

## پیش‌گویی فضایی با مدل‌های اتورگرسیو یک‌طرفه در فضای دو بعدی

آزاده مجیری<sup>۱</sup>، یداله واقعی<sup>۱</sup>، حمیدرضا نیلی‌ثانی<sup>۱</sup>، غلامرضا محتشمی بزرادران<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشگاه بیرجند

<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۳/۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۱/۲۶

**چکیده:** یکی از موضوعات مهم در تحلیل داده‌های فضایی، پیش‌گویی مقدار نامعلوم کمیت مورد مطالعه در موقعیت‌های دلخواه بر اساس یکی از مدل‌های فضایی مانند اتورگرسیو فضایی یک‌طرفه، اتورگرسیو شرطی و میانگین متحرک است. در این مقاله ابتدا پارامترهای مدل  $SAR(1, 2)$  را به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد کرده سپس فرمول‌هایی برای پیش‌گویی درون قلمرو داده‌ها (درون‌یابی) و خارج قلمرو داده‌ها (برون‌یابی) به دست آورده می‌شود. سپس کاربرد و کارایی روش‌های ارائه شده در قالب یک مثال مربوط به پردازش تصویر نشان داده خواهد شد. **واژه‌های کلیدی:** داده‌های فضایی، مدل اتورگرسیو فضایی یک‌طرفه، برآورد، پیش‌گویی، درون‌یابی، برون‌یابی.

## ۱ مقدمه

به داده‌های وابسته‌ای که از موقعیت‌های فضایی مختلف به دست می‌آیند، داده‌های فضایی گفته می‌شوند. در مورد داده‌های فضایی علاوه بر مقدار متغیر مورد نظر، مختصات فضایی ثابت و در تحلیل‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد. موقعیت فضایی مشاهدات ممکن است نقطه‌ای یا ناحیه‌ای، منظم یا نامنظم باشد. داده‌های شبکه‌ای نوع خاصی از داده‌های فضایی هستند که موقعیت فضایی داده‌ها به صورت ناحیه‌ای است، این مکان‌ها می‌تواند منظم یا نامنظم باشند. اگر مکان‌ها هم‌شکل و هم‌اندازه باشند ناحیه‌ها منظم و

---

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: یداله واقعی، ywaghei@birjand.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62M30, 91B72

در غیر این صورت نامنظم‌اند. داده‌های حاصل از اسکن یک تصویر و داده‌های جمع‌آوری شده از آزمایشات مزرعه کشاورزی روی کرت‌های منظم نمونه‌ای از داده‌های شبکه‌ای منظم و تعداد افراد مبتلا به یک نوع سرطان در شهرستان‌های مختلف کشور مثالی برای داده‌های شبکه‌ای نامنظم می‌باشند (محمدزاده، ۱۳۹۴).

مدل‌سازی فضایی داده‌های شبکه‌ای در بسیاری از مسائل علمی کاربرد دارند. برای مثال اغلب داده‌های جمع‌آوری شده حاصل از پردازش تصویر، اپیدمیولوژی، نجوم، علوم زمین، علوم زراعت، جنگل‌داری و علوم خاک، شبکه‌ای می‌باشند. نمونه‌ای از مطالعات بر روی داده‌های شبکه‌ای فضایی عبارتند از بسج (۱۹۷۴)، بارتلت (۱۹۷۸)، کرسی (۱۹۹۳)، باسو و راینسل (۱۹۹۳، ۱۹۹۴) و گرایو و لو (۲۰۰۴).

معمولاً تعمیم مدل‌های سری زمانی از فضای یک بعدی به فضای دو بعدی برای مدل‌سازی داده‌های شبکه‌ای استفاده می‌شود. اولین بار مدل اتورگرسیو همزمان<sup>۱</sup> توسط ویتل (۱۹۵۴) معرفی گردید. باستوس و همکاران (۱۹۸۴) و باسو و راینسل (۱۹۹۳) خواص مدل‌های SAR فضایی یک‌طرفه مرتبه اول را به دست آوردند. مارتین (۱۹۷۹، ۱۹۹۶)، کولیس و گلیسون (۱۹۹۱) و باسو و همکاران (۱۹۹۲) مدل‌های ARMA فضایی تفکیک‌پذیر (ضربی) معرفی کردند.

در حالت کلی فرض کنید داده‌های شبکه‌ای منظم در  $m$  ردیف افقی و  $n$  ردیف عمودی قرار گرفته باشند. متغیرها را به صورت  $\{Z_{ij}; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  نمایش می‌دهیم.  $i$  شماره ردیف افقی و  $j$  شماره ردیف عمودی مربوط به موقعیت متغیر را نشان می‌دهند که نقش طول و عرض نقاط را در فضای دو بعدی بازی می‌کنند. نسبت به هر نقطه مثل  $(i, j)$  مشاهدات را می‌توان مانند محور مختصات به چهار ربع تقسیم نمود.

مدل اتورگرسیو یک‌طرفه مرتبه اول ( $AR(1, 1)$ ) در فضای دو بعدی (بر روی سطح) به صورت

$$Z_{i,j} = \alpha_{1,0} Z_{i-1,j} + \alpha_{0,1} Z_{i,j-1} + \alpha_{1,1} Z_{i-1,j-1} + \varepsilon_{i,j}; \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

تعریف می‌شود، که در آن  $\varepsilon_{i,j}$ ها متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس متناهی  $\sigma^2$  هستند (گنتون و کول، ۲۰۰۸). همچنین فرض می‌شود  $E[Z_{i,j} \varepsilon_{i,j}] = \sigma^2$  و  $E[Z_{k,\ell} \varepsilon_{i,j}] = 0$  برای  $k < i$  یا  $\ell < j$  است.

در سری زمانی مفاهیم گذشته و آینده به وضوح مشخص است اما برای فرآیندهای فضایی چنین مفاهیمی به طور طبیعی وجود ندارد. برای رفع این مشکل مدل (۱) را برای  $i, j \geq 0$  در نظر گرفته و

<sup>1</sup>Simultaneous Autoregressive

تجستیم (۱۹۷۸، ۱۹۸۳) آنرا، مدل اتورگرسیو ربع صفحه مرتبه اول<sup>۲</sup>  $(QAR(1, 1))$  نامیده است. ولی سایر نویسندگان مانند باتاچاریا (۱۹۹۷) و باران و پاپ (۲۰۱۲) مدل (۱) را مدل اتورگرسیو فضایی<sup>۳</sup> یک طرفه مرتبه اول  $(SAR(1, 1))$  نامیده‌اند. مارتین (۱۹۷۹) این مدل را با  $\alpha_{1,1} = -\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$  مدل اتورگرسیو یک طرفه مرتبه اول تفکیک‌پذیر  $(AR(1) * AR(1))$  نامید.

مدل‌های اتورگرسیو یک طرفه برای وقایعی که بر روی یک سطح جهت‌دار اتفاق افتاده باشند از جمله آلاینده‌های زیست محیطی منتقل شده مفید هستند. همچنین مدل‌های SAR از مدل‌های اتورگرسیو همزمان (ویتل، ۱۹۵۴) و مدل‌های اتورگرسیو شرطی<sup>۴</sup> CAR (بارتلت، ۱۹۷۱؛ بسج، ۱۹۷۴) ساده‌تر هستند (گنتون و کول، ۲۰۰۸).

