سنجش میزان غیرکلاسیک بودن کانال‌های کوانتومی

شاه‌بیگی، فرشته؛ اخترشناس، سیدجواد؛ سربیشه‌ئی، محسن

گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده

در مقاله پیش‌رو کانال‌های کوانتومی را از منظر خاصیت نیمه‌کلاسیکی بررسی کرده‌ایم. با توجه به اثر کانال‌های نیمه‌کلاسیک در از بین بردن خواص کوانتومی حالت‌های ورودی، اهمیت غیرنیمه‌کلاسیک بودن کانال‌ها را مورد توجه قرار داده و سنجه‌ای برای کمی کردن میزان غیرنیمه‌کلاسیکی بودن کانال‌های کوانتومی تعریف کرده‌ایم. در ادامه به عنوان کاربردی از این سنجه، به معرفی توان تولید هم‌بستگی کوانتومی برای کانال‌های کوانتومی پرداخته و آن را با کمیت‌های مشابه که در مقالات دیگر معرفی شده است، مقایسه نموده‌ایم.

Measuring non-classicality of quantum channels

Shahbeigi, Fereshte; Akhtarshenas, Seyed Javad; Sarbishaei, Mohsen

Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract

In this paper we have studied quantum channels from the view of semiclassical property. Regarding that semiclassical channels destroy quantum aspects of input states, we have considered the importance of non-semiclassicality of channels and introduced a measure for quantifying non-semiclassicality of channels. Then as an application of this measure, the creation power of quantum correlation for qubit channels has been presented and we have compared it with its counterparts in other papers.

PACS No. *(11 Times New Roman, italic)*

مقدمه

یکی از ابزارهای قدرتمند و کاربردی مکانیک کوانتومی در بررسی تحول سیستم‌های کوانتومی و بررسی اثر اندازه‌گیری و مطالعه نویزهای محیط روی سیستم‌ها، مبحث کانال‌های کوانتومی است. طبق تعریف، هر نگاشت کاملا مثبت حفظ کننده رد یک کانال کوانتومی می‌باشد. چنانچه خروجی‌های کانال مفروض ε به ازای تمام حالت‌های ورودی، در یک پایه قطری باشند، به این کانال، کانال نیمه‌کلاسیک اطلاق می‌شود. به عبارت دیگر ε یک کانال نیمه‌کلاسیکی است، اگر داشته باشیم:

$$\forall \rho \in S(H): \varepsilon(\rho) = \sum P_k(\rho)|k\rangle\langle k|. \quad (1)$$

در معادله فوق $P_k(\rho)$ –ضرایب وزن– حاوی اطلاعات حالت ورودی و $|k\rangle$ –پایه‌ای که خروجی در آن قطری است– ویژگی کانال کوانتومی ε است.

واضح است که در اثر اعمال کانال نیمه‌کلاسیکی ε، ماتریس‌های چگالی نسبت به پایه $\{|k\rangle\}$ واهمدوس شده و اثرات کوانتومی خود را از دست می‌دهند [1]. به این معنا که حالت‌های خروجی از یک کانال نیمه‌کلاسیکی توسط یک ناظر کلاسیک با اندازه‌گیری در پایه‌های $\{|k\rangle\}$ تمییزپذیر خواهند بود [2]. به عبارتی نتیجه اعمال یک کانال نیمه‌کلاسیک بر حالت‌های کوانتومی تبدیل فضای حالت‌های کوانتومی به فضای حالت‌های کلاسیکی است.

