زیرجمع‌پذیری قوی و ارتباط آن با هم‌بستگی‌های کوانتومی

تقی‌آبادی ، راضیه[۱] ؛ اخترشناس. سید جواد[۱] ؛ سربیشه‌ای. محسن[۱]

[۱]دانشکده فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، میدان آزادی، مشهد

چکیده

در این مقاله به مطالعه نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی از منظر هم‌بستگی‌های کوانتومی پرداخته‌ایم. نشان داده شده است که اگر به وسیله خالص‌سازی $|\psi_{ABCE}\rangle$ از حالت ρ_{ABC}، میزان درهم‌تنیدگی تشکیل و ناهم‌خونی کوانتومی در زیرسامانه‌های ρ_{AB} و ρ_{AC} تحت تبدیلات $B\to BE$ و $C\to CE$ تغییر نکنند، نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی اشباع می‌گردد. به علاوه اثبات شده است، حالت‌هایی که نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع می‌کنند در رابطه بقا کوانتومی صدق می‌کنند و نامساوی کواشی وینتر را نیز به صورت تساوی برآورده می‌کنند.

Strong subadditivity and its relation with quantum correlations

Razieh Taghiabadi[1], Seyed Javad Akhtarshenas[1], and Mohsen Sarbishaei[1]

[1] Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract

In this paper, we have studied the strong subadditivity inequality from a quantum correlation approach. Considering any purification $|\psi_{ABCE}\rangle$ of ρ_{ABC}, it is shown that if the bipartite quantum correlations of ρ_{AB} and ρ_{AC}, measured by entanglement of formation and quantum discord, do not change under the transformations $B\to BE$ and $C\to CE$, strong subadditivity inequality is saturated. Moreover, along with providing a conservation law for quantum correlations of states for which the strong subadditivity inequality is satisfied with equality, we find that such states coincides with those that the Koashi-Winter monogamy relation is saturated.

PACS No. 03.67.-a, 03.67.Mn, 42.50.-p

مقدمه

هم‌بستگی‌های کوانتومی یا کلاسیک بین زیرسامانه‌های یک سامانه مرکب موجب ایجاد نامساوی بین آنتروپی زیرسامانه‌های مختلف سامانه نسبت به آنتروپی سامانه مرکب می‌شود. برای حالت ρ_{AB} از فضای H_{AB}، که از دو زیرسامانه H_A و H_B تشکیل شده، نابرابری زیرجمع‌پذیری به شکل زیر است [۱]:

$$S(\rho_{AB})\le S(\rho_A)+S(\rho_B). \qquad (۱)$$

در عبارت بالا $\rho_A=Tr_B(\rho_{AB})$ و $\rho_B=Tr_A(\rho_{AB})$ زیرسامانه‌های حالت ρ_{AB} هستند و $S(\rho)=-Tr(\rho Log_2\rho)$ آنتروپی فون‌نیومان است. این نامساوی نشان می‌دهد، آنتروپی سامانه مرکب نمی‌تواند از مجموع آنتروپی زیرسامانه‌ها بزرگ‌تر باشد. این امر بدلیل هم‌بستگی‌هایی است که ممکن است بین اجزاء وجود داشته باشد و تساوی فقط زمانی حاصل می‌شود که سامانه دوبخشی ρ_{AB} جداپذیر باشد [۲] و هیچ هم‌بستگی بین زیرسامانه‌ها وجود نداشته باشد. از اختلاف سمت راست و سمت چپ رابطه ۱، تابع اطلاعات متقابل

$$I(\rho_{AB})=S(\rho_A)+S(\rho_B)-S(\rho_{AB}), \qquad (۲)$$

تعریف می‌شود که میزان کل هم‌بستگی‌های سامانه (کوانتومی و کلاسیکی) را تعیین می‌کند [۳].

