



استخراج پاسخ دینامیکی غیرخطی اتصالات فلنجی تحت بارگذاری خمشی

فرهاد میثمی^۱، مجید معاونیان^{۲*} و عارف افشارفرد^۳^۱ دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد^۲ دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد^۳ استادیار، دانشگاه فردوسی مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۶/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۰۵

چکیده

اتصالات فلنجی از پرکاربردترین نوع اتصال سازه‌ای هستند. از این‌رو مطالعه رفتارهای استاتیکی و دینامیکی آن‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مقاله مدلی شامل، تیرهای متصل شده بوسیله اتصال فلنجی تک پیچ، مطالعه شده است. سپس مدل معادلی شامل فنرهای غیرخطی برای آن منظور شده است. با نوشتن معادلات تیرها و بکارگیری شرایط مرزی و سازگاری مناسب، معادلات دینامیکی مجموعه به‌دست آمده است. با فرض خطی بودن فنرهای معادل، فرکانس‌ها و شکل مودهای خمشی سیستم به ازای مقادیر مختلف سختی اتصال استخراج گردیده است. با به‌کارگیری روش جمع مودها، معادله یک درجه آزادی با سختی غیرخطی بدست می‌آید. به کمک روش برازش منحنی سختی غیرخطی با چندجمله‌ای معادل جایگزین شده است. با استفاده از روش‌های اغتشاشات، معادله غیرخطی به‌دست آمده حل و پاسخ نوسانات آزاد و اجباری در مجاورت فرکانس طبیعی پایه و رزونانس‌های سوپرهارمونیک و زیرهارمونیک به‌دست آمده است. در بخش نتایج حل عددی معادله دوخطی و معادله شامل چندجمله‌ای مفروض با حل تحلیلی-تقریبی روش‌های اغتشاشات، مقایسه شده است. مطابقت مشاهده شده بین نتایج در این مقایسه نشان از صحت تخمین چندجمله‌ای و حل تحلیلی-تقریبی آن دارد. در پایان مقایسه‌ای بین پاسخ فرکانسی به‌دست آمده به روش عددی و پاسخ به‌دست آمده از روش چندمقیاسی صورت گرفته است.

کلمات کلیدی: اتصال فلنجی؛ مدل تیر؛ سختی دوخطی؛ پاسخ دینامیکی؛ روش اغتشاشات.

An Investigation for Nonlinear Dynamic Behavior of Flange Joints Under Lateral Loading

F. Meisami¹, M. Moavenian^{2,*}, A. Afsharfard³¹ Ph.D. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran² Assoc. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran³ Asist. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran

Abstract

Flange joints are one of the most widely used industrial and aerospace connection parts. Therefore, investigating the static and dynamic behavior of these joints is important. In this study, a model consisting of two beams connected by a single bolt flange joint is intended. Then a mass-spring model consisting of linear axial and nonlinear torsional springs is considered. Dynamic equations of the system are derived considering the beam equations, boundary conditions and compatibility equations. Assuming equivalent linear springs, bending frequencies and mode shapes for several joint stiffness are obtained. Using mode superposition method and approximating the first mode, the dynamic equation is converted to a 1-DOF nonlinear stiffness equation. Curve approximation method is used to describe the nonlinear stiffness with equivalent polynomial equation. Then perturbation method is used to solve the nonlinear equation of free and forced vibrations, near natural frequencies, subharmonic and super harmonic regions. The numerical solution result of the bilinear and its equivalent polynomial equation is compared with the the perturbation method results. Accuracy of the results obtained by the polynomial approximation and perturbation solution is guaranteed by conformity of numerical and semi-analytical results. Finally, frequency response, which is obtained by the numerical and multiple scale methods is compared.

Keywords: Flange Joints; Beam Model; Bilinear Stiffness; Dynamic Response; Perturbation Method.

۱- مقدمه

اتصالات فلنجی در زمره اتصالات پر کاربرد قرار گرفته و با استفاده از پیچ یا پرچ برای اتصال قطعات مختلف در صنایع یا سازه‌های زمینی، هوایی و دریای بکار می‌روند. این اتصالات عمدتاً در پیکربندی دایروی مشاهده می‌شود؛ اما پیکربندی‌هایی مانند مستطیلی نیز، کاربرد خاص خود را دارا است [۱]. از جمله مواردی که کاربرد این اتصالات را نشان می‌دهد، می‌توان به اتصال قسمت‌های بدنه هواپیما، برج‌های نیروگاه، مخازن موشک و پوسته موتور جت اشاره کرد [۲-۵].

در بسیاری از پژوهش‌های پیشین، رفتار این اتصال را صلب فرض کرده، سپس نسبت به حل مسئله اقدام شده است [۶]؛ این در حالی است که پژوهش‌های بعدی نشان دادند که این فرضیه تخمینی از انعطاف‌پذیری اتصال ارائه نمی‌دهد [۷]؛ اما یک بررسی دقیق‌تر نشان می‌دهد که بهتر است برای حل مسائل، اتصال را با سختی و میرایی معادل جایگزین کرد [۸]؛ لذا بایستی پیش از اقدام برای استخراج پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی سازه‌های دارای این نوع اتصال، نسبت به شناسایی پارامترهای معادل اقدام کرد. ازجمله اولین پژوهش‌ها در این حوزه، در سال ۱۹۸۵ توسط آگاتونویچ به‌منظور ارائه مدلی بر پایه المان تیر برای اتصال فلنجی صورت گرفت [۹]. این مدل از یک عدد پیچ و لبه اتصال زیر آن تشکیل شده بود و که به‌وسیله روش اجزای محدود، مورد تحلیل قرار گرفته بود. وی با استفاده از نتایج این مدل، نسبت به بررسی تغییر شکل‌ها در یک فلنج مدور اقدام کرد. شای و همکاران در سال ۱۹۹۶، مدلی برای اتصال صفحه انتهایی^۱ ارائه کردند که تغییر شکل آن را تحت گشتاور نشان می‌داد [۱۰]. آن‌ها اتصال با شش پیچ را به تعدادی اتصال تک‌پیچ تبدیل کرده، مدلی بر پایه المان تیر برای تغییر شکل‌های آن‌ها ارائه کردند. با متصل نمودن این اتصالات تک‌پیچ به یکدیگر، مدل مجموعه صفحه انتهایی به‌دست آمده است. سمکه و همکاران در سال ۲۰۰۲، پاسخ دینامیکی یک اتصال فلنجی دارای واشر لاستیکی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۱ و ۱۲]. این مؤلفان در سال ۲۰۰۶، پژوهش جامع‌تری انجام داده، پاسخ ارتعاشی سیستم تحت تحریک ضربه را به‌صورت آزمایشگاهی و عددی بررسی کردند

و درنهایت نشان داده شد که وجود واشر لاستیکی، تأثیر چندانی بر پاسخ سیستم ندارد [۱۳]. لوان و همکاران در سال ۲۰۱۲، رفتار دینامیکی غیرخطی اتصالات فلنجی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۴]. آن‌ها همانند سایر پژوهشگران، اتصال فلنجی مدور را به تعدادی اتصال تک‌پیچ تقسیم کرده، رفتار اتصال ساده شده را بررسی نمودند. برای این منظور با انتخاب قسمتی از فلنج شامل، یک پیچ اتصال به‌صورت فشر غیرخطی ساده با رفتار متفاوت در کشش و فشار، رابطه‌ای تحلیلی بین نیروی کشش و میزان جابجایی در لبه فلنج به دست آوردند. ماتن و پراسد در سال ۲۰۱۲، رفتار دینامیکی سیستم لوله متصل به فلنج واشر دار را به‌صورت عددی و تحت دماهای مختلف بررسی کردند [۱۵]. برای این منظور، تحلیل مودال و هارمونیک روی مدل اجزاء محدود ترمو مکانیکی سیستم اجرا و پارامترهای تأثیرگذار روی نوسانات مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که دمای سیال داخلی با تغییر در تنش لوله، تأثیر مشخصی روی فرکانس‌های طبیعی مجموعه دارد. در سال ۲۰۱۳ شوینگزهلک و همکارانش، دینامیک غیرخطی اتصال فلنج و پیچ در موتور هواپیما را بررسی کردند [۱]. آن‌ها نشان دادند که بیشترین اتلاف انرژی در اتصالات فلنجی، در محل تماس پیچ و فلنج صورت می‌گیرد. وو و همکارانش در سال ۲۰۱۴، تغییر شکل یک فلنج تحت بارهای کششی، پیچشی و خمشی را، به کمک تحلیل اجزاء محدود، مطالعه کردند [۱۶]. این پژوهشگران بیان کردند که در یک مجموعه دارای اتصال فلنجی تحت بارگذاری، با وجود تغییر شکل‌های الاستیک و به دلیل تغییر در میزان سطح تماس بین دو لبه، رفتار غیرخطی مشاهده خواهد شد.

