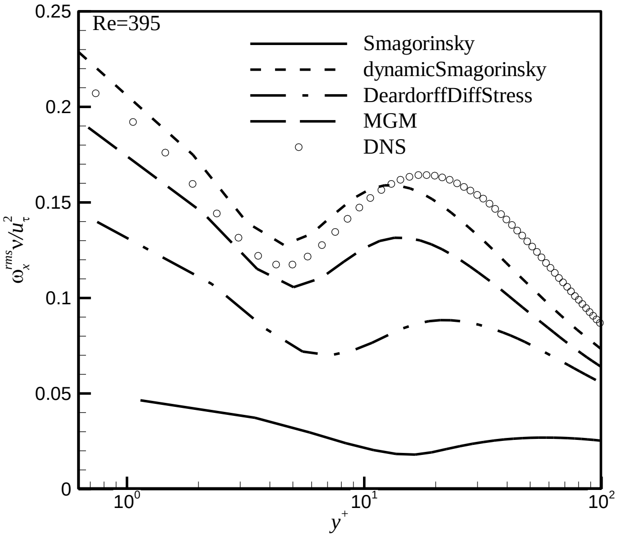

Fig. 8 Profiles of the normalized standard deviation of the streamwise component of vorticity, $\omega_x^{rms}\upsilon/u_\tau^2$

شکل 8 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفهٔ محوری گردابه

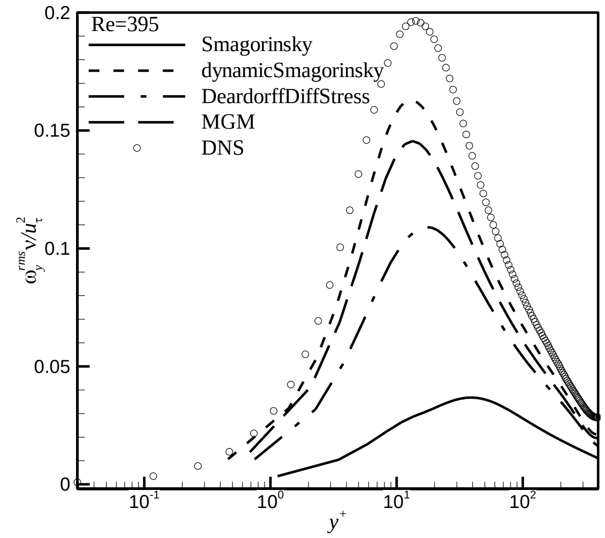

Fig. 9 Profiles of the normalized standard deviation of the wall-normal component of vorticity, $\omega_y^{rms}\upsilon/u_\tau^2$

شکل 9 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفهٔ عرضی گردابه

زیادی نسبت به نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم در زیر پروفیل آن جای گرفته‌اند. مدل دییردورف در نمایش رفتار کلی پروفیل شبیه‌سازی عددی مستقیم بهتر از مدل اسماگورینسکی عمل کرده است. مدل اسماگورینسکی دینامیکی تنها در پروفیل انحراف استاندارد مولفهٔ محوری بردار گردابه تا $y^+ \approx 12$ و مدل گرادیانی تنظیم شده تنها در پروفیل انحراف استاندارد مولفهٔ عمقی بردار گردابه تا $y^+ \approx 8$ مقادیر بزرگ‌تری در مقایسه با نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم در نظر گرفته‌اند. هم‌چنین تطابق بی‌نظیر پروفیل انحراف استاندارد مولفهٔ عمقی بردار گردابه در مدل اسماگورینسکی دینامیکی با داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم در یک شبکه‌بندی سبک از توانایی بالای این مدل خبر می‌دهد. اشاره به این نکته نیز که مدل گرادیانی تنظیم شده با به‌کارگیری حلگر تصحیح‌شده‌ی پیمپل‌فوم پابه‌پای مدل اسماگورینسکی دینامیکی در ترسیم نتایج دقیق و قابل استناد قدم برداشته است، خالی از لطف نیست. همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، پروفیل‌های مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده

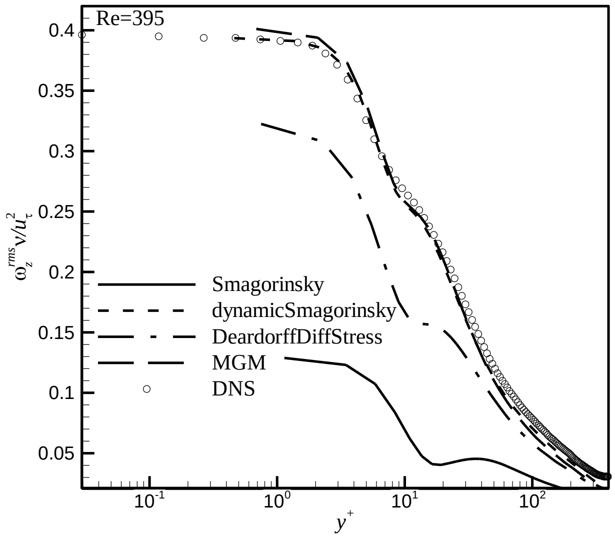

Fig. 10 Profiles of the normalized standard deviation of the spanwise component of vorticity, $\omega_z^{rms}\upsilon/u_\tau^2$

شکل 10 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفهٔ عمقی گردابه

توانسته‌اند موقعیت نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی پروفیل‌های انحراف استاندارد هر سه مولفهٔ بردار گردابه را با دقت بالایی تخمین بزنند.

موین و کیم [32] چندین برهان را برای توجیه کاهش دقت نتایج اغتشاشات گردابه در مقایسه با دقت اغتشاشات سرعت بیان کرده‌اند. آن‌ها خاطر نشان کردند که سهم نسبی مقیاس‌های کوچک در اغتشاشات گردابه به‌طور قابل توجهی بالاتر از اغتشاشات سرعت است. به بیان دیگر، از آن‌جایی که در روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ مقیاس‌های زیرشبکه‌ای به‌طور صریح و مستقیم حل نمی‌شوند، بروز خطاهای بزرگ در محاسبات اغتشاشات گردابه دور از انتظار نیست.

نویسندگان بسیاری در مقالات مشابه، در جستجوی علّت همگرایی هر سه مولفهٔ ω^{rms} به یک مقدار یکسان دور از دیواره‌های کانال، در تمایل مقیاس‌های کوچک به ایزوتروپ بودن در آن ناحیه اتفاق نظر داشته‌اند. از طرفی با توجه به این گفته، دلیل کوچک بودن خطای نسبی در نتایج حاصل در مرکز کانال، مدل‌سازی ساده‌تر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در آن ناحیه خواهد بود.

موزر به همراه موین و کیم [33,32] در مقالات خود از وجود یک مینیمم محلی در ω_x^{rms} در مجاورت دیواره سخن گفته‌اند که با یک ماکزیمم محلی امتداد می‌یابد. توضیحی که برای این رفتار بیان شده است، وجود یک ساختار گردابیِ محوری در نزدیکی دیواره را ترسیم می‌کند که مرکز آن (به‌طور متوسط) در ماکزیمم محلی و لبه‌های آن در مینیمم محلی از ω_x^{rms} قرار گرفته است.