برای سامانه‌های سه‌بخشی نامساوی زیرجمع‌پذیری به نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی

$$S(\rho_B)+S(\rho_C)\le S(\rho_{AB})+S(\rho_{AC}), \qquad (۳)$$

گسترش می‌یابد. حال این سوال منطقی است که چه حالت‌هایی این نامساوی را اشباع می‌کنند و این حالت‌ها از منظر هم‌بستگی‌های کوانتومی چه ویژگی‌هایی دارند. برای این منظور تابع $T(\rho_{ABC})$ را به عنوان تابعی که از تفاضل دو طرف نامساوی بدست می‌آید، معرفی می‌کنیم:

$$T(\rho_{ABC})=S(\rho_{AB})+S(\rho_{AC})-S(\rho_B)-S(\rho_C).$$

این تابع میزان انحراف زیرجمع‌پذیری قوی از تساوی را نشان می‌دهد.

در این مقاله به ارائه توصیفی از $T(\rho_{ABC})$ بر حسب درهم‌تنیدگی و ناهم‌خوانی کوانتومی که دو جنبه از هم‌بستگی‌های کوانتومی سامانه‌های مرکب می‌باشند، پرداخته شده است. سنجه‌های متفاوتی برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی یک سامانه مرکب معرفی شده که یکی از مهم‌ترین آنها درهم‌تنیدگی تشکیل می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$E(\rho_{AB})=\min\sum_i p_i E(\psi_i). \qquad (۴)$$

در عبارت بالا $E(\psi_i)=S\left(Tr_B\left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|\right)$ است و مینیمم بر روی تمام تجزیه‌های حالت خالص ممکن از حالت مورد نظر انجام می‌شود. از آنجاکه درهم‌تنیدگی تمام هم‌بستگی‌های کوانتومی حالت‌های آمیخته را توصیف نمی‌کند، سنجه‌های دیگری برای تعیین میزان هم‌بستگی‌های کوانتومی معرفی شده که یکی از مهم‌ترین آنها ناهم‌خوانی کوانتومی است که به شکل زیر تعریف می‌شود[۵]:

$$D^{B}(\rho_{AB})=I(\rho_{AB})-J^{B}(\rho_{AB}), \qquad (۵)$$

که در آن $I(\rho_{AB})$ هم‌بستگی کل سامانه را نشان می‌دهد و از رابطه ۲ به‌دست می‌آید، و $J^{B}(\rho_{AB})$ نیز بیانگر هم‌بستگی کلاسیک سامانه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J^{B}(\rho_{AB})=MAX_{\{\Pi_i^B\}}\left(S(\rho_{AB})-\sum_i S(\rho_{AB}|\Pi_i^B)\right),$$

که Π_i^B عمل‌گرهای برافکنشی روی زیرسامانه B می‌باشد.

در سال ۲۰۰۴ کواشی و وینتر به یک رابطه مونوگامی بین درهم‌تنیدگی تشکیل و ناهم‌خوانی کوانتومی زیرسامانه‌های دوبخشی حالت ρ_{ABC} دست یافتند [۶]:

$$E(\rho_{AB})\le D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C). \qquad (۶)$$

در عبارت بالا $S_{AC}(A|C)$ آنتروپی شرطی زیرسامانه A به شرط اندازه‌گیری روی زیرسامانه C می‌باشد. نشان داده شده است که اگر ρ_{ABC} یک حالت خالص باشد، نامساوی ۶ به شکل تساوی برقرار است. در بخش بعدی نشان می‌دهیم که نامساوی کواشی وینتر به تساوی تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی اشباع شود.

نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی از منظر هم‌بستگی‌های کوانتومی

حالت سه‌بخشی ρ_{ABC} را درنظر بگیرید و فرض کنید که $\left|\psi_{ABCE}\right\rangle$ یک خالص‌سازی از آن باشد که در آن E زیرسامانه کمکی است. برای سادگی $\widetilde{B}=BE$ و $\widetilde{C}=CE$ را تعریف می‌کنیم، به این معناکه $H_{\widetilde{B}}=H_B\otimes H_E$ و $H_{\widetilde{C}}=H_C\otimes H_E$ است. اکنون معادله کواشی وینتر را برای حالت‌های خالص $\rho_{A\widetilde{BC}}$ و $\rho_{AB\widetilde{C}}$ و نیز حالت آمیخته ρ_{ABC} به کار می‌بریم:

$$E(\rho_{AB})=D^{C}(\rho_{A\widetilde{C}})+S_{AC}(A|\widetilde{C}). \qquad (۷)$$

$$E(\rho_{A\widetilde{B}})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C). \qquad (۸)$$

$$E(\rho_{AB})\le D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C). \qquad (۹)$$