استخراج روشی تحلیلی جهت بررسی رفتار اتصالات پیچی، مورد علاقه محققان بوده است. با مطالعه پژوهش‌های مربوط به اتصالات تک‌پیچ مشاهده می‌شود که در اغلب موارد بررسی رفتار دینامیک در حوزه اتصالات لب بر لب^۲ بوده، اتصالات فلنجی مورد توجه قرار نگرفته است [۱۷ و ۱۸]. روش پیشنهادی این مقاله، روندی نو در خصوص مدل‌سازی و استخراج پاسخ دینامیکی اتصال فلنجی ارائه می‌دهد. روند ارائه شده، امکان استخراج تحلیلی رفتار نوسانی عرضی

^۲ Lap Joints^۱ End Plate

فلنجی بین دو تیر نشان داده شده است. نحوه محاسبه سختی معادل اتصال، در پژوهش پیشین ارائه گردید [۱۹]. این مرجع شرح کاملی در خصوص مدل سازی اتصال فلنجی و استخراج سختی معادل ارائه داده و روشی تحلیلی جهت محاسبه سختی اتصال فلنجی برحسب هندسه، جنس و شرایط پیچ معرفی نموده است. مشاهده گردید که سختی اتصال در تغییر شکل‌های مثبت و منفی متفاوت بوده، مدل معادل از یک فنر پیچشی دوخطی به همراه یک فنر طولی خطی تشکیل خواهد شد. شروط مدل سازی اتصال فلنجی با فنرهای معادل طولی و خمشی عبارتند از:

۱- باز و بسته شدن لبه‌های اتصال تحت بارگذاری، فقط به صورت غلتشی بوده و لبه‌های اتصال روی هم لغزش نداشته باشند.

۲- کلیه تغییر شکل‌ها در محدوده الاستیک قرار داشته، لذا فنر معادل و لبه‌های اتصال همگی رفتار خطی دارند. هرچند که رفتار اتصال خطی فرض شده است، اما تغییر در هندسه مسئله در بارگذاری مثبت و منفی، موجب غیرخطی (دوخطی) شدن آن می‌شود.

در این پژوهش هندسه و جنس اتصال همانند مرجع [۱۹] در نظر گرفته شده است؛ لذا مقادیر سختی بدست آمده، برابر با اعداد مذکور هستند.

همان‌طور که گفته شد، مدل معادل اتصال فلنجی شامل، فنر دوخطی^۱ پیچشی و طولی خواهد بود. رفتار غیرخطی از نوع دوخطی، به علت عدم تقارن در تغییر شکل‌های اتصال به وجود می‌آید. در این مقاله از میرایی اتصال صرف‌نظر شده، اتصال تنها با فنرهای طولی و پیچشی معادل‌سازی می‌شود. عدم در نظر گرفتن میرایی برای اتصال برعکس اتصال لب بر لب به دلیل داشتن حرکت غلتش خالص در تغییر شکل‌های باز شدن و بسته شدن حین نوسانات عرضی مجموعه است. نحوه تغییر شکل اتصال برای دو حالت بارگذاری، در شکل ۱ ارائه شده است. در این مقاله به بارگذاری و تغییر شکل‌هایی که منجر به باز شدن و بسته شدن لبه‌های اتصال می‌شود به ترتیب، بارگذاری یا تغییر شکل مثبت و منفی گفته می‌شود. این نام‌گذاری برای راحت‌تر شدن اشاره به بارگذاری و تغییر شکل‌ها صورت گرفته است.

(فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها) و پاسخ دینامیکی تیرهای متصل به هم توسط اتصال فلنجی را فراهم می‌آورد. در دست داشتن یک حل تحلیلی از این جهت اهمیت دارد که اولاً دقیق‌ترین حل به شمار رفته، ثانیاً امکان مشاهده اثرات تغییر در پارامترهای مختلف را بوجود می‌آورد. جنبه کاربردی حل این سیستم نیز، بسیار با اهمیت بوده، امکان مطالعه رفتار تیرهای دارای فلنج و پیچ را با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری اتصال فراهم می‌نماید.

در این پژوهش به‌منظور محاسبه پاسخ دینامیکی سیستم تیر و اتصال فلنجی تک‌پیچ، مدل معادلی شامل دو تیر ارائه شده است که توسط فنر طولی خطی و فنر پیچشی غیرخطی به یکدیگر متصل شده‌اند. نشان داده شده است که فنر پیچشی، رفتاری دوخطی از خود نشان می‌دهد. سپس با نوشتن معادلات تیر و قرار دادن شرایط مرزی مناسب، فرکانس‌ها و شکل مودهای خطی مجموعه به‌دست آمده است. با شکستن سیستم غیرخطی به دو سیستم خطی کوپل شده و بکار گیری شکل مودهای خطی به‌دست آمده، معادله دینامیکی غیرخطی مجموعه به شکل دوخطی استخراج شده است. با استفاده از تخمین چندجمله‌ای، معادله دوخطی با معادله سیستم دارای سختی غیرخطی توان دوم، معادل‌سازی شده است. این معادله با استفاده از روش‌های اغتشاشات حل و پاسخ آن با پاسخ عددی سیستم دوخطی مقایسه شده است.

۲- استخراج مدل غیر خطی

در اتصالات لب بر لب برخلاف اتصالات فلنجی، راستای پیچ عمود بر راستای تیرها قرار گرفته، به دلیل تقارن اتصال نسبت به راستای تیرها، رفتار اتصال در نوسانات عرضی کاملاً متقارن خواهد بود؛ اما در اتصالات فلنجی پیچ در راستای تیرها و در یک سمت آن‌ها قرار گرفته و اتصال نسبت به راستای تیرها نامتقارن است. این مسئله موجب غیرخطی شدن رفتار اتصال حین نوسانات عرضی خواهد شد. مقایسه تغییر شکل‌ها در اتصالات لب بر لب و فلنجی تحت نوسانات عرضی، در شکل ۱ نشان داده شده است.

۲-۱- مدل معادل اتصال

به‌منظور انجام تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی تیرهای متصل با اتصالات پیچی مختلف، اتصال را با سختی و میرایی معادل جایگزین می‌کنند. این مسئله در شکل ۲، برای اتصال

¹ Bilinear

با استفاده از روش جداسازی متغیرها و قرار دادن $y = Y e^{i\omega t}$ ، در رابطه ۱، ترم‌های وابسته به مکان از ترم‌های زمانی جدا شده، به صورت رابطه ۲ نشان داده شده است. پارامتر ω معرف، فرکانس طبیعی نوسانات عرضی است.

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= A_1 \sin \beta_1 x + B_1 \cos \beta_1 x + C_1 \sinh \beta_1 x + D_1 \cosh \beta_1 x \\ Y_2(x) &= A_2 \sin \beta_2 x + B_2 \cos \beta_2 x + C_2 \sinh \beta_2 x + D_2 \cosh \beta_2 x \end{aligned} \quad (2)$$

که مقادیر β_1 و β_2 در رابطه ۳ ارائه شده‌اند.

$$\beta_1^4 = \frac{\rho_1 A_1}{E_1 I_1} \omega_b^2 \quad \beta_2^4 = \frac{\rho_2 A_2}{E_2 I_2} \omega_b^2 \quad (3)$$

شرایط مرزی دو انتهای تیرهای ۱ و ۲، به صورت آزاد در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات نوسانات عرضی به تعداد ۸ شرط مرزی نیاز خواهد بود که در روابط ۴-۸ ارائه شده‌اند. چهار شرط اول، مربوط به انتهای آزاد دو تیر بوده، چهار شرط بعدی مربوط به شرایط سازگاری در نقطه اتصال بین دو تیر است.

$$(1): \frac{d^2 Y_1}{dx^2} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (1-4)$$

$$(2): \frac{d^3 Y_1}{dx^3} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (2-4)$$

$$(3): \frac{d^2 Y_2}{dx^2} = 0 \quad \text{at } x = L_1 + L_2 \quad (3-4)$$

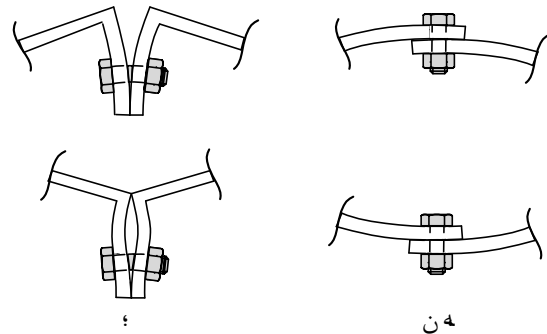
$$(4): \frac{d^3 Y_2}{dx^3} = 0 \quad \text{at } x = L_1 + L_2 \quad (4-4)$$

$$(5): E_1 I_1 \left. \frac{d^3 Y_1}{dx^3} \right|_{x=L_1} = K_t (Y_1|_{x=L_1} - Y_2|_{x=L_1}) - \frac{1}{2} M_f \omega_b^2 Y_1|_{x=L_1} \quad (5-4)$$

$$(6): E_2 I_2 \left. \frac{d^3 Y_2}{dx^3} \right|_{x=L_1} = K_t (Y_1|_{x=L_1} - Y_2|_{x=L_1}) + \frac{1}{2} M_f \omega_b^2 Y_2|_{x=L_1} \quad (6-4)$$

$$(7): E_1 I_1 \left. \frac{d^2 Y_1}{dx^2} \right|_{x=L_1} = K_t \left\{ \left. \frac{d Y_2}{dx} \right|_{x=L_1} - \left. \frac{d Y_1}{dx} \right|_{x=L_1} \right\} \quad (7-4)$$

$$(8): E_2 I_2 \left. \frac{d^2 Y_2}{dx^2} \right|_{x=L_1} = K_t \left\{ \left. \frac{d Y_2}{dx} \right|_{x=L_1} - \left. \frac{d Y_1}{dx} \right|_{x=L_1} \right\} \quad (8-4)$$