یکی از مهم‌ترین مسائل در مورد مدل‌های اتورگرسیو فضایی برآورد پارامترهای مدل است. اکثر مطالعات بر روی برآورد پارامترهای این مدل‌ها با فرض نرمال بودن  $\varepsilon_{i,j}$  است (گریفیت، ۲۰۰۴؛ یائو و براکول، ۲۰۰۶؛ داویدوف و پائولاسکاس، ۲۰۰۸). برای برآورد پارامترهای مدل‌های اتورگرسیو فضایی معمولاً از سه روش ماکسیمم درست‌نمایی، کمترین توان‌های دوم یا یول واکر<sup>۵</sup> استفاده می‌شود. تجستیم (۱۹۷۸)، باسو و راینسل (۱۹۹۲) و آوانگ و شیتان (۲۰۰۶) برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو فضایی مرتبه اول را به روش یول واکر محاسبه کردند. پارامترهای مدل‌های اتورگرسیو فضایی مرتبه اول توسط اُرد (۱۹۷۵) و هاینینگ (۱۹۷۸) به روش ماکسیمم درست‌نمایی و کمترین توان‌های دوم خطا برآورد گردید. گوریانوف (۲۰۱۱) برآوردهایی با کمترین مقدار قدر مطلق<sup>۶</sup> را برای مدل اتورگرسیو فضایی مرتبه اول ارائه داد.

پس از برآورد پارامترهای مدل مسئله مهم در آمار فضایی، پیش‌گویی مقدار نامعلوم میدان تصادفی در موقعیت مشخص  $(k, s)$  بر اساس سایر مشاهدات است. به طور معمول با فرض مانایی میدان تصادفی پیش‌گویی بهینه از می‌نیم کردن میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی به دست آورده می‌شود که همان میانگین شرطی  $\hat{Z}_{k,s} = E[Z_{k,s} | \mathbf{Z}]$  که  $(i, j) \neq (k, s)$  است (کرسی، ۱۹۹۳). اما محاسبه این پیشگو مستلزم استفاده از توزیع احتمال  $Z_{k,s}$  به شرط  $\{ (k, s) \}$  سایر مشاهدات است که در عمل محاسبه چنین توزیع‌هایی به سادگی امکان‌پذیر نیست مگر آن‌که فرض‌های ساده‌کننده‌ای برای مدل در نظر گرفته شود. فرضی که به طور معمول در نظر گرفته می‌شود نرمال بودن

<sup>۲</sup>First-Order Quadrant-Plane Autoregressive

<sup>۳</sup>Spatial Autoregressive

<sup>۴</sup>Conditional Autoregressive

<sup>۵</sup>Yule Walker

<sup>۶</sup>Least Modules

خطاهاست در این صورت توزیع توام  $Z_{k,s}$  ها گاوسی شده و محاسبه آن ساده‌تر می‌گردد.

در مورد پیش‌گویی مدل‌های اتورگرسیو فضایی مطالعات چندانی انجام نشده است. باسو و راینسل (۱۹۹۳) خواص امید ریاضی شرطی مدل‌های  $SAR(1, 1)$  یک‌طرفه را بررسی کرده‌اند و با استفاده از کل داده‌ها به جز داده مورد نظر روشی برای پیش‌گویی مدل  $SAR(1, 1)$  پیشنهاد داده‌اند. در روش آن‌ها  $\hat{Z}_{k,s}$  ترکیب خطی از ۸ نقطه  $(Z_{k+1,s}, Z_{k-1,s}, Z_{k+1,s+1}, Z_{k-1,s+1}, Z_{k+1,s-1}, Z_{k-1,s-1}, Z_{k,s+1}, Z_{k,s-1})$  در نزدیک‌ترین همسایگی نقطه پیش‌گویی است. در این مقاله نخست برآورد پارامترهای مدل  $SAR(2, 1)$ ، بر اساس ایده ماکسیم درستی در حالتی که میانگین نامعلوم باشد به دست آورده و یک الگوریتم برای برآورد پارامترها ارائه می‌شود. سپس ایده پیش‌گویی باسو و راینسل (۱۹۹۳) در مدل  $SAR(1, 1)$  را برای مدل  $SAR(2, 1)$  تعمیم داده و در کنار آن ایده جدیدی مبتنی بر پیش‌گویی به کمک مشاهدات ربع سوم صفحه ارائه می‌شود. به دلایلی که در ادامه خواهید دید این روش برای پیش‌گویی خارج از قلمرو داده‌ها می‌تواند مفیدتر از روش باسو و راینسل باشد. در نهایت کاربرد روش‌های ارائه شده برای پیش‌گویی در داخل و خارج قلمرو داده‌ها را در قالب یک مساله پردازش تصویر نشان داده و خطاهای پیش‌گویی در تصویر مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

## ۲ برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو فضایی

مدل اتورگرسیو فضایی یک‌طرفه ربع سوم  $(SAR(p_1, p_2))$  را می‌توان به صورت

$$\Phi(B_1, B_2)Z_{i,j} = \varepsilon_{i,j}; \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

نوشت، که در آن  $\alpha_{\cdot, \cdot} = 0$  است. همچنین  $B_1$  و  $B_2$  به ترتیب عملگرهای پسر افقی و عمودی به صورت  $B_1^k Z_{i,j} = Z_{i-k,j}$  و  $B_2^\ell Z_{i,j} = Z_{i,j-\ell}$  هستند. باسو و راینسل (۱۹۹۳) مدل (۲) را مدل اتورگرسیو فضایی یک‌طرفه ربع پایین<sup>۷</sup> نامیدند. با قرار دادن  $p_1 = 2$  و  $p_2 = 1$  در مدل (۲) مدل اتورگرسیو فضایی یک‌طرفه مرتبه دوم،  $SAR(2, 1)$  به دست می‌آید. برای ساده‌تر شدن نمادها، فرض کنید  $\alpha_1 = \alpha_{1,0} = \alpha_2, \alpha_{1,1} = \alpha_3, \alpha_{0,1} = \alpha_2, \alpha_{1,0} = \alpha_1, \alpha_{2,1} = \alpha_5$  و  $\alpha_{2,0} = \alpha_4$ .