می‌توان همین روابط را با تبدیل $B\leftrightarrow C$ بازنویسی کرد که آنها را به ترتیب با (۷′)، (۸′) و (۹′) نشان می‌دهیم. با انجام اندکی محاسبه به قضیه زیر می‌رسیم، که رابطه بین $T(\rho_{ABC})$ و هم‌بستگی‌های کوانتومی را نشان می‌دهد.

قضیه ۱: $T(\rho_{ABC})$ را می‌توان برحسب هم‌بستگی‌های کوانتومی حالت‌های دوبخشی ρ_{AB} ، ρ_{AC} ، $\rho_{A\widetilde{B}}$ و $\rho_{A\widetilde{C}}$ بیان کرد:

$$
\begin{aligned}
&T(\rho_{ABC})\\
&=\left[E(\rho_{A\tilde{B}})-E(\rho_{AB})\right]+\left[D^{\tilde{C}}(\rho_{A\tilde{C}})-D^{C}(\rho_{AC})\right]\\
&=\left[E(\rho_{A\tilde{C}})-E(\rho_{AC})\right]+\left[D^{\tilde{B}}(\rho_{A\tilde{B}})-D^{B}(\rho_{AB})\right] \qquad (۱۰)\\
&=\left[E(\rho_{A\tilde{B}})+E(\rho_{A\tilde{C}})\right]-\left[D^{B}(\rho_{AB})+D^{C}(\rho_{AC})\right]\\
&=\left[D^{\tilde{B}}(\rho_{A\tilde{B}})+D^{\tilde{C}}(\rho_{A\tilde{C}})\right]-\left[E(\rho_{AB})+E(\rho_{AC})\right]
\end{aligned}
$$

اثبات: از تفریق معادله (۷) از (۸) و استفاده از این خاصیت که برای حالت‌های خالص ρ_{XYZ} می‌توان نوشت $S_{XZ}(X|Z)=-S_{XY}(X|Y)$، رابطه اول معادله ۱۰ بدست می‌آید. رابطه دوم نیز از جمع معادله ۸ با '۸ حاصل می‌شود. روابط سوم و چهارم نیز بسادگی از جابه‌جایی $B\leftrightarrow C$ حاصل می‌شود. ■

قضیه ۱ تابع $T(\rho_{ABC})$ را بر حسب مقدار تغییری که در هم‌بستگی‌های کوانتومی زیرسامانه A با هر یک از زیرسامانه‌های B و C (در اثر تبدیل $B\to\tilde{B}$ و $C\to\tilde{C}$) حاصل می‌شود توصیف می‌کند. با استفاده از این قضیه می‌توان دو قضیه زیر را استنتاج کرد.

قضیه۲: حالت ρ_{ABC} نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع می‌کند، اگر و تنها اگر ρ_{ABC} رابطه کواشی وینتر ۶ را اشباع کند؛ به این معنا که $S(\rho_B)+S(\rho_C)=S(\rho_{AB})+S(\rho_{AC})$ بر تساوی

$$E(\rho_{AB})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C),$$

و

$$E(\rho_{AC})=D^{B}(\rho_{AB})+S_{AB}(A|B),$$

دلالت دارد و برعکس.