به علاوه در نتیجه مطالعات انجام شده در خصوص ارتباط همدوسی کوانتومی و هم‌بستگی کوانتومی حالت‌ها، می‌توان گفت که هم‌بستگی کوانتومی ورای درهم‌تنیدگی کوانتومی، که به آن ناهم‌خوانی کوانتومی گویند، چیزی جز کمینه همدوسی کوانتومی سیستم دوجزئی نسبت به پایه‌های ضربی محلی نیست [3]. بنابراین دور از ذهن نخواهد بود که کانال‌های نیمه‌کلاسیک به عنوان کانال محلی قادر به تولید هم‌بستگی کوانتومی در یک سیستم دوجزئی نباشند. در مقاله [4] نشان داده شد که شرط لازم و کافی برای کانال محلی ε، به منظور تولید محلی هم‌بستگی کوانتومی در یک سیستم دوجزئی، آن است که کانال، سازگاری حالت‌های زیرسیستمی که بر آن اثر می‌کند را حفظ نکند. حال آنکه کانال‌های نیمه‌کلاسیکی این سازگاری را حفظ کرده و بنابراین در هر بعد دلخواه متناهی یک شرط لازم برای تولید محلی هم‌بستگی کوانتومی غیرنیمه‌کلاسیک بودن کانال‌های کوانتومی است. البته برای تولید هم‌بستگی به شکل محلی در سیستم‌های دو کیوبیتی این شرط لازم (غیرنیمه‌کلاسیک بودن) برای کانال‌ها با اضافه کردن شرط غیریونیتال بودن، شرط لازم و کافی را برآورده می‌کند [5]، در صورتی که در ابعاد بالاتر یونیتال بودن کانال مشکلی در تولید هم‌بستگی کوانتومی ایجاد نمی‌کند [5].

در واقع با توجه به حذف اطلاعات کوانتومی حالت ورودی و از بین بردن همدوسی کوانتومی در نتیجه اعمال کانال نیمه‌کلاسیکی به آسانی می‌توان دید که نه تنها این کانال‌ها قادر به تولید هم‌بستگی کوانتومی به شکل محلی نیستند بلکه اگر سیستم نسبت به زیرسیستمی که کانال بر آن اعمال می‌شود، دارای هم‌بستگی کوانتومی باشد، کانال کوانتومی مفروض ε، این هم‌بستگی را از بین خواهد برد. لذا یکی از ویژگی‌های مهم کانال‌ها در حفظ خواص کوانتومی حالت‌ها، انحراف هر چه بیشتر از ویژگی نیمه‌کلاسیک بودن است و دانستن اینکه کانال تحت چه شرایطی از نیمه‌کلاسیک بودن دور می‌شود حائز اهمیت می‌باشد. سوالی که مطرح می‌شود این است که میزان غیرنیمه‌کلاسیک بودن کانال را چطور بسنجیم؟ در این مقاله به دنبال پاسخ به این سوال، سنجه‌ای برای تعیین میزان غیرنیمه‌کلاسیک بودن کانال‌های کوانتومی تعریف خواهیم کرد.

سنجه میزان غیرنیمه‌کلاسیکی بودن سامانه‌های d بعدی

مطابق با تعریف، کانال‌های نیمه‌کلاسیکی همه حالت‌های ورودی ρ را در یک پایه خاص قطری می‌کنند. اما در کانال‌های غیرنیمه‌کلاسیکی همواره می‌توان دو حالت ρ_1 و ρ_2 را یافت به نحوی که خروجی آنها از کانال به‌طور همزمان قطری پذیر نباشند و بنابراین رابطه $[\varepsilon(\rho_1),\varepsilon(\rho_2)]\neq 0$ برای آنها برقرار است. عدم جابجایی این دو حالت خروجی کانال به این معناست که این حالت‌ها ناسازگاری کوانتومی دارند. ما از این خاصیت در تعریف یک سنجه برای میزان غیرنیمه‌کلاسیکی بودن کانال مفروض ε بهره خواهیم برد. به این منظور کمیت $F^{\varepsilon}_{\rho_1}(\rho_2)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F^{\varepsilon}_{\rho_1}(\rho_2)=\|[\varepsilon(\rho_1),\varepsilon(\rho_2)]\|^2. \qquad (2)$$

در عبارت فوق $\|A\|$ هر نرم دلخواهی است که اندازه جابجاگر را می‌سنجد. البته در حالت عمومی الزامی وجود ندارد که برای کانال غیرنیمه‌کلاسیک ε به ازای هر دو حالت ورودی انتخابی، کمیت فوق مخالف صفر باشد. بنابراین در قدم بعد، از عبارت فوق بر روی تمام ρ_2ها میانگین می‌گیریم که کمیت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$F_{\varepsilon}(\rho_1)=\int F^{\varepsilon}_{\rho_1}(\rho_2)d\mu(\rho_2). \qquad (3)$$