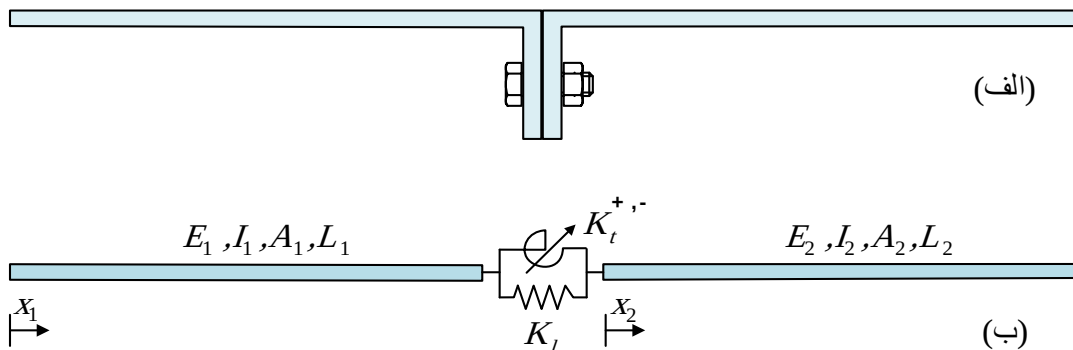


شکل ۱: مقایسه رفتار تغییر شکلی تحت بارهای خمشی مثبت و منفی در اتصال (الف) لب بر لب و (ب) فلنجی

۲-۲- شکل مودها

در این بخش معادلات شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی با فرض خطی بودن سختی خمشی (K_t) استخراج می‌شود. آنگاه با قرار دادن دو مقدار سختی مثبت و منفی در معادلات، دو فرکانس طبیعی و شکل مود متفاوت استخراج می‌شود. سیستم تیر و اتصال پاسخ دینامیکی خطی قطعه‌ای خواهد داشت که رفتار آن در جابه‌جایی‌های مثبت و منفی به ترتیب از فرکانس‌ها و شکل مودهای مثبت و منفی پیروی می‌کند. روند استخراج معادلات دینامیکی با نوشتن معادلات جداگانه تیر اولر برنولی به صورت رابطه ۱، برای تیرهای ۱ و ۲ شروع می‌شود. سپس شرایط مرزی و شرایط سازگاری مناسب روی آن‌ها اعمال خواهد شد.

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= 0 \\ E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۲- الف) شماتیک از دو تیر متصل شده توسط اتصال فلنجی تک پیچ و (ب) مدل معادل

جدول ۱- مشخصات سیستم تیر و فنر مفروض معادل اتصال

فلنجی			
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
L_2 و L_1	250 (mm)	M_f	$0/3 \text{ (Kg)}$
E_2 و E_1	2×10^{11}	K_t^+	$2/5 \times 10^3$
I_2 و I_1	$450 \text{ (mm}^4\text{)}$	K_t^-	$3/5 \times 10^3$
ρ_2 و ρ_1	$7800 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$	K_l	$5/0 \times 10^7$

* مقادیر سختی با استفاده از روش مرجع [۱۹] و برای هندسه مشابه با آن مرجع بدست آمده‌اند.

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم عرضی سیستم

دارای فلنج بر حسب مقادیر مختلف سختی اتصال			
سختی	f_1	f_2	f_3
$K_t \approx \infty$	۱۰۹/۳	۳۴۳/۷	۵۸۴/۸
$K_t = 9 \times 10^3$	۱۰۳/۱	۳۴۳/۷	۵۵۲/۶
$K_t = 3 \times 10^3$	۹۳/۳	۳۴۳/۷	۵۱۳/۰
$K_t = 1 \times 10^3$	۷۴/۸	۳۴۳/۷	۴۶۳/۵

۳- استخراج پاسخ دینامیکی

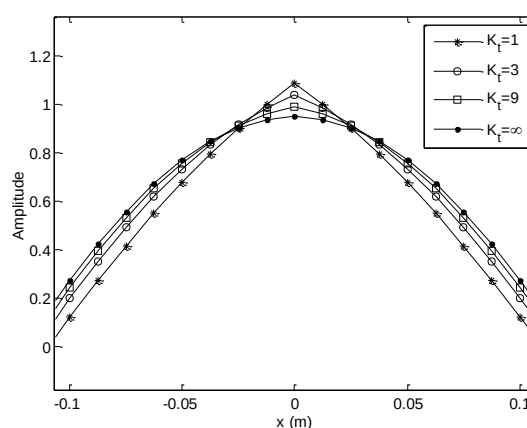
در بخش قبل فرکانس‌ها و شکل مودهای خطی، مجموعه تیر و اتصال تحت شرایط مختلف استخراج گردید. در این بخش با استفاده از شکل مودهای استخراج شده، تخمینی از جابه‌جایی مجموعه در نظر گرفته شده، معادلات دینامیکی مربوط به سیستم به دست می‌آیند. از آنجایی‌که سختی اتصال در بارهای مثبت و منفی و به تبع آن شکل مودها متفاوت هستند، برای هر کدام از جابه‌جایی‌های مثبت و منفی، یک معادله دینامیکی استخراج می‌شود. با به‌کارگیری شرط دنبال کننده علامت جابه‌جایی، معادله نهایی به‌صورت قطعه‌ای خطی^۱ به دست خواهد آمد. سپس معادلات به روش عددی دقیق و روش تحلیلی تقریبی اغتشاشات^۲ (با در نظر گرفتن تخمین مناسب) حل شده، پاسخ به دست می‌آید.

۳-۱- معادله دینامیکی یک درجه آزادی معادل

برای ساده‌سازی معادلات دینامیکی با به‌کارگیری روش جمع مودها، معادلات ساده‌تری استخراج می‌شود. برای این منظور، لازم است که جابه‌جایی‌های عرضی تیرهای ۱ و ۲ با

با قرار دادن شرایط معرفی شده در رابطه ۴ در معادلات تیرها، تعداد ۸ معادله جداگانه به دست خواهد آمد. این معادلات تابع ضرایب مفروض A_1, B_1, C_1, D_1 و A_2, B_2, C_2, D_2 هستند. معادلات مربوطه پس از ساده‌سازی و مرتب کردن برحسب ضرایب مجهول، به‌صورت ماتریسی در پیوست ۱ ارائه شده است.

به‌منظور استخراج فرکانس طبیعی لازم است، دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر قرار داده شود. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، سیستم تیر و فنر معادل با مشخصات ارائه شده در جدول ۱، در نظر گرفته می‌شود. با قرار دادن مقادیر مفروض این جدول در معادله مقدار ویژه و صفر کردن دترمینان، فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم مجموعه به ازای مقادیر مختلف سختی اتصال به‌صورت جدول ۲ به دست می‌آید. سطر اول جدول، فرکانس‌های سیستم صلب را نشان می‌دهد. برای به دست آوردن فرکانس سیستم صلب، سختی اتصال به مقادیر زیاد میل داده شده است. به‌صورت تئوری در صورت میل کردن سختی به بی‌نهایت، شیب تیرها در محل اتصال کاملاً پیوسته شده و در صورت یکسان بودن مقطع و جنس دو تیر، فرکانس و شکل مود مجموعه، معادل تیری پیوسته به طول $L_1 + L_2$ خواهد بود. شکل ۳، شکل مود اول خمشی مجموعه را به ازای مقادیر متفاوت در سختی خمشی اتصال ارائه می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش سختی خمشی، ناپیوستگی شیب در محل اتصال افزایش می‌یابد.



شکل ۱- شکل مود اول خمشی به ازای مقادیر مختلف سختی خمشی فنر معادل (kN)

¹ Piecewise Linear

² Perturbation Method

که ترم نیروی بازگرداننده نیز، همانند سختی اتصال ماهیت دوخطی دارد.

