

## بررسی تحول درهم‌تنیدگی اتم‌ها در دو کاواک تک مد مجزا

آرامی، نیلوفر<sup>۱</sup>؛ جاویدان، کوروش<sup>۱</sup>؛ نظیف کار، سمیرا<sup>۲</sup>؛ جاقوری، حکیمه<sup>۱</sup><sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد<sup>۲</sup> گروه فیزیک، دانشگاه نیشابور

## چکیده

سیستمی با دو کاواک تک مد دور در نظر بگیرید که با یک فیبر اپتیکی به هم وصل شده اند و چندین اتم دو ترازه در کاواک‌ها محبوس شده‌اند. در این تحقیق، با این فرض که اتم‌ها به با میدان کاواک به صورت موضعی برهم‌کنش کنند و هیچ برهم‌کنش مستقیمی بین اتم‌ها وجود نداشته باشد، تحول این سیستم فیزیکی بررسی و تحول درهم‌تنیدگی نشان داده شده است.

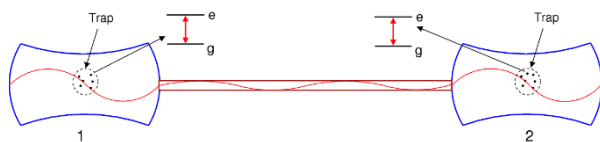
## Evolution of entanglement of atoms in two independent single mode cavity

Arami, Niloufar<sup>1</sup>; Javidan, Kurosh<sup>1</sup>;  
Nazifkar, Samira<sup>2</sup>; Jaghouri, Hakimeh<sup>1</sup><sup>1</sup> Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, 91775-1436, Mashhad, Iran<sup>2</sup> Department of Physics, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran

## Abstract

We consider a system with two independent single mode cavity they connected to each other with an optical fiber. Several atoms are located in cavities. Atoms interact with local cavity field and there is no direct interaction between atoms. We study evolution of this system and investigate the Evolution of entanglement.

یک فیبر اپتیکی به هم متصل هستند. در این مدل اتم‌ها با میدان کاواک به صورت موضعی برهم‌کنش می‌کنند. فرض می‌شود که اندازه فضای اشغال شده توسط اتم‌ها در هر یک از کاواک‌ها کوچک‌تر از طول موج میدان داخل کاواک است. بنابراین همه اتم‌ها در هر کاواک میدان یکسانی را می‌بینند. یادآوری می‌کنیم که اتم‌ها در هر کاواک کاملاً جدا از هم هستند و آنها هیچ برهم‌کنش مستقیمی با هم ندارند.



شکل ۱. چندین اتم دو ترازه در دو کاواک اپتیکی<sup>۳</sup> تک مدی مجزا، محبوس شده‌اند که با یک فیبر اپتیکی به هم متصل هستند. اپراتورهای بالابرنده و پایین‌برنده برای اتم‌ها در کاواک  $j$  (  $j=1,2$  ) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

## مقدمه

کامپیوترهای کوانتومی ابزاری برای کارهای محاسباتی هستند. شور<sup>۱</sup> نشان داد که یک کامپیوتر کوانتومی می‌تواند تجزیه ی اعداد مرکب بزرگ به اعداد اول را فقط در چند ثانیه انجام دهد. گراور<sup>۲</sup> یک الگوریتم کوانتومی کشف کرد که یک عدد را بین داده‌های اولیه ی نامرتب، سریع‌تر از هر الگوریتم کلاسیکی جستجو می‌کند. برای ساختن یک کامپیوتر کوانتومی که می‌تواند برای حل مسایل کاربردی استفاده شود، باید تعداد زیادی از کیوبیت‌ها مثل اتم‌های درگیر شده یا یون‌ها را کنار هم چید.