<sup>7</sup>Lower Quadrant

در این صورت برای مدل  $SAR(2, 1)$  داریم:

$$Z_{i,j} = \alpha_1 Z_{i-1,j} + \alpha_2 Z_{i,j-1} + \alpha_3 Z_{i-1,j-1} + \alpha_4 Z_{i-2,j} + \alpha_5 Z_{i-2,j-1} + \varepsilon_{i,j}. \quad (3)$$

به منظور برآورد پارامترها و پیش‌گویی، بهتر است مدل (۳) به فرم ماتریسی بیان شود. فرض کنید برای مجموعه داده‌های مشبکه‌ای منظم،  $\mathbf{Z} = (Z_{1,1}, Z_{1,2}, \dots, Z_{1,n}, \dots, Z_{m,1}, Z_{m,2}, \dots, Z_{m,n})'$  و  $\varepsilon = (\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{1,2}, \dots, \varepsilon_{1,n}, \dots, \varepsilon_{m,1}, \varepsilon_{m,2}, \dots, \varepsilon_{m,n})'$  و  $N = m \times n$  بردارهایی باشند. در رابطه (۳)، فرض شده است که  $E(\varepsilon_{i,j}) = 0$  لذا تحت پذیرش مانایی مدل می‌توان نتیجه گرفت  $E(Z_{i,j}) = 0$ .

وقتی مدل  $SAR(2, 1)$  برای  $i = 1, 2, \dots, m$  و  $j = 1, 2, \dots, n$  نوشته شود برای برخی از  $i$  و  $j$ ها  $Z_{i,j}$  به  $Z_{i,0}$ ،  $Z_{0,j}$  یا  $Z_{-1,j}$  وابسته است که مشاهده نمی‌شوند به این داده‌ها، داده مرزی گفته می‌شود. از آنجایی که این داده‌ها قابل مشاهده نیستند، برای سادگی در محاسبات داده‌های مرزی صفر در نظر گرفته می‌شود (یعنی  $j = 0, \dots, n$  و  $Z_{-1,j} = 0$ ؛  $i = 1, \dots, m$  و همین‌طور  $i = 1, \dots, m$  و  $Z_{i,0} = 0$ ). مدل (۳) را برای  $i = 1, \dots, m$  و  $j = 1, \dots, n$  می‌توان به فرم ماتریسی

$$\mathbf{Z} = \mathbf{AZ} + \varepsilon \rightarrow (\mathbf{I}_N - \mathbf{A}) \mathbf{Z} = \varepsilon, \quad (4)$$

نوشت (آوانگ و شیتان، ۲۰۰۶)، که در آن  $\mathbf{I}_N$  ماتریس همانی  $N \times N$ ،  $\mathbf{A}$  یک ماتریس  $N \times N$  پارامتری با عناصر صفر روی قطر اصلی است.

ماتریس پارامتری  $\mathbf{A}$  را می‌توان به پنج ماتریس مجزا به صورت

$$\mathbf{A} = (\alpha_1 \mathbf{W}_1 + \alpha_2 \mathbf{W}_2 + \alpha_3 \mathbf{W}_3 + \alpha_4 \mathbf{W}_4 + \alpha_5 \mathbf{W}_5)$$

تجزیه کرد، که در آن  $\mathbf{W}_i$  ها ماتریس‌هایی  $N \times N$  با عناصر صفر و یک به صورت

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{L}_m \otimes \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{L}_n, \quad \mathbf{W}_3 = \mathbf{L}_m \otimes \mathbf{L}_n, \quad \mathbf{W}_4 = \mathbf{K}_m \otimes \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{W}_5 = \mathbf{K}_m \otimes \mathbf{L}_n,$$

هستند. همچنین  $\mathbf{I}_n$  ماتریس همانی  $n \times n$ ،  $\mathbf{L}_n$  ماتریسی  $n \times n$  با عناصر یک در مکان  $(i, i-1)$  و صفر بقیه جاها و  $\mathbf{K}_m$  ماتریسی  $m \times m$  با عناصر یک در مکان  $(i, i-2)$  و صفر سایر جاها می‌باشد.

در صورتی که  $E(Z_{i,j}) = \mu$ ، مشابه مدل‌های اتورگرسیو سری زمانی مدل (۳) به صورت

$$(Z_{i,j} - \mu) = \alpha_1 (Z_{i-1,j} - \mu) + \alpha_2 (Z_{i,j-1} - \mu) + \alpha_3 (Z_{i-1,j-1} - \mu) + \alpha_4 (Z_{i-2,j} - \mu) + \alpha_5 (Z_{i-2,j-1} - \mu) + \varepsilon_{i,j},$$

نوشته می‌شود. مشابه الگوی ماتریسی (۴) با استفاده از  $\mu$  به جای داده‌های مرزی فرم ماتریسی مدل (۵) به صورت

$$(\mathbf{I}_N - \mathbf{A})(\mathbf{Z} - \mu\mathbf{1}) = \varepsilon, \quad (5)$$

است، که در آن  $\mathbf{1}$  برداری  $1 \times N$  با عناصر یک است. فرض کنید  $\varepsilon_{ij}$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع  $N(0, \sigma^2)$  باشند، در این صورت  $\varepsilon \sim N_{mn}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ . با استفاده از رابطه (۵)،  $\mathbf{Z}$  دارای توزیع  $N_{mn}(\mu\mathbf{1}, \Gamma)$  با ماتریس کواریانس

$$\Gamma = \text{Cov}(\mathbf{Z}) = (\mathbf{I}_N - \mathbf{A})^{-1} \sigma^2 \mathbf{I}_N (\mathbf{I}_N - \mathbf{A}')^{-1}$$

است. همچنین  $|\Gamma|^{\frac{1}{v}} = (\sigma^2)^{\frac{N}{v}} |(\mathbf{I}_N - \mathbf{A})^{-1}|$  و  $|(\mathbf{I}_N - \mathbf{A})^{-1}| = 1$ ، زیرا  $(\mathbf{I}_N - \mathbf{A})$  ماتریس پایین مثلثی با عناصر یک روی قطر اصلی است. با فرض  $\mathbf{B} = (\mathbf{I}_N - \mathbf{A})$ ، لگاریتم تابع درستنمایی مدل (۵) برای  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)'$  عبارتست از:

$$\ell(\alpha, \mu, \sigma^2; \mathbf{z}) = -\frac{N}{v} \ln(2\pi) - \frac{N}{v} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \{(\mathbf{z} - \mu\mathbf{1})' \mathbf{B}' \mathbf{B} (\mathbf{z} - \mu\mathbf{1})\}.$$

با صفر قرار دادن مشتق لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به  $\alpha_i$  برای  $i = 1, \dots, 5$  و با فرض این‌که،  $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} - \mu\mathbf{1}$  و  $\mathbf{S}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{Y}$  باشد، داریم:

$$2\alpha_i \mathbf{S}_i' \mathbf{S}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{S}_i' \mathbf{S}_j + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{S}_j' \mathbf{S}_i = \mathbf{Y}' \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i' \mathbf{Y}; \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (6)$$

از آنجایی که جملات رابطه (۶) اسکالر هستند، لذا این رابطه را می‌توان به صورت ساده‌تر

$$\alpha_i \mathbf{S}'_i \mathbf{S}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{S}'_i \mathbf{S}_j = \mathbf{S}'_i \mathbf{Y}; \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (7)$$