با توجه به فیزیک سیستم‌های یک درجه آزادی مشخص است که امکان ارتعاش سیستم با دو فرکانس طبیعی به صورت هم‌زمان وجود ندارد. سیستم مورد نظر، یک فرکانس طبیعی داشته که مطابق با رابطه ۱۱ با میانگین‌گیری از دوره تناوب قابل محاسبه است. با میانگین‌گیری، یک دوره تناوب برای سیستم کلی به دست آمده، بر اساس آن یک فرکانس طبیعی (ω_0) استخراج می‌شود [۲۰].

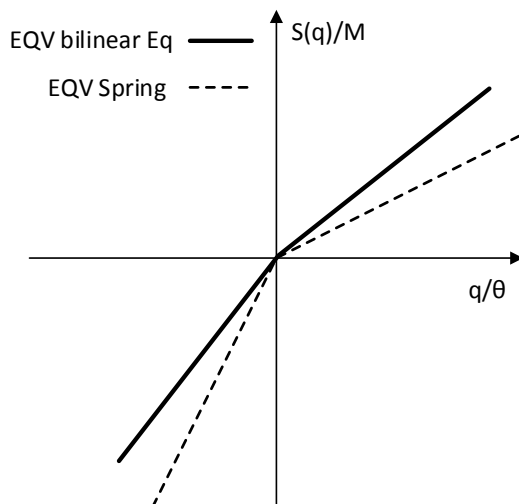
$$T_0 = \frac{T_0^+ + T_0^-}{2} \Rightarrow 2\pi \frac{1}{\omega_0} = 2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_0^+} + \frac{1}{\omega_0^-} \right) \quad (11)$$

پس از ساده‌سازی فرکانس طبیعی نوسانات نامیرای سیستم یک درجه آزادی معادل، به صورت رابطه ۱۲ استخراج می‌شود.

$$\omega_0 = \frac{2\omega_0^+ \omega_0^-}{\omega_0^+ + \omega_0^-} \quad (12)$$

برای سیستمی با مشخصات ارائه شده در جدول ۱، فرکانس‌های ω_0^+ ، ω_0^- و فرکانس طبیعی پایه (ω_0) سیستم تیر-اتصال به ترتیب از روابط ۷ و ۱۲ محاسبه و در رابطه ۱۳ ارائه شده‌اند.

$$\begin{cases} \omega_0^+ = 535.7 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \\ \omega_0^- = 627.7 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = 578.1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \quad (13)$$



شکل ۴- تغییرات دوخطی نیروی بازگرداننده و مماس خارجی اتصال به ترتیب برحسب تغییر در مختصات عمومی و زاویه دوران اتصال

جابه‌جایی‌های در نظر گرفته شده در رابطه ۵ جایگزین شود. در این تخمین، اثر مود اول به‌تنهایی در نظر گرفته شده، از اثرات مودهای بالاتر صرف‌نظر شده است. شکل مودهای عرضی تیرهای ۱ و ۲ و مختصات عمومی در نظر گرفته شده به ترتیب، با Φ_1 ، Φ_2 و q نشان داده شده‌اند. با توجه به تفاوت داشتن سختی اتصال در جابه‌جایی‌های مثبت و منفی، شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی خطی مثبت و منفی نیز متفاوت هستند.

$$\begin{aligned} y_1 &= q(t)\Phi_1(x) \\ y_2 &= q(t)\Phi_2(x) \end{aligned} \quad (5)$$

نیروی تحریک سیستم به صورت تناوبی با دامنه f_0 و فرکانس Ω ، به صورت رابطه ۶ در نظر گرفته شده و در انتهای تیر شماره ۲ اعمال می‌شود.

$$f(t) = f_0 \cos(\Omega t) \quad (6)$$

با قرار دادن شکل مودهای مثبت و منفی در رابطه ۵ و جایگذاری آن‌ها در روابط ۷ و ۸، معادله دینامیکی یک درجه آزادی مشابه با رابطه ۹ برای سیستم استخراج می‌شود. پارامترهای ω_0^+ و ω_0^- به ترتیب، معادل فرکانس‌های طبیعی نوسانات مثبت و منفی معرفی می‌شوند.

$$\begin{aligned} (\omega_0^+)^2 &= \frac{E_1 I_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 \Phi_1^+}{dx^2} \right)^2 dx + E_2 I_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{d^2 \Phi_2^+}{dx^2} \right)^2 dx}{\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} (\Phi_1^+)^2 dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (\Phi_2^+)^2 dx} \\ (\omega_0^-)^2 &= \frac{E_1 I_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 \Phi_1^-}{dx^2} \right)^2 dx + E_2 I_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{d^2 \Phi_2^-}{dx^2} \right)^2 dx}{\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} (\Phi_1^-)^2 dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (\Phi_2^-)^2 dx} \end{aligned} \quad (7)$$

$$F_0 = \frac{f_0 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \delta(x - L_2) \Phi_2^+ dx}{\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} (\Phi_1^+)^2 dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (\Phi_2^+)^2 dx} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} + S(q) &= F(t) \\ S(q) &= \begin{cases} (\omega_0^+)^2 & q > 0 \\ (\omega_0^-)^2 & q < 0 \end{cases} \cdot q \end{aligned} \quad (9)$$

که نیروی مود اول به صورت رابطه ۱۰ بازنویسی می‌شود.

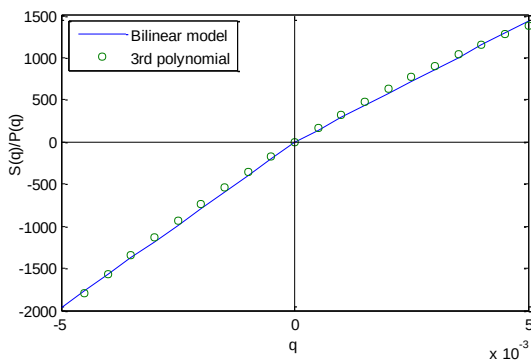
$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (10)$$

همان‌طور که در رابطه ۹ مشاهده می‌شود، سیستم تیر و اتصال به سیستم یک درجه آزادی دارای سختی متغیر تبدیل شد. شکل ۴ نمودار تغییرات نیروی بازگرداننده $^1 S(q)$ را برحسب مختصات عمومی (q) نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود

¹ Restoring Force

۱۶ بازنویسی کرد. پارامتر α در رابطه ۱۶، معرف ضریب ترم غیرخطی بوده، در سیستم‌های دوخطی مورد بررسی در این پژوهش به علت کمتر بودن سختی مثبت از منفی، عددی منفی خواهد بود. برای سیستم مورد بررسی در این بخش با توجه به رابطه ۱۵، پارامتر α برابر با $-۹۶/۷$ است.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \alpha \omega_0^2 q^2 = F(t) \quad (۱۶)$$



شکل ۵- نمودار نیرو-تغییر شکل برای تابع دوخطی و تابع درجه سوم برازش شده

۳-۳- حل تحلیلی-تقریبی

معادله غیرخطی جابجایی مربوط به تخمین درجه دوم که در رابطه ۱۶ به دست آمد، با اضافه کردن میرایی در رابطه ۱۷ نشان داده شده است. در این بخش با به‌کارگیری روش اغتشاشات حل تحلیلی-تقریبی معادله فوق محاسبه می‌شود. برای استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری به ترتیب روش‌های لیندشتد پوانکاره^۱ و چند مقیاسی^۲ مورد استفاده قرار گرفته است.

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q + \alpha\omega_0^2 q^2 = 0 \quad (۱۷)$$

۳-۳-۱- حل ارتعاشات آزاد

ابتدا با در نظر گرفتن $F(t) = 0$ ، $q = z\Delta$ ، و $\tau = \omega t$ معادله یک درجه آزادی ۱۷ به فرم بدون بعد تبدیل می‌شود. پارامتر Δ ، به‌عنوان خیز استاتیک در نظر گرفته شده به‌صورت $\Delta = g/\omega_0^2$ تعریف می‌شود. با جایگذاری پارامترها و انجام ساده‌سازی، معادله بی‌بعد به‌صورت رابطه ۱۸ بازنویسی می‌شود.

۳-۲- تخمین چندجمله‌ای سیستم دوخطی

از آنجایی که $S(q)$ تابعی پیوسته از مختصات عمومی q است، می‌توان چندجمله‌ای به دست آورد که تخمین مناسبی از نیروی بازگرداننده را ارائه دهد؛ لذا می‌توان ترم $S(q)$ موجود در معادله مرتبه اول رابطه ۹ را با چندجمله‌ای $P(q)$ جایگزین کرد (رابطه ۱۴).