## مدل

همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، چندین اتم دو ترازه در دو کاواک اپتیکی تک مدی مجزا، محبوس شده‌اند که با

<sup>1</sup> Shor<sup>2</sup> Grover

$$N = N_{1+} + N_{1-} + a_1^\dagger a_1 + a_1 a_1^\dagger + b^\dagger b \quad (6)$$

که  $N_{j+}$  اپراتور تعداد اتم ها در حالت برانگیخته در کاواک  $j$  ام است. به وضوح دیده می شود که اپراتور برانگیختگی با هامیلتونی جا به جا می شود. بنابراین عدد برانگیختگی ثابت حرکت می باشد. فرض می شود که  $N$  اتم دوترانه، در هر کدام از کاواک ها محبوس شد اند. حالت  $|0, N\rangle_j$  بیانگر این می باشد که  $N$  اتم در کاواک  $j$  ام در حالت پایه هستند و حالت  $|1, N-1\rangle_j$  نشان می دهد که در کاواک  $j$  ام تنها یک اتم در حالت برانگیخته است.

تحول زمانی سیستم کل از معادله شرودینگر تبعیت می کند [۳]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (7)$$

سیستم فیزیکی بر اساس بردار های پایه زیر توصیف می شود

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= |000\rangle_f |0, N\rangle_1 |1, N-1\rangle_2 \\ |\phi_2\rangle &= |000\rangle_f |1, N-1\rangle_1 |0, N\rangle_2 \\ |\phi_3\rangle &= |001\rangle_f |0, N\rangle_1 |0, N\rangle_2 \\ |\phi_4\rangle &= |010\rangle_f |0, N\rangle_1 |0, N\rangle_2 \\ |\phi_5\rangle &= |100\rangle_f |0, N\rangle_1 |0, N\rangle_2 \\ |\phi_6\rangle &= |000\rangle_f |0, N\rangle_1 |0, N\rangle_2 \end{aligned} \quad (8)$$

که  $|n_1, n_2, n_f\rangle_f$  حالت میدان را با  $n_1$  فوتون در مد کاواک ۱،  $n_2$  فوتون در مد کاواک ۲ و  $n_f$  فوتون در مد فیبر را نشان می دهد.  $|N_{j+}, N-N_{j+}\rangle_j$  حالت اتم ها در کاواک  $j$  ام را نشان می دهد در این جا  $N_{j+}$  بیانگر تعداد اتم ها در حالت برانگیخته و  $N-N_{j+}$  تعداد اتم ها در حالت پایه را بیان می کند.

حالت سیستم کل با برحسب بردارهای پایه بسط داده شود:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^6 C_i(t) |\phi_i\rangle \quad (9)$$

با جایگذاری این فرمول در معادله شرودینگر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(t) = \sum_{j=1}^6 H_{ij} C_j(t) \quad (10)$$

که  $H_{ij}$  عناصر ماتریس برای هامیلتونی است.

$$J_j^\pm = \sum_{i=1}^{N_j} \sigma_j^\pm(i) \quad (1)$$

که  $N_j$  تعداد اتم ها در کاواک  $j$  ام است. عملگرهای  $\sigma_i^+(j) = (\sigma_i^-(j))^\dagger$  و  $\sigma_i^-(j) = |g_i\rangle\langle e_i|$  در کاواک  $j$  ام، به ترتیب عملگرهای پایین برنده و بالابرنده هستند که حالت پایه اتم با  $|g\rangle$  و حالت برانگیخته آن با  $|e\rangle$  نشان داده می شود. در تقریب موج چرخان، هامیلتونی برهم کنش سیستم اتم-میدان به صورت زیر نوشته می شود

$$H_{IF} = \sum_{j=1}^2 (g_j J_j^- a_j^\dagger + h.c) \quad (2)$$

که  $a_j^\dagger$  عملگر خلق فوتون در کاواک تک مد  $j$  ام و  $g_j$  ثابت جفت شدگی بین مد کاواک  $j$  ام و اتم های محبوس شده در آن می باشد.