نوشت که فرم ماتریسی آن

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}'_1 \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}'_1 \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}'_1 \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}'_1 \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}'_1 \mathbf{S}_5 \\ \mathbf{S}'_2 \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}'_2 \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}'_2 \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}'_2 \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}'_2 \mathbf{S}_5 \\ \mathbf{S}'_3 \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}'_3 \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}'_3 \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}'_3 \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}'_3 \mathbf{S}_5 \\ \mathbf{S}'_4 \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}'_4 \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}'_4 \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}'_4 \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}'_4 \mathbf{S}_5 \\ \mathbf{S}'_5 \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}'_5 \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}'_5 \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}'_5 \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}'_5 \mathbf{S}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}'_1 \mathbf{Y} \\ \mathbf{S}'_2 \mathbf{Y} \\ \mathbf{S}'_3 \mathbf{Y} \\ \mathbf{S}'_4 \mathbf{Y} \\ \mathbf{S}'_5 \mathbf{Y} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

است. با افراز  $\mathbf{X}^* = [\mathbf{S}_1 | \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_3 | \mathbf{S}_4 | \mathbf{S}_5]$ ، برآورد پارامتر  $\alpha$  از رابطه

$$\hat{\alpha} = (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*'} (\mathbf{Z} - \hat{\mu} \mathbf{1}). \quad (9)$$

به دست می‌آید. به منظور برآورد  $\mu$  و  $E(Z_{i,j}) = \mu$  و مشتقات تابع لگاریتم درست‌نمایی نسبت به  $\mu$  و  $\sigma^2$  برابر صفر قرار داده می‌شود، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \mu, \sigma^2; \mathbf{z})}{\partial \mu} &= -\mathbf{1}' \mathbf{B}' \mathbf{B} \mathbf{z} + \mathbf{1}' \mu \mathbf{1}' \mathbf{B}' \mathbf{B} \mathbf{1} = 0, \\ \Rightarrow \hat{\mu} &= \frac{\mathbf{1}' \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}}{\mathbf{1}' \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{1}} \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \mu, \sigma^2; \mathbf{z})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \{(\mathbf{z} - \mu \mathbf{1})' \mathbf{B}' \mathbf{B} (\mathbf{z} - \mu \mathbf{1})\} = 0, \\ \Rightarrow \hat{\sigma}^2 &= \frac{\{(\mathbf{Z} - \hat{\mu} \mathbf{1})' \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}} (\mathbf{Z} - \hat{\mu} \mathbf{1})\}}{N}, \end{aligned} \quad (11)$$

که در این روابط  $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{I}_N - \hat{\mathbf{A}}) = (\mathbf{I}_N - \hat{\alpha}_1 \mathbf{W}_1 - \hat{\alpha}_2 \mathbf{W}_2 - \hat{\alpha}_3 \mathbf{W}_3 - \hat{\alpha}_4 \mathbf{W}_4 - \hat{\alpha}_5 \mathbf{W}_5)$

توجه شود که در روابط (۹) و (۱۰)،  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\mu}$  وابسته‌اند لذا برآورد پارامترها به صورت صریح و با فرمول بسته به گونه‌ای که بر حسب داده‌ها قابل محاسبه باشند، به دست نمی‌آیند. برای رفع این مشکل به عنوان برآورد اولیه  $\mu$ ،  $\bar{Z} = \hat{\mu}_0$  قرار داده و بردار  $Y = Z - \hat{\mu}_0 \mathbf{1}$  محاسبه می‌گردد سپس الگوریتم ۱ به کار گرفته می‌شود:

### الگوریتم ۱.

• گام ۱.  $\hat{\alpha}$  با استفاده از رابطه (۹) برآورد شود.

• گام ۲. با استفاده از  $\hat{\alpha}$  در گام ۱

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{I}_N - \hat{\mathbf{A}}) = (\mathbf{I}_N - \hat{\alpha}_1 \mathbf{W}_1 - \hat{\alpha}_2 \mathbf{W}_2 - \hat{\alpha}_3 \mathbf{W}_3 - \hat{\alpha}_4 \mathbf{W}_4 - \hat{\alpha}_5 \mathbf{W}_5)$$

محاسبه شده و  $\hat{\mu}$  از رابطه (۱۰) برآورد گردد.

• گام ۳.  $\hat{\sigma}^2$  با استفاده از روابط (۱۱) برآورد شود.

• گام ۴. بردار  $Y = Z - \hat{\mu}_0 \mathbf{1}$  و  $S_i = W_i Y$  محاسبه گردد.

گام‌های ۱ تا ۴ را تا زمانی که  $c < \max_j \left( \frac{|\hat{\theta}_j^{i-1} - \hat{\theta}_j^i|}{|\hat{\theta}_j^{i-1}|} \right) < c$  تکرار کنید که  $c = 0.01\%$  مشخص کننده ماکسیمم خطای نسبی برآورد پارامترها در مرحله  $i$  است و معمولاً یک عدد کوچک اختیار می‌شود.

### ۳ پیش‌گویی توسط مدل $SAR(2, 1)$

در سری زمانی مهم‌ترین هدف بعد از مدل‌سازی رفتار سری، پیش‌گویی آینده سری (نقاط بیرون قلمرو داده‌ها) است. گاهی برای سنجش دقت مدل یا هموارسازی داده‌ها مقدار متغیر را درون قلمرو داده‌ها به کمک مقادیر قبل از آن پیش‌گویی می‌کنند. در تحلیل داده‌های شبکه‌ای نیز به طور مشابه پیش‌گویی معمولاً برای مقادیر خارج قلمرو داده‌ها (که نقش مقادیر آینده را در سری زمانی دارند) انجام می‌شود. گاهی به منظور ارزیابی دقت مدل‌سازی و پیش‌گویی یا در پردازش تصویر به جهت بازسازی تصویر، پیش‌گویی در قلمرو داده‌ها نیز انجام می‌شود، یعنی همه یا برخی از داده‌هایی که درون شبکه قرار دارند پیش‌گویی می‌گردند. در پیش‌گویی درون قلمرو داده‌ها (درون‌یابی) بسته به این‌که از کل داده‌ها یا از داده‌های ربع سوم



استفاده شود به دو صورت می‌توان پیش‌گویی را انجام داد. در این بخش حالت‌های مختلف پیش‌گویی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۱.۳ پیش‌گویی متغیر در قلمرو داده‌ها

در بحث پیش‌گویی متغیر در قلمرو داده‌ها دو ایده مد نظر است. اولین ایده مربوط به باسو و راینسل (۱۹۹۳) است. آن‌ها با استفاده از مدل  $SAR(1, 1)$  و کل داده‌ها به جز داده مورد نظر، پیش‌گویی  $Z_{k,s}$  را به صورت

$$\hat{Z}_{k,s} = \frac{1}{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} \left( (\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3) (Z_{k-1,s} + Z_{k+1,s}) + (\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3) (Z_{k,s-1} + Z_{k,s+1}) + \alpha_3 (Z_{k-1,s-1} + Z_{k+1,s+1}) - \alpha_1\alpha_2 (Z_{k-1,s+1} + Z_{k+1,s-1}) \right),$$

معرفی کردند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود  $\hat{Z}_{k,s}$  ترکیب خطی از ۸ مشاهده در نزدیک‌ترین همسایگی نقطه پیش‌گویی است.