اثبات: ابتدا فرض کنیم که حالت ρ_{ABC} نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع می‌کند. در این‌صورت داریم:

$$E(\rho_{AB})=E(\rho_{A\tilde{B}}). \qquad (۱۱)$$

از طرفی برای حالت خالص $\rho_{\mathrm{A\tilde{B}C}}$ و حالت آمیخته ρ_{ABC} می‌توان رابطه کواشی وینتر را به‌صورت زیر نوشت:

$$E(\rho_{AB})\le D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C). \qquad (۱۲)$$

$$E(\rho_{A\tilde{B}})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C). \qquad (۱۳)$$

از معادلات ۱۱، ۱۲ و ۱۳ به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که

$$E(\rho_{AB})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C).$$

با تبدیل $B\leftrightarrow C$ می‌توان رابطه

$$E(\rho_{AC})=D^{B}(\rho_{AB})+S_{AB}(A|B),$$

را نیز بدست آورد. اکنون برای اثبات عکس قضیه فرض می‌کنیم که حالت ρ_{ABC} رابطه کواشی وینتر را اشباع می‌کند. با نوشتن رابطه کواشی وینتر برای حالت آمیخته ρ_{ABC} و حالت خالص $\rho_{\mathrm{A\tilde{B}C}}$ داریم:

$$E(\rho_{AB})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C).$$
$$E(\rho_{A\tilde{B}})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C).$$

با توجه به این که طرف راست دو معادله بالا با هم برابر است می‌توان نتیجه گرفت $E(\rho_{AB})=E(\rho_{A\tilde{B}})$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $E(\rho_{AC})=E(\rho_{A\tilde{C}})$. با استفاده از این دو رابطه می‌توان ناوردایی ناهم‌خوانی کوانتومی حالت‌های ρ_{AB} و ρ_{AC} را تحت تبدیل $B\to\tilde{B}$ و $C\to\tilde{C}$ نشان داد [۷]. با استفاده از این نتایج در قضیه ۱ به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که برای این حالت‌ها نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی اشباع میشود. ■

در مرجع [۸] نشان داده شده است که اگر ρ_{ABC} یک حالت خالص باشد، در این‌صورت رابطه زیر که به رابطه بقا کوانتومی موسوم است برقرار می‌باشد:

$$\left[E(\rho_{AB})+E(\rho_{AC})\right]=\left[D^{B}(\rho_{AB})+D^{C}(\rho_{AC})\right]. \qquad (۱۴)$$

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که برای هر حالت ρ_{ABC} که نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع کند، رابطه بقا برقرار است.

قضیه ۳: هر حالت ρ_{ABC} که نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع می‌کند، در قانون بقا کوانتومی (رابطه ۱۴) صدق می‌کند.

اثبات: در قضیه ۲ نشان دادیم که هر حالت ρ_{ABC} که نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع کند، رابطه کواشی وینتر را نیز اشباع می‌کند، یعنی:

$$E(\rho_{AB})=D^{C}(\rho_{AC})+S_{AC}(A|C).$$
$$E(\rho_{AC})=D^{B}(\rho_{AB})+S_{AB}(A|B).$$

از جمع دو رابطه بالا داریم:

$$[E(\rho_{AB})+E(\rho_{AC})]=[D^{B}(\rho_{AB})+D^{C}(\rho_{AC})]+T(\rho_{ABC}),$$

که از شرط $T(\rho_{ABC})=0$ به سادگی قضیه اثبات می‌شود. ■

در ادامه، برای روشن کردن قضایای بالا به مطالعه یک مثال می‌پردازیم.

مثال

حالت آمیخته زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho_{ABC}=p_1\left|\psi_A^1\right\rangle\left\langle\psi_A^1\right|\otimes\rho_{BC}^1+p_2\left|\psi_{AB}^2\right\rangle\left\langle\psi_{AB}^2\right|\otimes\rho_C^2$$

که $p_1+p_2=1$ است. با فرض $\dim H_A=2$ و $\dim H_B=\dim H_c=4$، حالت‌های خالص $\left|\psi_A^1\right\rangle$ و $\left|\psi_{AB}^2\right\rangle$ و حالت‌های آمیخته ρ_{BC}^1 و ρ_C^2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left|\psi_A^1\right\rangle=\alpha_1\left|0_A\right\rangle+\beta_1\left|1_A\right\rangle,$$

$$\left|\psi_{AB}^2\right\rangle=\alpha_2\left|0_A0_B\right\rangle+\beta_2\left|1_A1_B\right\rangle,$$