تخمین چند جمله‌ای با تبدیل تابع ناپیوسته $S(q)$ به حاصل جمع توان‌ها مختلف q امکان حل معادله توسط روش تحلیلی-تقریبی اغتشاشات را فراهم می‌کند.

$$\ddot{q} + P(q) = F(t) \quad (۱۴)$$

که؛ $P(q) = p_1 q + p_2 q^2 + p_3 q^3 + \dots$

ترم p_1 نشان‌دهنده قسمت خطی و ترم‌های با توان بالاتر، مربوط به قسمت غیرخطی چندجمله‌ای هستند. برای نوسانگر دوخطی ارائه شده در رابطه ۹، مقدار ضرایب چندجمله‌ای معادل با بکارگیری روش برازش منحنی به‌صورت رابطه ۱۶ به دست می‌آید. از اثر ترم‌های با توان‌های بالاتر صرف‌نظر شده است. قابل توجه است که ترم‌های به‌جز p_1 یعنی، p_2 و p_3 به بازه در نظر گرفته شده برای q حین فرایند برازش منحنی وابسته هستند. در مورد معادله ۱۵، این بازه $10^{-3} \times (-5, +5)$ در نظر گرفته شده است. شکل ۶، مقایسه‌ای از نیروی بازگرداننده سیستم دوخطی و مدل چندجمله‌ای برازش شده را نشان می‌دهد (تخمین ۲۱ نقطه‌ای). همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطابقت خوب بین دو منحنی وجود داشته و میانگین مربعات خطا بین آن‌ها کمتر از ۳ درصد باقی‌مانده است.

$$\begin{aligned} p_1 &= 3.405 \times 10^5 \\ p_2 &= -3.29 \times 10^7 \\ p_3 &= 0.00 \end{aligned} \quad (۱۵)$$

قابل توجه است که سیستم‌های دوخطی رفتار غیرخطی غالب خود را به‌صورت توان‌های زوج جابه‌جایی نشان می‌دهند؛ به همین دلیل است که در تخمین چند جمله‌ای مرتبه سوم ضریب ترم توان سوم، تقریباً صفر ($p_3 \approx 0$) شده است [۲۰]. در این پژوهش از اثر مرتبه‌های زوج بالاتر صرف نظر شده، معادلات تا مرتبه دوم در نظر گرفته شده‌اند. ترم p_1 بیانگر، توان دوم فرکانس طبیعی سیستم خطی (ω_L^2) است. می‌توان نشان داد که فرکانس طبیعی خطی، تخمین مناسبی از فرکانس طبیعی اصلی سیستم غیرخطی (ω_0^2) را ارائه می‌دهد [۲۰]. از این رو معادله ۱۴ را می‌توان به‌صورت رابطه

^۱ Lindstedt-Poincaré Method (LPM)

^۲ Method of Multiple Scales (MMS)

با قرار دادن $A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و بازنویسی رابطه ۲۶ به شکل مثلثاتی، پاسخ نهایی ارتعاشات آزاد به صورت رابطه ۲۷ استخراج خواهد شد.

$$z = ae^{-\varepsilon\omega_0\mu t} \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{\varepsilon\alpha a^2}{3} e^{-2\varepsilon\omega_0\mu t} \cos(2\omega_0 t + 2\beta) - 2\varepsilon\alpha a^2 + O(\varepsilon^2) \quad (27)$$

همان طور که در رابطه ۲۷ مشاهده می شود؛ پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم ترکیبی از فرکانس طبیعی و هارمونیک دو برابر آن خواهد بود. وجود ترم $-2\varepsilon\alpha a^2$ در پاسخ، نشانگر آن است که نوسانات از مبدأ صفر انحراف داشته، سیستم حول نقطه ای غیر صفر نوسان می کند.

۳-۳-۲- حل ارتعاشات اجباری

ابتدا با در نظر گرفتن $q = z\Delta$ و $\tau = \omega_0 t$ معادله یک درجه آزادی ۱۷ به فرم بدون بعد تبدیل می شود. پارامتر Δ ، به عنوان خیز استاتیکی در نظر گرفته شده به صورت $\Delta = g/\omega_0^2$ تعریف می شود. معادله بی بعد ارتعاشات اجباری، به صورت رابطه ۲۸ نشان داده شده است. نیروی تحریک سینوسی همانند رابطه ۱۰ و با فرکانس تحریک Ω در نظر گرفته می شود.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon\mu \frac{\partial z}{\partial \tau} + z + \varepsilon\alpha z^2 = F \cos(r\tau) \quad (28)$$

که $\varepsilon = \Delta$, $F = F_0/g$, $\mu = \xi/\varepsilon$ و $r = \Omega/\omega_0$

در استفاده از روش چند مقیاسی، ترم زمان به صورت زنجیره ای از توان های ε مطابق رابطه ۲۹ در نظر گرفته می شود.

$$T_n = \varepsilon^n \tau, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

با بکارگیری قاعده زنجیره ای مشتق، مشتقات نسبت به τ مطابق رابطه ۳۰ به زنجیره ای از مشتقات نسبت به T_n تبدیل می شود. در روابط ارائه شده مشتق جزئی مرتبه n ام با $D_n = \partial/\partial T_n$ نشان داده شده است.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (30)$$

مطابق روش های اغتشاشات، پاسخ کلی سیستم به فرم رابطه (۳۱) تعریف می شود:

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon z_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 z_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (31)$$

$$\omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon\mu\omega \frac{\partial z}{\partial \tau} + \omega_0^2 z + \varepsilon\alpha\omega_0^2 z^2 = 0 \quad (18)$$

که: $\mu = \xi/\varepsilon$ و $\varepsilon = \Delta$

در تئوری اغتشاشات ε پارامتری کوچک فرض می شود. برای سیستم مفروض در رابطه ۱۵ $\varepsilon = 3/4 \times 10^{-4}$ است. در استفاده از روش پوانکاره، فرکانس نوسانات و متغیر مختصات عمومی مطابق با رابطه ۱۹، به صورت حاصل جمع ضرایب ε نوشته می شود.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \quad (1-19)$$

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots \quad (2-19)$$

پس از جایگذاری از رابطه ۱۹ در رابطه ۱۸ و مرتب سازی معادلات برحسب مرتبه ε ، روابط ۲۰ به دست می آیند. لازم به ذکر است که معادلات تا مرتبه اول ε نوشته شده و از اثر مراتب بالاتر صرف نظر شده است.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow z_0'' + z_0 = 0 \quad (1-20)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow z_1'' + z_1 = -2\frac{\omega_1}{\omega_0} z_0'' - 2\mu z_0' - \alpha z_0^2 \quad (2-20)$$

حل معادله ۲۰-۱ به صورت رابطه ۲۱ به دست می آید.

$$z_0 = Ae^{i\tau} + \bar{A}e^{-i\tau} \quad (21)$$

معادله ۲۲ با قرار دادن z_0 از رابطه ۲۱ در سمت راست معادله ۲۰-۲ به دست می آید.

$$z_1'' + z_1 = \left(2\frac{\omega_1}{\omega_0}A - 2i\mu A\right)e^{i\tau} - \alpha A^2 e^{2i\tau} - \alpha A\bar{A} + cc \quad (22)$$

در رابطه ۲۲، منظور از ترم cc ، مزدوج مختلط ترم های ارائه شده است. پارامتر ω_1 با صفر کردن ترم سکولار رابطه ۲۲، به صورت رابطه ۲۳ به دست می آید. با صفر کردن این ترم مقدار، z_1 به صورت رابطه ۲۴ استخراج می شود.

$$\omega_1 = i\mu\omega_0 \quad (23)$$

$$z_1 = \frac{\alpha A^2}{3} e^{2i\tau} - \alpha A\bar{A} + cc \quad (24)$$

با جایگذاری پاسخ های z_0 ، z_1 و ω_1 در رابطه ۲-۱۹، پاسخ کلی با تخمین تا مرتبه دوم به صورت رابطه ۲۵ به دست می آید.

$$z = Ae^{i\tau} + \varepsilon \left(\frac{\alpha A^2}{3} e^{2i\tau} - \alpha A\bar{A} \right) + cc \quad (25)$$

معادله ۲۶ با قرار دادن $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$ و $\tau = \omega t$ در رابطه ۲۵ به دست می آید.

$$z = Ae^{i\omega_0(1+i\varepsilon\mu)t} + \varepsilon \left(\frac{\alpha A^2}{3} e^{2i\omega_0(1+i\varepsilon\mu)t} - \alpha A\bar{A} \right) + cc \quad (26)$$

با توجه به رابطه ۵۱، پاسخ سیستم در این حالت از تحریک از نوع هارمونیک بوده، ترکیبی از فرکانس تحریک و فرکانس دو برابر آن خواهد بود. در این حالت فرکانس تحریک بایستی یکدوم فرکانس طبیعی سیستم باشد. مشاهده می‌شود که ترم دوم رابطه دارای توان دوم دامنه نیروی تحریک است. از این رو با کاهش دامنه نیروی تحریک ترم دوم معادله نسبت به ترم اول با سرعت بیشتری به سمت صفر گرایش پیدا کرده، حل مسئله مشابه با حل حالت خطی می‌شود.