الف- روش اول: پیش‌گویی بر اساس کل مشاهدات به جز مشاهده مورد پیش‌گویی با توجه به فرضیاتی که در بخش قبل برای  $\varepsilon_{i,j}$  در نظر گرفته شد تابع چگالی توام  $\mathbf{Z}$  بر اساس مدل (۴) به صورت

$$f(\mathbf{z}; \alpha, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbf{z}' (\mathbf{I}_N - \mathbf{A})' (\mathbf{I}_N - \mathbf{A}) \mathbf{z} \right) \right\} \quad (12)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \varepsilon' \varepsilon \right\},$$

است. با فرض مانایی میدان تصادفی پیش‌گویی بهینه مقدار نامعلوم میدان تصادفی در موقعیت مشخص  $(k, s)$  بر اساس سایر مشاهدات از می‌نیم کردن میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی،  $E[Z_{k,s} - \hat{Z}_{k,s}]^2$  نسبت به  $\hat{Z}_{k,s}$  به دست می‌آید، که در آن

$$\hat{Z}_{k,s} = E[Z_{k,s} | Z_{i,j}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, (i, j) \neq (k, s)].$$

از طرفی با توجه به خواص توزیع نرمال چندمتغیره  $\hat{Z}_{k,s}$  با ماکسیم کردن تابع چگالی توام داده‌ها نسبت به  $Z_{k,s}$ ، به دست می‌آید. همچنین ماکسیم کردن تابع چگالی توام (۱۲) معادل می‌نیم کردن مجموع

توان‌های دوم خطاها یعنی  $\varepsilon' \varepsilon = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}^2$  است، که در رابطه (۳) تعریف شده است. پس از بازنویسی این عبارت و با نوشتن جملاتی که به  $Z_{k,s}$  وابسته هستند، داریم:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}^2 = \varepsilon_{1,1}^2 + \dots + \varepsilon_{k,s}^2 + \varepsilon_{k+1,s}^2 + \varepsilon_{k,s+1}^2 + \varepsilon_{k+1,s+1}^2 + \varepsilon_{k+2,s}^2 + \varepsilon_{k+2,s+1}^2 + \dots + \varepsilon_{m,n}^2. \quad (13)$$

مشتق رابطه (۱۳) نسبت به  $Z_{k,s}$  را می‌توان به صورت

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}^2}{\partial Z_{k,s}} = 2 \left( \frac{\partial \varepsilon_{k,s}}{\partial Z_{k,s}} \varepsilon_{k,s} + \frac{\partial \varepsilon_{k+1,s}}{\partial Z_{k,s}} \varepsilon_{k+1,s} + \frac{\partial \varepsilon_{k,s+1}}{\partial Z_{k,s}} \varepsilon_{k,s+1} + \frac{\partial \varepsilon_{k+1,s+1}}{\partial Z_{k,s}} \varepsilon_{k+1,s+1} + \frac{\partial \varepsilon_{k+2,s}}{\partial Z_{k,s}} \varepsilon_{k+2,s} + \frac{\partial \varepsilon_{k+2,s+1}}{\partial Z_{k,s}} \varepsilon_{k+2,s+1} \right) = 0, \quad (14)$$

نوشت. با توجه به این‌که

$$\varepsilon_{k,s} = Z_{k,s} - \alpha_1 Z_{k-1,s} - \alpha_2 Z_{k,s-1} - \alpha_3 Z_{k-1,s-1} - \alpha_4 Z_{k-2,s} + \alpha_5 Z_{k-2,s-1},$$

داریم:

$$\varepsilon_{k,s} - \alpha_1 \varepsilon_{k+1,s} - \alpha_2 \varepsilon_{k,s+1} - \alpha_3 \varepsilon_{k+1,s+1} - \alpha_4 \varepsilon_{k+2,s} - \alpha_5 \varepsilon_{k+2,s+1} = 0. \quad (15)$$

مشابه تعریف عملگرهای پسرو در بخش ۲، اگر  $B_1^{-1}$  و  $B_2^{-1}$  به ترتیب عملگرهای پیشرو افقی و عمودی به صورت  $B_1^{-1} Z_{i,j} = Z_{i,j+1}$ ،  $B_2^{-1} Z_{i,j} = Z_{i+1,j}$  بوده و

$$\Phi(B_1^{-1}, B_2^{-1}) = (1 - \alpha_1 B_1^{-1} - \alpha_2 B_2^{-1} - \alpha_3 B_1^{-1} B_2^{-1} - \alpha_4 B_1^{-2} - \alpha_5 B_1^{-2} B_2^{-1}),$$

باشد. آن‌گاه رابطه (۱۵) را می‌توان به صورت ساده‌تر  $\Phi(B_1^{-1}, B_2^{-1}) \varepsilon_{k,s} = 0$  نوشت که با جای‌گذاری  $\varepsilon_{k,s} = \Phi(B_1, B_2) Z_{k,s}$  داریم:

$$\Phi(B_1^{-1}, B_2^{-1}) \Phi(B_1, B_2) Z_{k,s} = 0. \quad (16)$$

بالاخره بعد از یک سری عملیات جبری و ساده کردن، پیش‌گویی  $Z_{k,s}$  که ترکیب خطی از ۱۴ مشاهده اطراف است برای  $k = 3, \dots, m - 2$  و  $s = 2, \dots, n - 1$  به صورت

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{k,s} = & \frac{1}{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2} \left( (\alpha_1 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_5) \right. \\ & (Z_{k-1,s} + Z_{k+1,s}) + (\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_4\alpha_5) (Z_{k,s-1} + Z_{k,s+1}) \\ & - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) (Z_{k-1,s+1} + Z_{k+1,s-1}) + (\alpha_3 - \alpha_1\alpha_5) \quad (17) \\ & (Z_{k-1,s-1} + Z_{k+1,s+1}) + (\alpha_4 - \alpha_2\alpha_5) (Z_{k-2,s} + Z_{k+2,s}) \\ & \left. - \alpha_2\alpha_4 (Z_{k-2,s+1} + Z_{k+2,s-1}) + \alpha_5 (Z_{k-2,s-1} + Z_{k+2,s+1}) \right), \end{aligned}$$

به دست می‌آید. همان‌طور که ملاحظه می‌شود علاوه بر مشاهدات ربع سوم  $(Z_{k-1,s-1}, Z_{k,s-1}, Z_{k-1,s})$  و  $(\dots)$  از مشاهدات ربع دوم  $(Z_{k,s}, Z_{k,s}, Z_{k+1,s}, Z_{k+1,s}, Z_{k+1,s+1}, Z_{k+2,s}, \dots)$  استفاده شده است.