جفت شدگی بین میدان های کاواک و فیبر می تواند با هامیلتونی برهم کنشی زیر توصیف شود [۱]:

$$H_{IF} = \sum_{j=1}^{\infty} v_j [b_j (a_1^\dagger + (-1)^j e^{i\varphi} a_2^\dagger) + h.c] \quad (3)$$

که  $b_j$  عملگر نابودی فوتون در مد  $j$  ام فیبر و  $v_j$  قدرت جفت شدگی بین مد کاواک با مد  $j$  ام فیبر می باشد. اختلاف فاز  $\varphi$  ناشی از انتشار میدان در فیبر با طول  $L$  می باشد ( $\varphi = 2\pi\omega L/c$ ) (در حد فیبر های کوتاه ( $2L\bar{v}/2\pi c \leq 1$ ), که  $L$  طول فیبر و  $\bar{v}$  آهنگ واپاشی میدان های کاواک به علت برهمکنش با مدهای فیبر است، تنها یک مد نوسانی  $b$  از فیبر با مدهای کاواک برهم کنش می کند. بنابراین با توجه به این تقریب هامیلتونی  $H_{IF}$  می تواند به این صورت بیان کرد [۲]:

$$H_{IF} = v [b(a_1^\dagger + a_2^\dagger) + h.c] \quad (4)$$

که فاز  $\varphi$  در عملگر های خلق و نابودی مد میدان کاواک دوم ادغام شده است.

در تصویر برهم کنش، هامیلتونی کل سیستم اتم-کاواک-فیبر به صورت زیر توصیف می شود

$$H = \sum_{j=1}^2 (g_j J_j^- a_j^\dagger + h.c) + v [b(a_1^\dagger + a_2^\dagger) + h.c] \quad (5)$$

و عملگر برانگیختگی را به صورت زیر معرفی می گردد

$$i \frac{\partial}{\partial t} SC(t) = SHS^{-1} SC(t) \quad (15)$$

$$C(t) = [C_1(t), C_2(t), C_3(t), C_4(t), C_5(t), C_6(t)]^T \quad \text{که}$$

ضرایب بسط بردار حالت است. با توجه به قطری بودن ماتریس  $SHS^{-1}$  حل عمومی معادله (۷) به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$C_i(t) = \sum_{k=1}^6 [s^{-1}]_{jk} [sc(0)]_k e^{-iE_k t} \quad (16)$$

حالت ابتدایی را به صورت ماکزیمم درهم تنیده بین اتم‌های دو

کاواک، به شکل زیر در نظر می‌گیریم و هم‌چنین فرض می‌شود،

میدان هر دو کاواک و فیبر در ابتدا در حالت  $|000\rangle_f$  هستند.

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0, 0, 0, 0]^T \quad (17)$$

با توجه به اینکه عملگر تحول زمانی به صورت

$$\exp(-itH)$$

$$\Psi(t) = U(t)|000\rangle_f \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) = \\ C_1(t)|\phi_1\rangle + C_2(t)|\phi_2\rangle + C_3(t)|\phi_3\rangle + C_4(t)|\phi_4\rangle + C_5(t)|\phi_5\rangle + C_6(t)|\phi_6\rangle \quad (18)$$

که ضرایب برابر هستند با

$$C_1(t) = -\frac{\sqrt{2} \left( \cos(\sqrt{Ng^2 + 2v^2}t) + 2r^2 \right)}{2a(1+2r^2)^{3/2}}, \\ C_2(t) = -\frac{\sqrt{2} \left( \cos(\sqrt{Ng^2 + 2v^2}t) + 2r^2 \right)}{2a(1+2r^2)^{3/2}}, \quad (19)$$

$$C_3(t) = -\frac{i\sqrt{2} \sin(\sqrt{Ng^2 + 2v^2}t)}{2\sqrt{1+2r^2}}$$

$$C_4(t) = -\frac{r\sqrt{2} \left( \cos(\sqrt{Ng^2 + 2v^2}t) - 1 \right)}{a(1+2r^2)^{3/2}},$$

$$C_5(t) = -\frac{i\sqrt{2} \sin(\sqrt{Ng^2 + 2v^2}t)}{2\sqrt{1+2r^2}},$$

$$C_6(t) = 0.$$

ماتریس چگالی برابر است با  $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$  بعد از رد