۳-۳-۲-۳- رزونانس زیر هارمونیک

در تحلیل زیر هارمونیک، نیروی تحریک با مرتبه صفر ε ، همانند با تحلیل قبل در نظر گرفته می‌شود. از این رو معادلات مربوطه به مرتبه‌های ε ، همانند رابطه ۴۴ خواهد بود. در صورتی که پاسخ اطراف دو برابر فرکانس طبیعی سیستم مورد نیاز باشد، فرکانس تحریک لازم است، به صورت رابطه ۵۲ در نظر گرفته شود؛ بنابراین، پس از بازنویسی رابطه ۴۴-۲ با جایگذاری حل z_0 از رابطه ۴۵، ترم سکولار به صورت رابطه ۵۳ نوشته می‌شود.

$$r = 2 + \varepsilon\sigma \Rightarrow r\tau = 2T_0 + \sigma T_1 \quad (52)$$

$$D_1 A + \mu A - i\alpha \bar{A} \Lambda e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (53)$$

با فرض $A = B \exp(\frac{1}{2}i\sigma T_1)$ رابطه ۵۳ به صورت رابطه ۵۴ ساده می‌شود.

$$D_1 B + \frac{1}{2}i\sigma B + \mu B - i\alpha \bar{B} \Lambda = 0 \quad (54)$$

فرض می‌شود که ضریب B ، ماهیت مختلط داشته و به صورت $B = B_r + iB_i$ باشد که B_r و B_i به ترتیب نمایانگر، بخش‌های حقیقی و موهومی ضریب B هستند. با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی رابطه ۵۴، این رابطه به صورت دو معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود.

$$B_r' + \mu B_r - \left(\frac{1}{2}\sigma + \alpha\Lambda\right) B_i = 0 \quad (1-55)$$

$$B_i' + \mu B_i - \left(\frac{1}{2}\sigma - \alpha\Lambda\right) B_r = 0 \quad (2-55)$$

دو معادله بالا، معادلاتی خطی و با ضرایب ثابت هستند؛ لذا حلی برابر با $B_r = b_r e^{\lambda T_i}$ و $B_i = b_i e^{\lambda T_i}$ می‌توان برای آن‌ها در نظر گرفت. که ضرایب b_r ، b_i و λ همگی ثابت هستند. با جایگذاری B_r و B_i در رابطه ۵۵، حل غیر بدیهی به صورت رابطه ۵۶ استخراج می‌شود.

معادلات ظاهر می‌شود. رابطه ۴۴، معادلات سیستم را تا مرتبه اول نشان می‌دهد.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow D_0^2 z_0 + z_0 = F \cos(r\tau) \quad (1-44)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow D_0^2 z_1 + z_1 = -2\mu D_0 z_0 - 2D_0 D_1 z_0 - \alpha z_0^2 \quad (2-44)$$

معادله ۴۴-۱، به صورت رابطه ۴۵ حل می‌شود.

$$z_0 = A e^{iT_0} + \Lambda e^{irT_0} + cc \quad (45)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{F}{1-r^2}$$

رابطه ۴۴-۲، پس از جایگذاری حل z_0 از رابطه ۴۵ به صورت رابطه (۴۶) بازنویسی می‌شود.

$$D_0^2 z_1 + z_1 = -2i(D_1 A + \mu A) e^{iT_0} - 2i\mu r \Lambda e^{irT_0} - \alpha [A^2 e^{2iT_0} + \Lambda^2 e^{2irT_0} + 2\bar{A} \Lambda e^{i(r-1)T_0} + 2A \Lambda e^{i(r+1)T_0} + A\bar{A} + \Lambda^2] + cc \quad (46)$$

با دقت در سمت راست رابطه ۴۶ می‌توان دریافت که رزونانس سوپر هارمونیک زمانی اتفاق می‌افتد که $\omega_0 = 2\Omega$ باشد ($r=1/2$)؛ بنابراین پارامتر انحراف فرکانس تحریک از فرکانس طبیعی، به صورت رابطه ۴۷ تعریف می‌شود.

$$2r = 1 + \varepsilon\sigma \Rightarrow 2r\tau = T_0 + \sigma T_2 \quad (47)$$

با جایگذاری از رابطه ۴۷ در سمت راست رابطه ۴۶، ترم سکولار مطابق با رابطه ۴۸ به دست می‌آید.

$$D_1 A + \mu A + \frac{1}{2i} \alpha \Lambda^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (48)$$

با حل رابطه ۴۸، ضریب A به صورت رابطه ۴۹ به دست می‌آید.

$$A = a e^{-\mu T_1} + \frac{i\alpha \Lambda^2}{2(\mu + i\sigma)} e^{i\sigma T_1} \quad (49)$$

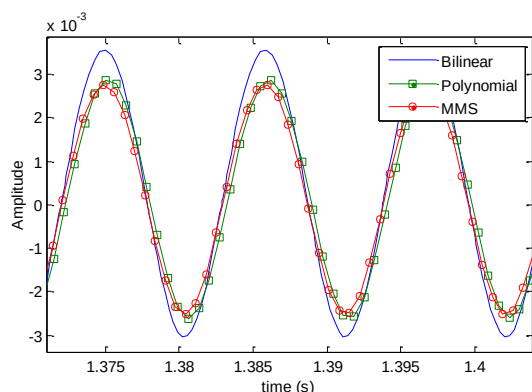
در صورتی که زمان به سمت بی‌نهایت میل داده شود، ترم $e^{-\mu T_1}$ در ضریب A به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت ضریب A پس از ساده‌سازی به صورت رابطه ۵۰ بازنویسی می‌شود.

$$A = \frac{i\alpha \Lambda^2}{2(\mu + i\sigma)} e^{i\sigma T_1} \quad (50)$$

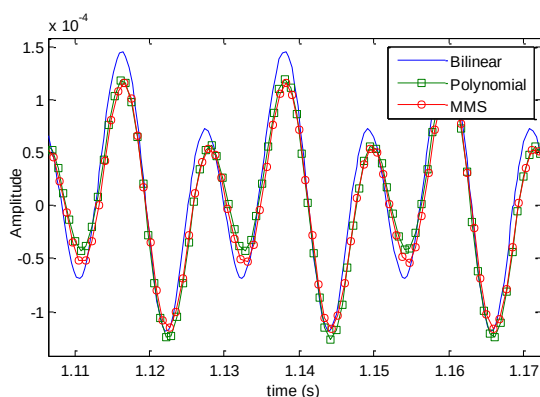
در نهایت پاسخ حالت دائم سیستم در مجاورت رزونانس سوپر هارمونیک با فرض تخمین مرتبه اول، به صورت رابطه ۵۱ استخراج می‌شود. دقت شود که ترم σ از رابطه ۴۷ و مقدار Λ از رابطه ۴۵ جایگذاری شده است.

$$z = \frac{F}{1-r^2} \cos(r\tau) - \frac{\alpha F^2}{4(1-r^2)^2 \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \sin(2r\tau - \gamma) \quad (51)$$

که: $\gamma = \tan^{-1}(\sigma/\mu)$



(الف)



(ب)

شکل ۷- مقایسه پاسخ عددی مدل های دوخطی و چندجمله ای مرتبه دوم معادل اطراف الف) رزونانس اصلی و ب) رزونانس فوق هارمونیک

مقایسه بین نتایج حل عددی دقیق سیستم دوخطی و حل عددی چندجمله ای معادل درجه سوم، حاکی از آن است که در نظر گرفتن ضرایب تا توان سوم مختصات عمومی (q) برای تخمین رفتار دینامیک سیستم در حالات نوسانات آزاد و مجاورت رزونانس اصلی و سوپر هارمونیک دقت کافی را دارا است؛ بنابراین می توان از اثر توان های بالاتر صرف نظر نموده، سیستم دوخطی را با چندجمله ای درجه دوم معادل نمود. در واقع سیستم معادل سیستمی غیرخطی، از توان دوم جابه جایی است.