$$\rho_{BC}^1=\lambda_1\left|2_B2_C\right\rangle\left\langle2_B2_C\right|+(1-\lambda_1)\left|3_B3_C\right\rangle\left\langle3_B3_C\right|,$$

$$\rho_{BC}^1=\lambda_1\left|2_B2_C\right\rangle\left\langle2_B2_C\right|+(1-\lambda_1)\left|3_B3_C\right\rangle\left\langle3_B3_C\right|,$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که حالت ρ_{ABC} نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع می‌کند. بنابر قضیه ۲، این حالت رابطه کواشی وینتر را نیز اشباع می‌کند. با استفاده از این حقیقت می‌توان به راحتی درهم‌تنیدگی تشکیل و ناهم‌خوانی کوانتومی را برای زیرسامانه ρ_{AB} که یک حالت 2×4 است محاسبه کرد. از آنجاکه

$$\rho_{AC}=p_1\left|\psi_A^1\right\rangle\left\langle\psi_A^1\right|\otimes\rho_C^1+p_2\sigma_A^2\otimes\rho_C^2,$$

و

$$\sigma_A^2=\alpha_2^2\left|0_A\right\rangle\left\langle0_A\right|+\beta_2^2\left|1_A\right\rangle\left\langle1_A\right|,$$

است و با توجه به اینکه $\rho_C^1\perp\rho_C^2$ است، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت:

$$E(\rho_{AC})=D^{C}(\rho_{AC})=0.$$

در نتیجه با استفاده از قضیه ۲ درهم‌تنیدگی تشکیل و ناهم‌خوانی کوانتومی زیرسامانه ρ_{AB} به راحتی بدست می‌آید:

$$E(\rho_{AB})=D^{B}(\rho_{AB})=S_{AC}(A|C).$$

همچنین با استفاده از قضیه ۱ به راحتی نتیجه می‌گیریم که

$$E(\rho_{A\tilde{B}})=D^{\tilde{B}}(\rho_{A\tilde{B}})=S_{AC}(A|C).$$

نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی از منظر هم‌بستگی‌های کوانتومی پرداخته‌ایم و نشان داده‌ایم که چنانچه برای یک سامانه سه‌بخشی ρ_{ABC} درهم‌تنیدگی تشکیل و ناهم‌خوانی کوانتومی زیرسامانه‌های ρ_{AB} و ρ_{AC} در اثر تبدیل $B\to\tilde{B}$ و $C\to\tilde{C}$ تغییر نکنند، نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی اشباع می‌گردد. سپس اثبات شده است که این حالت‌ها نامساوی کواشی وینتر را نیز به صورت تساوی برآورده می‌کنند. این قضیه دامنه حالت‌هایی را که برای آن‌ها رابطه کواشی وینتر به شکل تساوی برقرار است گسترش می‌دهد. با توجه به اینکه از تساوی رابطه کواشی وینتر می‌توان ناهم‌خوانی کوانتومی حالت‌هایی که درهم‌تنیدگی تشکیل حالت‌های مکمل آن‌ها معلوم است را به سادگی محاسبه کرد، لذا نتایج این مقاله می‌تواند گامی به جلو در محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی محسوب شود. افزون بر این نشان داده‌ایم که حالت‌هایی که نامساوی زیرجمع‌پذیری قوی را اشباع می‌کنند در نوعی رابطه بقا کوانتومی نیز صدق می‌کنند.

مرجع‌ها

[۱] A. Wehrl, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).

[۲] I. Bengtsson and K. ˙ Zyczkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006).

[۳] M. Nielsen and I. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010).

[۴] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).

[۵] H. Ollivier andW. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).

[۶] M. Koashi and A. Winter, Phys. Rev. A **69**, 022309 (2004).

[۷] R.Taghiabadi, Seyed Javad Akhtarshenas, and Mohsen Sarbishaei, Phys. Rev. A **95**, 032315 (2017).

[۸] F. F. Fanchini, M. F. Cornelio, M. C. de Oliveira, and A. O. Caldeira, Phys. Rev. A **84**, 012313 (2011).