6- نتیجه‌گیری

این پژوهش نتایج شبیه‌سازی جریان کانال آشفته را در عدد رینولدز $\mathrm{Re}_c = 6867$ و عدد رینولدز اصطکاکی $\mathrm{Re}_\tau = 395$ با به‌کارگیری روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در نرم‌افزار اپن‌فوم گردآوری و تحلیل کرده است. از مدل‌های زیرشبکه‌ای اسماگورینسکی، اسماگورینسکی دینامیکی، دییردورف و گرادیانی تنظیم شده در مدل‌سازی مقیاس‌های زیرشبکه‌ای بهره گرفته شد. هدف اصلی از این مطالعه بهبود نتایج مدل گرادیانی تنظیم شده با تصحیح حلگر پیمپل‌فوم بود. در فاز دوم پژوهش، توانایی مدل‌های مختلف مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در بازیابی کمیت‌های مرتبهٔ اول و دوم آشفتگی با شبیه‌سازی جریان کانال آشفته و مقایسهٔ نتایج حاصل با داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم در دستور کار قرار گرفت. طبقه‌بندی داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم برای جریان کانال در اعداد رینولدز مختلف با آشفتگی محدود به دیواره، این جریان را به یک آزمون ایده‌آل بدل کرده است. داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم در عدد رینولدز اصطکاکی $\mathrm{Re}_\tau = 395$، میزان دقت نتایج مدل‌های مختلف آشفتگی را به صراحت آشکار کرده است.

ترسیم پروفیل‌هایی برای یک فهرست گسترده از کمیت‌های آماری تا ممان‌های مرتبهٔ چهارم از مولفه‌های سرعت قسمت عمدهٔ نتایج را شامل می‌شود. همهٔ شبیه‌سازی‌ها بر روی شبکه‌بندی با تقسیمات $80 \times 136 \times 100$ انجام شده و تنها پروفیل متوسط‌گیری شده‌ی مولفهٔ سرعت محوری بی‌بعد برای مدل گرادیانی تنظیم شده با سه شبکهٔ درشت، متوسط و ریز ترسیم شده است. تحلیل نتایج بر روی ارزیابی دقت پروفیل‌های مدل‌های زیرشبکه‌ای مختلف در ارائهٔ ویژگی‌های برجستهٔ کمیت‌های آماری متمرکز شده است. در بیش‌تر نمودارهای ترسیم شده مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و گرادیانی تنظیم شده خطای اندکی را در محاسبات خود ایجاد کرده‌اند و با مؤفقیت داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم را تبعیت کرده‌اند. موقعیت بیشینه و کمینه‌ی کمیت‌های آماری در مجاورت دیواره با مدل‌های زیرشبکه‌ای اسماگورینسکی و دییردورف با دقت پایین و دور از دیواره پیش‌بینی شد. سطح توانایی همهٔ مدل‌های آشفتگی استفاده شده در محاسبهٔ مقادیر انحراف استاندارد از مولفه‌های بردار گردابه به دلیل وابستگی شدید اغتشاشات گردابه به مقیاس‌های کوچک در مقایسه با کمیت‌های آماری مرتبط با سرعت، کاهش یافته است.

7- مراجع

[1] F. Aldudak, *Geometrical Structure of Small Scales and Wall-bounded Turbulence*, PhD Thesis, Technische Universität, Darmstadt, 2012.
[2] J. Smagorinsky, General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment*, *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164, 1963.
[3] J. Deardorff, The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 95, No. 3, pp. 429-438, 1973.
[4] P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction*, Second Edition, pp. 1-553, Verlag Berlin Heidelberg New York: Springer Science & Business Media, 2006.
[5] A. Andren, A. Brown, J. Graf, P. Mason, C. Moeng, F. Nieuwstadt, U. Schumann, Large-eddy simulation of a neutrally stratified boundary layer: A comparison of four computer codes, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 120, No. 520, pp. 1457-1484, 1994.
[6] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Proceeding of JSTOR*, pp. 301-305, 1941.
[7] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, pp. 558-634, New York: Cambridge University Press, Cambrigde, 2000.
[8] H. Versteeg, W. Malalasekera, *An Introduction to Computional Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, Second Edition, pp. 40-211, England: Pearson Education Limited, 2007.
[9] S. Yahya, S. Anwer, S. Sanghi, Performance of different SGS models of LES for low Mach number channel flow, *Procedia Engineering*, Vol. 38, No. 1, pp. 1192-1208, 2012.
[10] D. K. Lilly, A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 4, No. 3, pp. 633-635, 1992.
[11] J. McMillan, J. H. Ferziger, Direct testing of subgrid-scale models, *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 12, pp. 1340-1346, 1979.
[12] P. J. Mason, D. Thomson, Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 242, No. 1, pp. 51-78, 1992.
[13] U. Piomelli, High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 5, No. 6, pp. 1484-1490, 1993.
[14] U. Piomelli, T. A. Zang, C. G. Speziale, M. Y. Hussaini, On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 2, No. 2, pp. 257-265, 1990.
[15] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W. H. Cabot, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765, 1991.