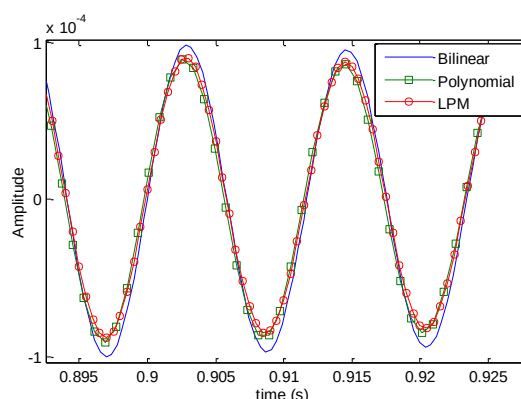
مقایسه بین نتایج حل عددی سیستم دوخطی و چندجمله ای معادل آن با حل ارائه شده به روش اغتشاشات نیز، حاکی از دقت بالای پاسخ به دست آمده به روش های پوانکاره و چند مقیاسی دارد. ملاحظه می شود، سیستم حول

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 - \sigma^2 / 4} \quad (56)$$

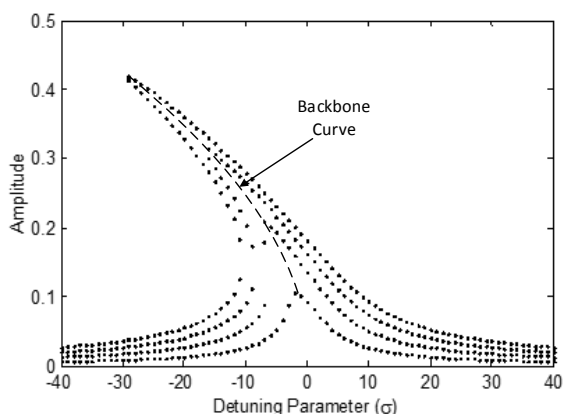
در تحریک زیر هارمونیک، مقدار λ همواره منفی باقی می ماند. از این رو دامنه ترم نوسانات آزاد مربوط به فرکانس زیر هارمونیک با گذر زمان کاهش می یابد؛ بنابراین پاسخ حالت دائم در حالت تحریک زیر هارمونیک، به صورت تک فرکانسی بوده، تنها شامل فرکانس تحریک است.

۴- نتایج

در بخش دوم مقاله سیستم تیر و اتصال فلنجی با سیستم معادلات دوخطی، رابطه ۹ معادل سازی گردید. با استفاده از روش عددی می توان معادله ۹ دارای ترم دوخطی را به صورت نسبتاً دقیق حل کرد. در روش عددی دقیق، هر قسمت خطی ($q > 0$ و $q < 0$) جداگانه حل شده، با پیش بردن حل در قدم های زمانی به اندازه کافی کوچک و بررسی علامت q در هر قدم به یکدیگر متصل می شود. نمودار شکل ۶، حل عددی دقیق تابع دوخطی، حل عددی چندجمله ای مرتبه سوم معادل و پاسخ به دست آمده از روش پوانکاره را در غیاب نیروی تحریک نشان می دهد. نمودارهای شکل ۷ نیز، حل عددی دقیق سیستم دوخطی و چندجمله ای مرتبه سوم معادل آن را با پاسخ های به دست آمده از روش چند مقیاسی در مجاورت فرکانس طبیعی پایه و رزونانس سوپر هارمونیک نشان می دهد. برای ترسیم نمودارهای پاسخ در مجاورت رزونانس اصلی و سوپر هارمونیک بازه زمانی به نحوی انتخاب شده است که نوسانات سیستم از حالت گذرای اولیه عبور کرده، به حالت دائم برسد. همان طور که مشاهده می شود، مطابقت خوبی بین نتایج هر سه روش وجود دارد.



شکل ۶- پاسخ نوسانات آزاد مربوط به مدل های دوخطی و چندجمله ای مرتبه سوم معادل



شکل ۹- پاسخ فرکانسی سیستم در مجاورت رزونانس اصلی با تغییر در دامنه نیروی تحریک ($0.5F, 1F, 1.5F, 2F$)

مطابق شکل ۹ با افزایش دامنه نیرو، نقطه ماکزیمم منحنی پاسخ فرکانسی بالاتر رفته، علاوه بر آن از $\sigma = 0$ به سمت فرکانس‌های کمتر منحرف می‌شود. منحنی مکان هندسی ماکزیمم دامنه به صورت سهمی با معادله $\sigma = \alpha^* a^2$ است که در شکل ۹ با خط چین نمایش داده شده است.

با ملاحظه ترم ضریب هارمونیک $2x$ در رابطه ۵۱، رابطه پاسخ فرکانسی ترم سوپر هارمونیک، به صورت رابطه ۵۸ نوشته می‌شود.

همان‌طور که در رابطه ۵۱ مشاهده می‌شود، پاسخ فرکانسی مربوط به فرکانس طبیعی پایه با افزایش میزان غیرخطی بودن سیستم (افزایش α) شدیدتر می‌شود. شکل ۱۰، پاسخ فرکانسی سیستم را در مجاورت رزونانس سوپر هارمونیک به ازای مقادیر مختلف ضریب غیرخطی α ، نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش غیرخطی بودن سیستم، دامنه پاسخ افزایش می‌یابد.

$$\frac{\alpha F^2}{4(1-r^2)^2 \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \quad (58)$$

۴-۱- مقایسه با حل عددی

شکل ۱۱ مقایسه پاسخ فرکانسی سیستم با مشخصات مفروض در جدول ۱ را در اطراف فرکانس طبیعی پایه به روش ارائه شده در این مقاله و حل عددی نشان می‌دهد.

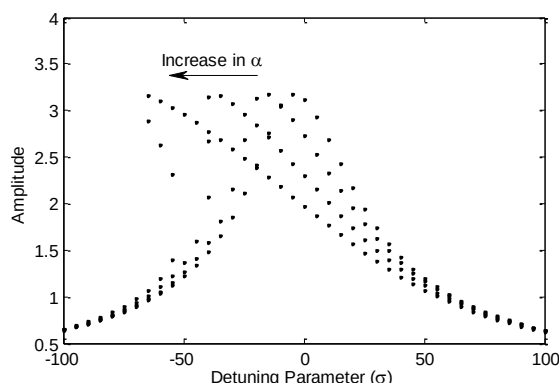
مبدأ غیر صفر نوسان می‌کند. این مسئله از ماهیت سیستم‌های دوخطی نشئت می‌گیرد. به کارگیری این روش‌ها برای حل معادلات غیرخطی این اجازه را می‌دهد که بتوان حلی تحلیلی تقریبی برای سیستم به دست آورد و اثر پارامترهای مختلف را به صورت تحلیلی بررسی کرد.

با انتقال، به توان دو رساندن و جمع سمت راست دو رابطه ۴۰-۱ و ۴۲، معادله پاسخ فرکانسی در مجاورت رزونانس اصلی مطابق با رابطه ۵۷ به دست می‌آید.

$$a^2 [\mu^2 + (\alpha^* a^2 + \sigma)^2] = \left(\frac{F}{2}\right)^2 \quad (57)$$

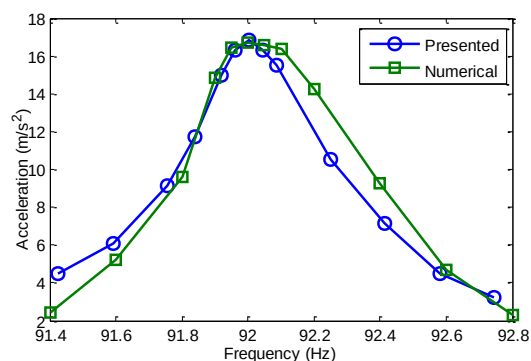
(که: $\alpha^* = \frac{10}{24} \alpha^2$)

طبق رابطه ۵۷، حداکثر دامنه برابر با $F/2\mu$ بوده که مستقل از ضریب ترم غیرخطی سیستم (α) است. منحنی پاسخ فرکانسی سیستم به ازای تغییر در میزان غیرخطی بودن و تغییر در دامنه نیروی تحریک به ترتیب، در شکل ۸ و شکل ۹ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که وجود ترم غیرخطی توان دوم، همانند سختی نرم شونده عمل کرده، تمایل به انتقال قله منحنی پاسخ فرکانسی به سمت فرکانس‌های پایین‌تر نشان می‌دهد. برای سیستم موردنظر در این مقاله، عامل تغییر دهنده ضریب α (میزان غیرخطی بودن سیستم)، تغییر اختلاف بین ω_0^+ و ω_0^- یا به عبارت دیگر، تغییر اختلاف بین سختی خمشی مثبت و منفی اتصال است. در مرجع [۱۹] اشاره شده است که دو عامل ۱- افزایش پیش‌بار در پیچ ۲- افزایش ضخامت لبه اتصال فلنجی، موجب زیادتر شدن اختلاف بین سختی مثبت و منفی شده، لذا به تبع آن سبب افزایش ضریب ترم غیر خطی خواهد شد.