ب- روش دوم: پیش‌گویی بر اساس مشاهدات ربع سوم

در این بخش پیش‌گویی مقدار متغیر در موقعیت مشخص داخل قلمرو داده‌ها با استفاده از میانگین  $Z_{k,s}$  به شرط مشاهدات واقع در ربع سوم محاسبه می‌شود. لذا پیش‌گویی مدل (۳) بر اساس چنین روشی برای  $k = 3, \dots, m$  و  $s = 2, \dots, n$  به صورت

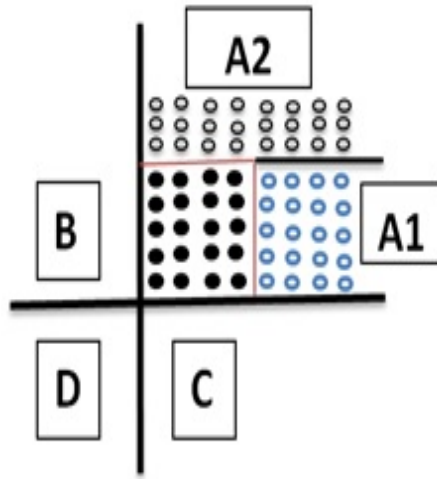
$$\begin{aligned} \hat{Z}_{k,s} &= E \left[ Z_{k,s} | Z_{i,j} = z_{i,j}; i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, s, (i,j) \neq (k,s) \right] \\ &= \alpha_1 z_{k-1,s} + \alpha_2 z_{k,s-1} + \alpha_3 z_{k-1,s-1} + \alpha_4 z_{k-2,s} + \alpha_5 z_{k-2,s-1}, \quad (18) \end{aligned}$$

است، زیرا  $E[\varepsilon_{k,s} | Z_{i,j} = z_{i,j}; i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, s, (i,j) \neq (k,s)] = 0$  لازم به ذکر است که اگر  $E(Z_{i,j}) = \mu$ ، آنگاه کافی است در پیش‌گویی‌ها همه‌جا از  $Z_{i,j}^* = Z_{i,j} - \mu$  به جای  $Z_{i,j}$  استفاده شود.

### ۲.۳ پیش‌گویی در خارج قلمرو داده‌ها

همان‌طور که در سری زمانی برای پیش‌گویی مقدار سری برای  $k$  واحد زمانی بعد از آخرین مشاهده، از کل مشاهدات سری زمانی استفاده می‌شود در این جا نیز برای پیش‌گویی متغیر در خارج قلمرو داده‌ها از کل

مشاهدات، یعنی  $\mathbf{Z} = (Z_{1,1}, Z_{1,2}, \dots, Z_{1,n}, Z_{2,1}, Z_{2,2}, \dots, Z_{2,n}, \dots, Z_{m,1}, Z_{m,2}, \dots, Z_{m,n})'$  استفاده می‌شود. برای پیش‌گویی  $Z_{k,s}$  (برای  $k > m$  یا  $s > n$ ) از  $E[Z_{k,s} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$  استفاده می‌شود. نخست نحوه پیش‌گویی نقاط واقع در ناحیه  $A_1$  و سپس نقاط واقع در ناحیه  $A_2$  در شکل ۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. چنان‌چه همانند قبل مشاهدات مرزی برابر صفر قرار داده شوند، آن‌گاه



شکل ۱. نواحی پیش‌گویی خارج قلمرو داده‌ها

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{m+1,1} &= E[\alpha_1 Z_{m,1} + \alpha_2 Z_{m+1,0} + \alpha_3 Z_{m,0} + \alpha_4 Z_{m-1,1} \\ &+ \alpha_5 Z_{m-1,0} + \varepsilon_{m+1,1} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] \\ &= \alpha_1 z_{m,1} + \alpha_4 z_{m-1,1}. \end{aligned} \quad (19)$$

نتیجه می‌شود. برای محاسبه پیش‌گویی اولین نوار عمودی به صورت

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{m+1,s} &= E[\alpha_1 Z_{m,s} + \alpha_2 Z_{m+1,s-1} + \alpha_3 Z_{m,s-1} + \alpha_4 Z_{m-1,s} \\ &+ \alpha_5 Z_{m-1,s-1} + \varepsilon_{m+1,s} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] \\ &= \alpha_1 z_{m,s} + \alpha_2 E[Z_{m+1,s-1} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] + \alpha_3 z_{m,s-1} + \alpha_4 z_{m-1,s} \\ &+ \alpha_5 z_{m-1,s-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

عمل می‌شود. مقدار  $\hat{Z}_{m+1,s-1} = E[Z_{m+1,s-1} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$  با استفاده از رابطه بازگشتی به صورت

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{m+1,s-1} &= E[\alpha_1 Z_{m,s-1} + \alpha_2 Z_{m+1,s-2} + \alpha_3 Z_{m,s-2} + \alpha_4 Z_{m-1,s-1} \\ &\quad + \alpha_5 Z_{m-1,s-2} + \varepsilon_{m+1,s-1} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] \quad (21) \\ &= \alpha_1 (z_{m,s-1} + \alpha_2 z_{m,s-2} + \dots + \alpha_4^{s-2} z_{m,2}) + \alpha_4^{s-2} E[Z_{m+1,1} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] \\ &\quad + \alpha_3 (z_{m,s-2} + \alpha_2 z_{m,s-3} + \dots + \alpha_4^{s-3} z_{m,1}) \\ &\quad + \alpha_4 (z_{m-1,s-1} + \alpha_2 z_{m-1,s-2} + \dots + \alpha_4^{s-3} z_{m-1,2}) \\ &\quad + \alpha_5 (z_{m-1,s-2} + \alpha_2 z_{m-1,s-3} + \dots + \alpha_4^{s-3} z_{m-1,1}), \end{aligned}$$

به دست می‌آید. با جای‌گذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۲۱) و رابطه (۲۱) در رابطه (۲۰) پیش‌گویی نوار عمودی اول، اولین ستون داده‌های ناحیه  $A_1$  در شکل ۱ برای  $s = 2, \dots, n$  حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{m+1,s} &= \alpha_1 (z_{m,s} + \alpha_2 z_{m,s-1} + \alpha_4 z_{m,s-2} + \dots + \alpha_4^{s-1} z_{m,1}) \\ &\quad + \alpha_3 (z_{m,s-1} + \alpha_2 z_{m,s-2} + \alpha_4 z_{m,s-3} + \dots + \alpha_4^{s-2} z_{m,1}) \quad (22) \\ &\quad + \alpha_4 (z_{m-1,s} + \alpha_2 z_{m-1,s-1} + \alpha_4 z_{m-1,s-2} + \dots + \alpha_4^{s-1} z_{m-1,1}) \\ &\quad + \alpha_5 (z_{m-1,s-1} + \alpha_2 z_{m-1,s-2} + \alpha_4 z_{m-1,s-3} + \dots + \alpha_4^{s-2} z_{m-1,1}). \end{aligned}$$

با توجه به این‌که  $\hat{Z}_{i,j} = E[Z_{i,j} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] = z_{i,j}$  برای  $i = 1, \dots, m$  و  $j = 1, \dots, n$  است. به طور کلی پیش‌گویی مقادیر واقع در سطر  $k$  ام ( $k = 1, 2, \dots$ ) از ناحیه  $A_1$  با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) به صورت

$$\begin{cases} \hat{Z}_{m+k,1} = \alpha_1 \hat{Z}_{m+k-1,1} + \alpha_4 \hat{Z}_{m+k-2,1}, \\ \hat{Z}_{m+k,s} = \alpha_1 \hat{Z}_{m+k-1,s} + \alpha_2 \hat{Z}_{m+k,s-1} + \alpha_3 \hat{Z}_{m+k-1,s-1} \\ \quad + \alpha_4 \hat{Z}_{m+k-2,s} + \alpha_5 \hat{Z}_{m+k-1,s-1}; \quad s = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (23)$$