گرفتن روی حالت‌های میدان، ماتریس چگالی کاهش یافته به

شکل زیر به دست می‌آید.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{N}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{N}g & 0 \\ \sqrt{N}g & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & \nu & 0 \\ 0 & \sqrt{N}g & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

که فرض شده است  $g_1 = g_2 = g$ . ویژه مقادیر ماتریس هامیلتونی

برابر است با:

$$E_{1,6} = 0, E_2 = g, E_3 = -g, E_4 = \sqrt{Ng^2 + 2v^2}, \quad (12)$$

$$E_5 = \sqrt{Ng^2 + 2v^2}$$

و ویژه بردارهای متناظر با این ویژه مقادیر به صورت زیر است که

در روابط زیر  $r = \frac{\nu}{\sqrt{N}g}$  در نظر گرفته شده است.

$$|\Psi_1\rangle = -\frac{r}{\sqrt{1+2r^2}}|\phi_1\rangle - \frac{r}{\sqrt{1+2r^2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{1+2r^2}}|\phi_4\rangle \\ |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}|\phi_1\rangle - \frac{1}{2}|\phi_2\rangle - \frac{1}{2}|\phi_3\rangle + \frac{1}{2}|\phi_5\rangle \\ |\Psi_3\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle - \frac{1}{2}|\phi_3\rangle + \frac{1}{2}|\phi_5\rangle \\ |\Psi_4\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle - \frac{r}{\sqrt{1+2r^2}}|\phi_4\rangle + \frac{1}{2}|\phi_5\rangle \\ |\Psi_5\rangle = \frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle + \frac{r}{\sqrt{1+2r^2}}|\phi_4\rangle + \frac{1}{2}|\phi_5\rangle \\ |\Psi_6\rangle = |\phi_6\rangle \quad (13)$$

ماتریس تبدیل یکانی  $S$  که هامیلتونی را قطری می‌کند به صورت

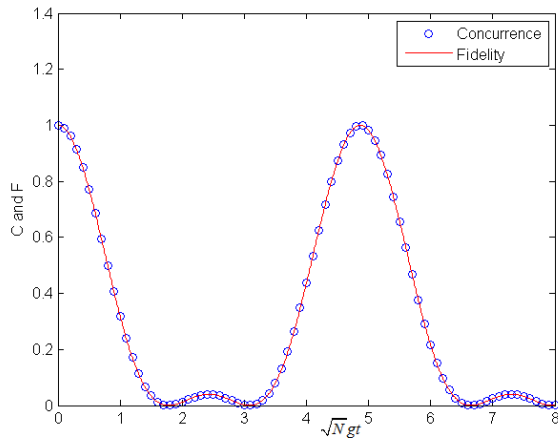
زیر است

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+2r^2}} & -\frac{r}{\sqrt{1+2r^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+2r^2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}} & -\frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}} & \frac{1}{2} & -\frac{r}{\sqrt{1+2r^2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}} & \frac{1}{2\sqrt{1+2r^2}} & \frac{1}{2} & \frac{r}{\sqrt{1+2r^2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

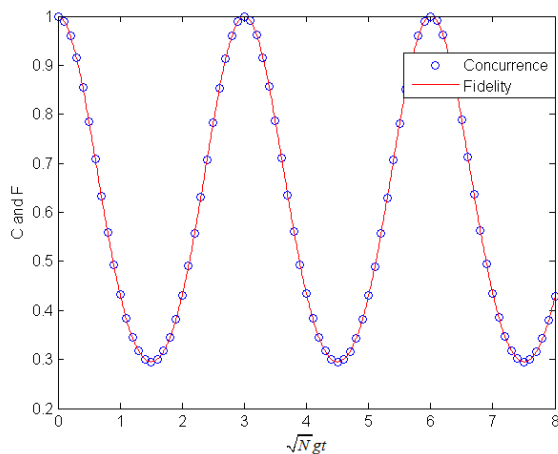
با استفاده از ماتریس تبدیل  $S$  معادله (۷) به صورت فشرده زیر