شکل ۸- پاسخ فرکانسی سیستم در مجاورت رزونانس اصلی با تغییر در ضریب غیر خطی ($\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha$)

¹ Backbone Curve



شکل ۱۱- مقایسه پاسخ فرکانسی سیستم به روش تحلیلی ارائه شده و حل عددی

۶- فهرست علائم

مساحت سطح مقطع (m^2)	A
مدول الاستیسیته (N/m^2)	E
ممان اینرسی خمشی (m^4)	I
نیرو (N)	f
سختی ($N/m, Nm/rad$)	K
طول تیر (m)	L
جرم (Kg)	M
فرکانس تحریک بدون بعد	r
مختصات عمومی	q

علائم یونانی

ضریب ترم غیرخطی	α
ضریب میرایی بدون بعد	μ
انحراف از فرکانس طبیعی	σ
پارامتر اغتشاش	ε
خیز استاتیکی	Δ
پارامتر زمانی بدون بعد	τ
فرکانس طبیعی (rad/s)	ω
چگالی (Kg/m^3)	ρ

بالانویس ها

تغییر شکل های مثبت	+
تغییر شکل های منفی	-

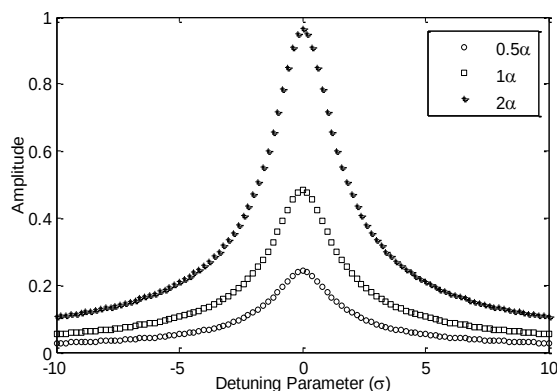
زیر نویس ها

خمشی	t
طولی	l
فلنج	fl

برای محاسبه پاسخ فرکانسی به روش عددی، طیف زمانی پاسخ به ازای فرکانس های تحریک مختلف استخراج و سپس دامنه طیف فرکانسی در فرکانس تحریک به دست آمده است. مشاهده می شود که مطابقت خوبی بین نتایج عددی و نتایج مدل ارائه شده وجود دارد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا معادلات دینامیکی غیرخطی برای سیستمی شامل، دو تیر و اتصال فلنجی تک پیچ استخراج شده است. سپس حل دینامیکی این سیستم با استفاده از روش های عددی و تحلیلی تقریبی به روش اغتشاشات بدست آمده است. معادلات غیرخطی بدست آمده نشان می دهند که دو عامل افزایش سختی کلی اتصال و همچنین کاهش اختلاف سختی مثبت و منفی با کاهش ضریب ترم غیرخطی، موجب خطی تر شدن سیستم می شود. پاسخ غیرخطی سیستم، تحت نوسانات آزاد و اجباری در مجاورت رزونانس اصلی و سوپر هارمونیک و زیر هارمونیک به روش های عددی و اغتشاشات محاسبه و مقایسه شده است. ملاحظه می شود که رفتار سیستم، مشابه با سیستمی دارای سختی توان دوم بوده، هارمونیک های دوم فرکانس تحریک در پاسخ ظاهر می شوند. با محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم مشاهده می شود که وجود اتصال فلنجی همانند سختی نرم شونده، موجب انحراف قله پاسخ فرکانسی به فرکانس های کمتر می شود. با افزایش ضریب ترم غیرخطی و نیروی تحریک، انحراف بیشتر می شود.



شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی سیستم در مجاورت رزونانس سوپر هارمونیک به ازای مقادیر مختلف ضریب غیرخطی

۷- پیوست ۱

ماتریس ضرایب معرفی شده در بخش ۲:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & s(\beta_2 L_2) & c(\beta_2 L_2) & -sh(\beta_2 L_2) & -ch(\beta_2 L_2) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c(\beta_2 L_2) & s(\beta_2 L_2) & ch(\beta_2 L_2) & sh(\beta_2 L_2) \\
 -E_1 I_1 \beta_1^3 c(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2} M_f \omega^2 - K_1) s(\beta_1 L_1) & E_1 I_1 \beta_1^3 s(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2} M_f \omega^2 - K_1) c(\beta_1 L_1) & E_1 I_1 \beta_1^3 ch(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2} M_f \omega^2 - K_1) sh(\beta_1 L_1) & E_1 I_1 \beta_1^3 sh(\beta_1 L_1) + (\frac{1}{2} M_f \omega^2 - K_1) ch(\beta_1 L_1) & 0 & K_1 & 0 & K_1 \\
 \beta_1^3 \emptyset c(\beta_1 L_1) & -\beta_1^3 \emptyset s(\beta_1 L_1) & -\beta_1^3 \emptyset ch(\beta_1 L_1) & -\beta_1^3 \emptyset sh(\beta_1 L_1) & -\beta_2^3 & 0 & -\beta_2^3 & 0 \\
 K_t \beta_1 c(\beta_1 L_1) - \beta_1^2 E_1 I_1 s(\beta_1 L_1) & -K_t \beta_1 s(\beta_1 L_1) - \beta_1^2 E_1 I_1 c(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1 ch(\beta_1 L_1) + \beta_1^2 E_1 I_1 sh(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1 sh(\beta_1 L_1) + \beta_1^2 E_1 I_1 ch(\beta_1 L_1) & -K_t(\beta_2) & 0 & -K_t(\beta_2) & 0 \\
 K_t \beta_1 c(\beta_1 L_1) & -K_t \beta_1 s(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1 ch(\beta_1 L_1) & K_t \beta_1 sh(\beta_1 L_1) & -K_t(\beta_2) & -\beta_2^2 (E_2 I_2) & -K_t(\beta_2) & \beta_2^2 (E_2 I_2)
 \end{bmatrix}$$

bolted flange connection with a gasket. in ASME 2002 Eng. Tech. Conf. on Energy 675-681.

۸- مراجع

- [12] Semke WH, Bibel GD, Jerath S, Gurav SB, Webster AL (2002) A dynamic investigation of piping systems with a bolted flange. in Proceeding of ASME 121-128.
- [13] Semke WH, Bibel GD, Jerath S, Gurav SB, Webster AL (2006) Efficient dynamic structural response modelling of bolted flange piping systems. Int J Press Vessels Pip 83(10): 767-776.
- [14] Luan Y, Guan ZQ, Cheng GD, Liu S (2012) A simplified nonlinear dynamic model for the analysis of pipe structures with bolted flange joints. J Sound Vib 331(2): 325-344.
- [15] Mathan G, Prasad NS (2012) Study of dynamic response of piping system with gasketed flanged joints using finite element analysis. Int J Press Vessels Pip 89(0): 28-32.
- [16] Wu Z, Nassar SA, Yang X (2014) Nonlinear deformation behavior of bolted flanges under tensile, torsional, and bending loads. J Pressure Vessel Technol Trans ASME 136(6): 061201-061201.
- [17] Ahmadian H, Jalali H (2007) Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. Mech Syst Signal Process 21(2): 1041-1050.
- [18] Jalali H, Ahmadian H, Mottershead JE (2007), Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping. Int J Solids Struct 44(25-26): 8087-8105.
- [19] Meisami F, Moavenian M, Afshadfar A, Pishbin SI (2016) analytical and experimental investigation for nonlinear behavior of flange joints under axial and lateral loading. Journal of Solid and Fluid Mechanics 6(3): 43-54. (in Persian)
- [20] Peng ZK, Lang ZQ, Billings SA, Lu Y (2007) Analysis of bilinear oscillators under harmonic loading using nonlinear output frequency response functions. Int J Mech Sci 49(11): 1213-1225.
- [1] Schwingshackl CW, Di Maio D, Sever I, Green JS (2013) Modeling and validation of the nonlinear dynamic behavior of bolted flange joints. J Eng Gas Turbines Power 135(12): 122504-122504.
- [2] Law SS, Wu ZM, Chan SL (2004) Vibration control study of a suspension footbridge using hybrid slotted bolted connection elements. Eng Struct 26(1): 107-116.
- [3] Benedetti M, Garofalo G, Zumpano M, Barboni R (2007) On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyroshock. Acta Astronaut 60(12): 947-956.
- [4] Zapico-Valle JL, Abad-Blasco J, González-Martínez MP, Franco-Gimeno JM, García-Diéguez M (2012) Modelling and calibration of a beam-column joint based on modal data. Comput Struct 108-109(0): 31-41.
- [5] Rezaee MS, Ghazavi MR, Jafari AA, Najafi A (2012) Stability of a system consisting of three-axis connected through Hooke's joints. Modares Mechanical Eng 12(6): 69-79. (in Persian)
- [6] Lavassas I, Nikolaidis G, Zervas P, Efthimiou E, Doudoumis IN, Baniotopoulos CC (2003) Analysis and design of the prototype of a steel 1-MW wind turbine tower. Eng Struct 25(8): 1097-1106.
- [7] Lee SY, Ko KH, Lee J (2000) Analysis of dynamic characteristics of structural joints using stiffness influence coefficients. KSME Int J 14(12): 1319-1327.
- [8] Iranzad M, Ahmadian H (2012) Identification of nonlinear bolted lap joint models. Comput Struct 96-97(0): 1-8.
- [9] Agatonovic P (1985) Beam model of bolted flanged connections. Eng Comput 2(1): 21-29.
- [10] Shi Y, Chan S, Wong Y (1996) Modeling for moment-rotation characteristics for end-plate connections. J Struct Eng 122(11): 1300-1306.
- [11] Semke WH, Bibel GD, Gurav SB, Webster AL, Jerath S (2002) Dynamic response of a pipe having