عبارت بالا میانگین میزان ناسازگاری همه حالت‌های خروجی از کانال را نسبت به یک نقطه ثابت (حالت $\varepsilon(\rho_1)$) در فضای حالت‌ها بیان می‌کند. پیداست که این کمیت وابسته به ورودی ρ_1 است. به منظور آنکه سنجه مستقل از مرجع خاصی باشد، از میان تمام نقاط فضای حالت‌های خروجی، حالت بهینه‌ای را برمی‌گزینیم که میزان این ناسازگاری را بیشینه می‌کند. بنابراین در نهایت سنجه میزان غیرنیمه‌کلاسیک بودن کانال ε به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$NS(\varepsilon)=\underset{\rho_1}{Max}\,F_{\varepsilon}(\rho_1). \qquad (4)$$

بهینه‌سازی فوق به شکل بیشینه، علاوه بر تعریف منطقی از سنجه غیرنیمه‌کلاسیکی، به مفهوم آن است که پس از اعمال کانال، به‌طور میانگین بیشینه خواص کوانتومی نسبت به چه پایه‌ای خواهد بود. اگر در تعریف سنجه از نرم‌های کلاس رد استفاده کنیم، خواص زیر به سادگی برای آن اثبات خواهد شد:

- سنجه $NS(\varepsilon)$ کمیتی غیرمنفی بوده و برابر با صفر است، اگر و تنها اگر کانال، نیمه‌کلاسیک باشد.
- سنجه فوق در خاصیت $NS(\varepsilon \circ u) = NS(u \circ \varepsilon) = NS(\varepsilon)$ صدق می‌کند که u یک کانال یکانی دلخواه است.
- با توجه به خاصیت بالا واضح است که $NS(u) = NS(I)$ که منظور از I در آن کانال واحد است.

سنجه غیرنیمه‌کلاسیک بودن در کانال‌های کیوبیتی

با توجه به آنکه اثر یک کانال کوانتومی در سیستم‌های کیوبیتی به شکل تبدیلات آفین بردار بلاخ حالت ورودی تعریف می‌شود، یعنی $\vec{r} \xrightarrow{\varepsilon} \vec{r}' = \Lambda\vec{r} + \vec{t}$، سنجه غیرنیمه‌کلاسیکی در سیستم‌های کیوبیتی با استفاده از نرم هیلبرت–اشمیت، به فرم ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$F_{\rho_1}^{\varepsilon}(\rho_2) = \frac{1}{2}\left|\vec{r'}_1 \times \vec{r'}_2\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\Lambda\vec{r_1} \times \Lambda\vec{r_2} + \Lambda\vec{r_1} \times \vec{t} + \vec{t} \times \Lambda\vec{r_2}\right|^2, \tag{5}$$

$$F_{\varepsilon}(\rho_1) = \frac{3}{4\pi}\int F_{\rho_1}^{\varepsilon}(\rho_2)\, d^3 r_2 , \tag{6}$$

و بنابراین:

$$NS(\varepsilon) = \underset{r_1}{Max}\, F_{\varepsilon}(\rho_1) \cdot \tag{7}$$

که انتگرال‌گیری معادله (6) و بهینه سازی معادله (7) به ترتیب روی پارامترهای (r_2,θ_2,ϕ_2) و (r_1,θ_1,ϕ_1) حالت‌های ρ_2 و ρ_1 صورت می‌گیرد. با اندکی محاسبه نشان داده می‌شود که بیشینه معادله (7) همواره برای یک حالت مرزی رخ می‌دهد و بنابراین همواره می‌توان $r_1 = 1$ را اختیار نمود.

در ادامه با ذکر چند مثال به محاسبه سنجه غیرنیمه‌کلاسیک بودن کانال‌های کوانتومی می‌پردازیم.