نوشته می‌شود:

به این معنا است که تعداد اتم‌ها کم است و یا جفت‌شدگی بین اتم‌ها و کاواک از جفت‌شدگی بین کاواک و فیبر کمتر است (  $r = 1.3$  ) شکل ۳. با این فرض کشیده شده است.



شکل ۲. تحول وفاداری و توفاق در  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$



شکل ۳. تحول وفاداری و توفاق در  $r = 1.3$

نکته‌ی بسیار قابل توجه صفر نشدن معیارها به‌ازای برخی مقادیر  $\Gamma$  که در این جا  $r = 1.3$  می‌باشد درحالی‌که برای برخی مقادیر  $\Gamma$  که در این جا  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$  می‌باشد، درهم‌تیدگی در بعضی زمان‌ها از بین رفته و بیشینه نسبی نیز دیده می‌شود.

### مرجع‌ها

- [۱] T. Pellizzari, Phys. Rev. Lett 79, 5242 (1997).  
 [۲] A. Serafini, S. Mancini, and S. Bose, Phys. Rev. Lett. 96, 010503 (2006).  
 [۳] Yin, Zhang-qi, and Fu-li Li. "Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber." Physical Review A 75.1 (2007): 012324.  
 [۴] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K.: Quantum entanglement. Rev. Mod. Phys. ۸۱, ۸۶۵ (۲۰۰۹)

$$\rho_{AA}(t) = Tr_f(|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C_1(t)|^2 & C_1^*(t)C_2(t) & C_1^*(t)C_6(t) \\ 0 & C_1(t)C_2^*(t) & |C_2(t)|^2 & C_2^*(t)C_6(t) \\ 0 & C_1(t)C_6^*(t) & C_2(t)C_6^*(t) & 1 - |C_1(t)|^2 - |C_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

### اندازه گیری درهم‌تیدگی

یکی از معیارهای اندازه گیری درهم‌تیدگی دو جزئی میان دو کیوبیت معیار توفاق<sup>۳</sup> است. اگر  $\rho_{AB}$ ، ماتریس چگالی سیستمی را توصیف کند که شامل کیوبیت های A و B است و  $\lambda_i$   $i=1,2,3,4$  ویژه مقادیر مثبت به ترتیب نزولی ماتریس  $\rho_{AB}\hat{\rho}_{AB}$  باشند که [۴]:

$$\hat{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (21)$$

معیار توفاق از رابطه زیر به دست می‌آید

$$C_{AB} = \max \left\{ \left[ \sqrt{\lambda_1} - \sum_{i=2}^4 \sqrt{\lambda_i}, 0 \right] \right\}. \quad (22)$$

تحول زمانی معیار توفاق برای ماتریس چگالی  $\rho_{AA}(t)$  در شکل ۲ و ۳ آمده است. معیار وفاداری را برای ماتریس چگالی تحول یافته نسبت به حالت ابتدایی که حالتی با بیشینه درهم‌تیدگی می‌باشد، محاسبه شده است. نتایج در شکل‌ها آمده است.

### نتیجه گیری

نکته جالب توجه این است که شکل‌ها تطابق کامل معیارهای توفاق و وفاداری را نشان می‌دهند.

در این‌جا  $r = \frac{v}{\sqrt{N}g}$  اگر  $r < 1$  فرض شود به این معنا است که تعداد اتم‌ها زیاد است و یا جفت‌شدگی بین اتم‌ها و کاواک از جفت‌شدگی بین کاواک و فیبر بیشتر است (  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ) شکل ۲. با این فرض کشیده شده است. حالت دوم اگر  $r > 1$  فرض شود

<sup>3</sup> concurrence