محاسبه می‌شوند. برای پیش‌گویی نقاط واقع در ستون  $s$ ام ( $s = 1, 2, \dots$ ) از ناحیه  $A_2$  به طریق مشابه

$$\begin{cases} \hat{Z}_{1,n+s} = \alpha_2 \hat{Z}_{1,n+s-1}, \\ \hat{Z}_{2,n+s} = \alpha_1 \hat{Z}_{1,n+s} + \alpha_2 \hat{Z}_{2,n+s-1} + \alpha_3 \hat{Z}_{1,n+s-1}, \\ \hat{Z}_{k,n+s} = \alpha_1 \hat{Z}_{k-1,n+s} + \alpha_2 \hat{Z}_{k,n+s-1} + \alpha_3 \hat{Z}_{k-1,n+s-1} + \alpha_4 \hat{Z}_{k-2,n+s} \\ \quad + \alpha_5 \hat{Z}_{k-1,n+s-1}; \quad k = 3, 4, \dots, \end{cases} \quad (24)$$

است. پیش‌گویی متغیر خارج قلمرو با الگوریتم ۲ قابل محاسبه است.

### الگوریتم ۲.

- گام ۱. مدل (۳) به داده‌ها برازش و پارامترهای مدل با استفاده از (۹)، (۱۰) و (۱۱) برآورد شوند.
- گام ۲. نقاط درون ناحیه  $A_1$  با استفاده از (۲۳) پیش‌گویی شوند.
- گام ۳. نقاط درون ناحیه  $A_2$  با استفاده از (۲۴) پیش‌گویی شوند.

واضح است که با استفاده از مدل (۳) نمی‌توان نقاط درون ناحیه‌های  $B$ ،  $C$  و  $D$  را پیش‌گویی کرد.

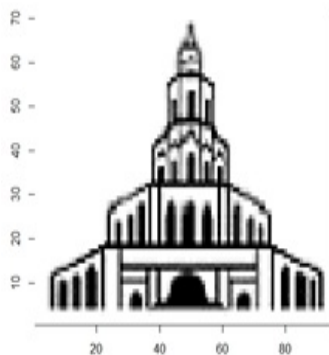
## ۴ مثال کاربردی

در این بخش روش‌های پیش‌گویی برای داده‌های تصویر امارت کلاه فرنگی بیرجند مورد استفاده قرار می‌گیرند و دقت پیش‌گویی ارزیابی می‌شوند. هر گاه یک عکس اسکن شود تصویری با ابعاد مشخص ایجاد می‌شود که هر چقدر تعداد پیکسل‌ها زیاد شود کیفیت رویت تصویر افزایش می‌یابد.

در برآورد پارامترهای مدل برای داده‌های شبکه‌ای با افزایش حجم نمونه ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگ ایجاد می‌شود که محاسبه آن‌ها نیاز به حجم بالای حافظه دارد و محاسبه آن برای نرم‌افزار امکان‌پذیر نیست. یک راه حل ارائه تصویر با ابعاد کوچک‌تر است که این کار باعث پایین آمدن کیفیت تصویر می‌شود.

برای تبدیل تصویر به مجموعه داده‌ها، می‌توان بسته نرم‌افزار jpeg را در نرم‌افزار R نصب کرده و از فرمان `img=readJPEG("e:/kolah.jpeg")` استفاده نمود. نتیجه این فرمان یک آرایه داده است که به خاطر سیاه و سفید بودن تصویر فقط از بعد اول و دوم آن به صورت `Z= img[,1]` استفاده می‌شود لذا آرایه داده‌ها به یک ماتریس تبدیل می‌شود.

شکل ۲ تصویر امارت کلاه فرنگی بیرجند را نشان می‌دهد که با استفاده از فرمان  $\text{image}(c(1:95),c(1:70),Z,\text{col}=\text{grey}(c(1:20)/20))$  رسم می‌شود. داده‌های حاصل از این تصویر ماتریسی با ابعاد  $95 \times 70$  است. برآورد پارامترهای  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)'$  و  $\mu$  با برنامه‌نویسی در نرم‌افزار R با میانگین صفر برابر  $\hat{\alpha} = (0/82, 0/85, -0/71, -0/04, 0/07)'$  و با میانگین مجهول برابر  $\hat{\mu} = 0/9$  حاصل گردید.



شکل ۲. تصویر امارت کلاه فرنگی بیرجند

برای پیش‌گویی در قلمرو داده‌ها، با استفاده از کل داده‌ها (روش اول) و داده‌های ربع سوم (روش دوم) به ترتیب از روابط (۱۷) و (۱۸) استفاده می‌شود. در صورتی‌که  $\hat{Z}_{i,j}$  پیش‌گویی  $Z_{i,j}$  باشد با استفاده از میانگین قدر مطلق خطای پیش‌گویی  $\text{MAPE} = \frac{1}{N_1} \sum_i \sum_j |Z_{i,j} - \hat{Z}_{i,j}|$  و میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی  $\text{MSPE} = \frac{1}{N_1} \sum_i \sum_j (Z_{i,j} - \hat{Z}_{i,j})^2$  دقت پیش‌گویی ارزیابی می‌شود که در روش اول  $N_1 = (m - 4) \times (n - 2) = 6188$  و در روش دوم  $N_1 = (m - 2) \times (n - 1) = 6417$  است.

جدول ۰۱. میانگین قدر مطلق خطا و توان دوم خطا دو روش پیش‌گویی درون‌یابی

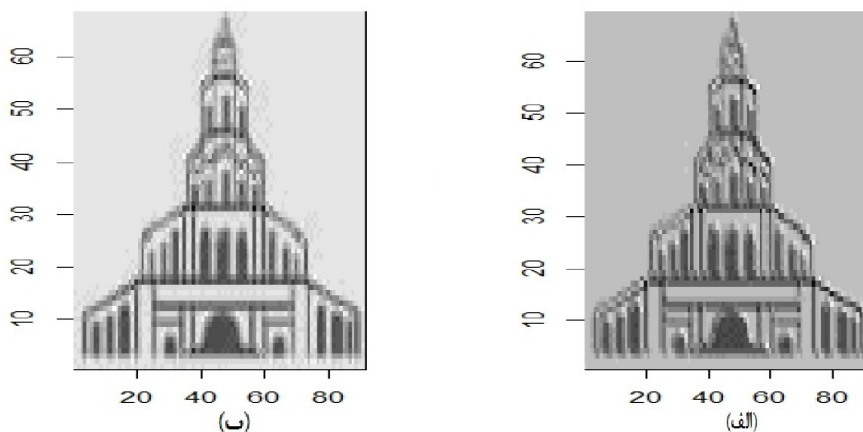
پیش‌گویی با کل داده‌ها		پیش‌گویی با داده‌های ربع سوم		ملاک ارزیابی
$\mu = 0$	$\mu \neq 0$	$\mu = 0$	$\mu \neq 0$	
0/0770	0/1100	0/0360	0/0360	MAPE
0/0220	0/0250	0/0072	0/0073	MSPE