مثال یک (کانال‌های یکانی کیوبیتی)

همان‌گونه که قبلا بیان کردیم میزان نیمه‌کلاسیک بودن کانال‌های یکانی با کانال واحد برابر است. برای کانال واحد داریم:

$$\Lambda_I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \vec{t_I} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

بنابراین با استفاده از معادلات (5) تا (7) خواهیم داشت:

$$NS(u) = NS(I) = \frac{1}{5} \cdot$$

مثال دو (کانال‌های وارونی اسپین، وارونی فاز و وارونی اسپین-فاز)

برای کانال‌های وارونی اسپین، وارونی فاز و وارونی اسپین-فاز کمیات Λ و $\vec{t}$ به ترتیب برابر با ماتریس‌های زیر هستند:

$$\Lambda_{b.f} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 \end{vmatrix}, \overrightarrow{t_{b.f}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda_{ph.f} = \begin{vmatrix} 2p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \overrightarrow{t_{ph.f}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda_{b.ph.f} = \begin{vmatrix} 2p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 \end{vmatrix}, \overrightarrow{t_{b.ph.f}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

و مقدار سنجه $NS(\varepsilon)$ برای هر سه کانال فوق از روابط (5) تا (7) برابر است با:

$$NS(\varepsilon_{b.f}) = NS(\varepsilon_{ph.f}) = NS(\varepsilon_{b.ph.f}) = \frac{1}{5}(2p-1)^2 \cdot$$

که برای هر سه کانال با هم برابر است و البته چون این کانال‌ها با یک کانال یکانی به یکدیگر تبدیل می‌شوند، این مسئله مورد انتظار بود.

مثال سه (کانال میرایی دامنه)

کانال میرایی دامنه با ماتریس‌های زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda_{a.d} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}, \overrightarrow{t_{a.d}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

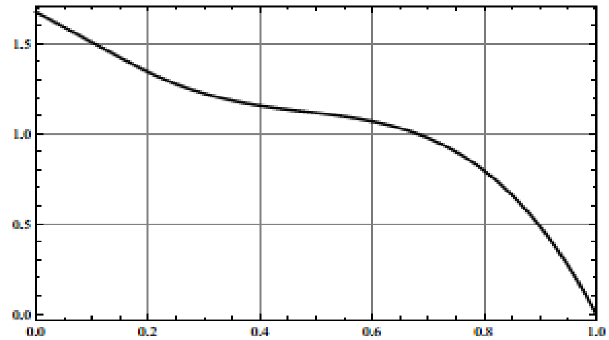
میزان غیرنیمه‌کلاسیک بودن این کانال با استفاده از معادلات (5) تا (7) به ازای $\gamma \geq 1/6$ و $\gamma < 1/6$ به ترتیب برابر است با:

$$NS(\varepsilon_{a.d}) = \frac{(1-\gamma)^3 + 7\gamma^2(1-\gamma) + (1-\gamma)^2}{10} + \frac{4\gamma(1-\gamma)^3}{10(1+4\gamma)}$$

و

$$NS(\varepsilon_{a.d}) = \frac{(1-\gamma)^3 + 7\gamma^2(1-\gamma) + (1-\gamma)^2}{10} + \frac{2\gamma(1-\gamma)^2}{5} - \frac{\gamma(1-\gamma)(1+4\gamma)}{10}.$$

در شکل (1)، $NS(\varepsilon)$ برحسب پارامتر γ نمایش داده شده است.



شکل 1 : نمودار سنجه غیرنیمه‌کلاسیکی بودن کانال میرایی دامنه برحسب γ

توان تولید هم‌بستگی کوانتومی

آنچه تا اینجا بررسی شد، میزان غیرنیمه‌کلاسیک بودن یک کانال روی یک سیستم تک جزئی بود که نوعا می‌تواند معرف میزان حفظ اثرات و ویژگی‌های کوانتومی در فضای حالت‌ها پس از اعمال کانال مفروض ε باشد. اما این رهیافت می‌تواند در مطالعه توانایی کانال‌ها در تولید محلی هم‌بستگی کوانتومی در سیستم‌های دوجزئی نیز به کار رود. چنانچه قبلا ذکر شد در سیستم‌های کیوبیتی کانال‌های کوانتومی قادر به تولید هم‌بستگی کوانتومی، کانال‌های غیریونیتال و غیرنیمه‌کلاسیک هستند. پس اگر بخواهیم توانایی یک کانال در تولید هم‌بستگی کوانتومی به شکل محلی را بیازماییم باید این دو خاصیت را همزمان بررسی کنیم. یونیتال بودن یک کانال به آن معناست که کانال حالت کاملا آمیخته را به حالت کاملا آمیخته بنگارد. حال اگر پس از اعمال کانال کوانتومی مفروض ε میزان ناسازگاری خروجی حالت‌های مختلف را با خروجی حالت کاملا آمیخته در نظر بگیریم، در واقع شرط نیمه کلاسیک بودن و شرط یونیتال بودن را همزمان مطالعه کرده‌ایم. بنابراین با صفر قرار دادن بردار $\vec{r_1}$ در معادلات (5) و (6) و بدون نیاز به بهینه‌سازی معادله (7)، غیرنیمه‌کلاسیک بودن و غیریونیتال بودن مورد آزمون قرار می‌گیرد. لذا می‌توان رابطه زیر را برای توان تولید محلی هم‌بستگی کوانتومی کانال‌های کیوبیتی تعریف کرد:

$$P(\varepsilon)=F_{\varepsilon}\left(\frac{I}{2}\right)=\frac{3}{4\pi}\int F^{\varepsilon}_{\frac{I}{2}}(\rho_2)d^3r_2=\frac{3}{40\pi}\int\left|\vec{t}\times\Lambda\vec{n_2}\right|^2 d\Omega_2 \cdot \quad (8)$$

شایان ذکر است که کمیت فوق تابع یکنوایی از توان تعریف شده برای تولید محلی هم‌بستگی کوانتومی برای یک کانال کیوبیتی است که در مرجع [6] معرفی شده است.

در ادامه، توان کانال‌های مذکور در این مقاله را با معادله (8) محاسبه می‌کنیم.

کانال واحد و کانال‌های یکانی کیوبیتی و هم‌چنین کانال‌های وارونی فاز، وارونی اسپین و وارونی اسپین–فاز کانال‌های یونیتال هستند و انتظار داریم که توان تولید هم‌بستگی برای آنها صفر باشد، کما اینکه با صفر قرار دادن بردار $\vec{t}$ در معادله (8)، توان مذکور صفر به دست می‌آید.

برای کانال میرایی دامنه، میزان توان تولید هم‌بستگی کوانتومی برابر خواهد بود با: $P(\varepsilon_{a.d})=\frac{1}{5}\gamma^2(1-\gamma).$

نتیجه گیری

با توجه به اهمیت حفظ خواص کوانتومی حالت‌ها و نیز تولید و حفظ هم‌بستگی‌های کوانتومی سیستم‌ها در اثر اعمال کانال‌های کوانتومی، در این مقاله به خاصیت نیمه‌کلاسیکی بودن کانال‌های کوانتومی که مخرب اثرات کوانتومی می‌باشد، پرداخته شده است و سنجه‌ای را برای مطالعه فاصله کانال از نیمه‌کلاسیک بودن تعریف کرده‌ایم. واضح است که هرچه کانال میزان غیرنیمه‌کلاسیکی بیشتری داشته باشد، شانس بیشتری برای مشاهده اثرات کوانتومی خواهیم داشت.

سپس با رهیافتی مشابه آنچه در تعریف این سنجه مورد استفاده قرار گرفته است، توانستیم برای کانال‌های کیوبیتی توان تولید هم‌بستگی کوانتومی به شکل محلی به دست آوریم. البته از آنجا که در ابعاد بالاتر، ویژگی کانال‌های کوانتومی قادر به تولید هم‌بستگی کوانتومی به شکل صریح مشخص نشده‌است، تعمیم تعریف توان به ابعاد بالاتر مسئله ساده ای نیست.

مرجع‌ها

[1] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett*. **113**, 140401 (2014).
[2] S. Meznaric, S. R. Clark and A. Datta, *Phys. Rev. Lett*. **110**, 070502 (2013).
[3] T. R. Bromley, M. Cianciaruso and G. Adesso, *Phys. Rev. Lett*. **114**, 210401 (2015).
[4] X. Hu, H. Fan, D. L. Zhou and W. M. Liu, *Phys. Rev. A* **85**, 032102 (2012).
[5] A. Streltsov, H. Kampermann and D. Bruß, *Phys. Rev. Lett*. **107**, 170502 (2011).
[6] T. Abad, V. Karimipour and L. Memarzadeh, *Phys. Rev. A* **86**, 062316 (2012).