[16] U. Piomelli, W. H. Cabot, P. Moin, S. Lee, Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 3, No. 7, pp. 1766-1771, 1991.

[17] R. D. Moser, J. Kim, N. N. Mansour, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Re= 590, *Physics Fluids*, Vol. 11, No. 4, pp. 943-945, 1999.

[18] S. Khanna, J. G. Brasseur, Analysis of Monin–Obukhov similarity from large-eddy simulation, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 345, No. 1, pp. 251-286, 1997.

[19] A. Juneja, J. G. Brasseur, Characteristics of subgrid-resolved-scale dynamics in anisotropic turbulence, with application to rough-wall boundary layers, *Physics of Fluids (1994-present*), Vol. 11, No. 10, pp. 3054-3068, 1999.

[20] F. Porté-Agel, C. Meneveau, M. B. Parlange, A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: application to a neutral atmospheric boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 415, No. 1, pp. 261-284, 2000.

[21] H. Lu, C. J. Rutland, L. M. Smith, A priori tests of one-equation LES modeling of rotating turbulence, *Journal of Turbulence*, Vol. 8, No. 37, pp. 1-27, 2007.

[22] H. Kobayashi, Y. Shimomura, The performance of dynamic subgrid-scale models in the large eddy simulation of rotating homogeneous turbulence, *Physics of Fluids (1994-present*), Vol. 13, No. 8, pp. 2350-2360, 2001.

[23] K. Horiuti, Transformation properties of dynamic subgrid-scale models in a frame of reference undergoing rotation, *Journal of Turbulence*, Vol. 7, No. 16, pp. 1-27, 2006 .

[24] H. Lu, C. J. Rutland, L. M. Smith, A posteriori tests of one-equation LES modeling of rotating turbulence, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 19, No. 12, pp. 1949-1964, 2008.

[25] R. A. Clark, J. H. Ferziger, W. Reynolds, Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 91, No. 01, pp. 1-16, 1979.

[26] H. Lu, F. Porté-Agel, A modulated gradient model for large-eddy simulation: application to a neutral atmospheric boundary layer, *Physics of Fluids (*1994-*present*), Vol. 22, No. 1, pp. 015109, 2010.

[27] S. Liu, C. Meneveau, J. Katz, On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 275, No. 1, pp. 83-119, 1994.

[28] S. G. Chumakov, *Subgrid Models for Large Eddy Simulation: Scalar Flux, Scalar Dissipation and Energy Dissipation*, Thesis, University Of Wisconsin–Madison, 2005.

[29] A. Leonard, Large-eddy simulation of chaotic convection and beyond, *Proceedings of The 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA paper*, United States of America, Reno, Jan 6-9, 1997.

[30] H. Kobayashi, Y. Shimomura, Inapplicability of the dynamic Clark model to the large eddy simulation of incompressible turbulent channel flows, *Physics of Fluids (1994-present*), Vol. 15, No. 3, pp. L29-L32, 2003.

[31] J. H. Ferziger, M. Peric, A. Leonard, *Computational methods for fluid dynamics*, Third Edition, pp. 39-306, Verlag Berlin Heidelberg New York: Springer Science & Business Media, 2002.

[32] P. Moin, J. Kim, Numerical investigation of turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 118, No. 1, pp. 341-377, 1982.

[33] J. Kim, P. Moin, R. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, No. 1, pp. 133-166, 1987.