نتایج در جدول ۱ بیان‌گر آن است که میانگین قدر مطلق خطای پیش‌گویی و میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی روش اول کمتر از روش دوم است زیرا در روش اول از مشاهدات بیشتری برای پیش‌گویی استفاده می‌شود لذا دقت پیش‌گویی بهتر است. همچنین نتایج در روش اول برای  $\mu = 0$  و  $\mu \neq 0$  تفاوت چندانی ندارد هر چند انتظار می‌رود که پیش‌گویی در حالت  $\mu \neq 0$  دقیق‌تر از  $\mu = 0$  باشد که این به علت کم بودن حجم داده‌های مورد استفاده است. به عنوان نمونه در جدول ۲ بخشی از داده‌های اصلی و مقادیر پیش‌گویی شده آن‌ها به دو روش فوق آمده است.

جدول ۲. بخشی از داده‌های اصلی و داده‌های پیش‌گویی شده در حالت  $\mu \neq 0$

پیش‌گویی $Z_{i,z}$		مقدار واقعی		
روش دوم	روش اول	$Z_{i,z}$	$z$	$i$
—	—	۱/۰	۱	۳
۱/۰۲۶	۱/۰۲۳	۰/۹۷۶	۲	۳
۰/۹۴۳	۰/۹۶۶	۰/۹۸۸	۳	۳
۰/۹۹	۰/۹۹	۱/۰	۴	۳
—	—	۰/۹۷۲	۱	۴
۰/۹۵	۰/۹۶۵	۰/۹۹۲	۲	۴
۰/۹۹۸	۱/۰۰۷	۰/۹۸۸	۳	۴
۰/۹۹۱	۰/۹۹۲	۰/۹۹۶	۴	۴

در شکل ۳ تصویر پیش‌گویی امارت کلاه فرنگی با استفاده از دو روش پیش‌گویی در حالت  $\mu \neq 0$  رسم شده است.



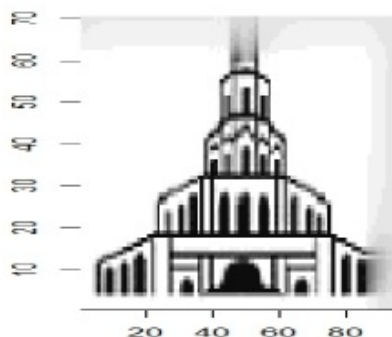
شکل ۳. تصویر امارت کلاه فرنگی بر اساس پیش‌گویی ب-به روش اول و الف-به روش دوم



به منظور ارزیابی پیشگویی خارج قلمرو داده‌ها ابتدا داده‌های سطرهای ۸۶ تا ۹۵ و ستون‌های ۶۱ تا ۷۰ از کل داده‌ها حذف شده‌اند. با استفاده از داده‌های باقی‌مانده با ابعاد  $۸۵ \times ۶۰$  پارامترها را مانند حالت قبل برآورد نموده و برای داده‌های  $۱۰ \times ۱۰$  پیش‌گویی انجام شده است.

برآورد پارامترهای مدل (۳) با میانگین صفر  $(\hat{\alpha} = (0/81, 0/85, -0/7, -0/03, 0/06))$  و با میانگین مجهول برابر  $\hat{\mu} = 0/88$  و  $(\hat{\mu} = (0/76, 0/81, -0/65, -0/06, 0/09))$  حاصل گردید.

پیش‌گویی ۱۰ ستون عمودی و ۱۰ سطر افقی آخر با استفاده از (۲۳) و (۲۴) محاسبه شده و با استفاده از میانگین قدر مطلق خطای نسبی،  $MARE = \frac{1}{K \times S} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^S \left| \frac{Z_{k,s} - \hat{Z}_{k,s}}{Z_{k,s}} \right|$  دقت پیش‌گویی مورد ارزیابی قرار گرفته است. مقدار میانگین قدر مطلق خطای نسبی در حالت  $\mu = 0$  و  $\mu \neq 0$  به ترتیب برابر  $0/13$  و  $0/1$  است. میانگین قدر مطلق خطای نسبی برون‌یابی در حالت  $\mu \neq 0$  کمتر می‌باشد، هر چند خطای نسبی در هر دو روش در حد متوسط ۱۰ درصد است. تصویر پیش‌گویی در شکل ۴ رسم شده است که نواحی مات نواحی پیش‌گویی شده است.



شکل ۴. تصویر پیش‌گویی امارت کلاسه فرنگی

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله دقت مدل  $SAR(2, 1)$ ، برای پیش‌گویی در قلمرو داده‌ها (درون‌یابی) با استفاده از کل داده‌ها و داده‌های ربع سوم مورد ارزیابی قرار گرفت. همچنین برای داده‌های شبکه‌ای پیش‌گویی برای مقادیر خارج قلمرو داده‌ها (برون‌یابی) انجام شد و از کلیه مشاهدات استفاده گردید. اشکال این پیش‌گویی آن

است که تنها می‌توان مشاهداتی که در سمت راست و بالای داده‌ها واقع است را پیش‌گویی کرد (نواحی  $A_1$  و  $A_2$  در شکل ۱) و برای پیش‌گویی مشاهدات دیگر (نواحی  $B$ ،  $C$  و  $D$ ) از مدل ربع سوم نمی‌توان استفاده کرد و باید سراغ مدل‌های ربع بالا رفت. پیشنهاد می‌شود که برای پیش‌گویی کلیه نواحی اطراف داده‌ها هر دو مدل ربع سوم و ربع بالا به طور جداگانه به داده‌ها برازش داده شود، سپس به کمک آن‌ها دو ضلع پیش‌گویی شوند.

همچنین با استفاده از داده‌های امارت کلاه فرنگی بیرجند درون‌یابی و برون‌یابی انجام شد. در پیش‌گویی درون قلمرو داده‌ها نتایج نشان داد که پیش‌گویی با استفاده از کل داده‌ها (روش اول)، پیش‌گویی دقیق‌تری نسبت به پیش‌گویی ربع سوم داده‌ها (روش دوم) دارد زیرا از کلیه مشاهدات در نزدیک‌ترین همسایگی استفاده می‌کند ولی در پیش‌گویی ربع سوم مشاهدات کمتری استفاده شده و دقت آن پایین‌تر است. اما از آنجایی که یکی از اهداف پیش‌گویی درون داده‌ها ارزیابی دقت مدل‌ها است فرقی نمی‌کند از کدام روش استفاده شود، زیرا این دو روش مانند دو متر مختلف برای ارزیابی خطا هستند. علیرغم کم بودن خطای روش اول، روش دوم پیشنهاد می‌شود. زیرا اولاً محاسبه عددی آن بسیار ساده‌تر از روش اول است و تعمیم آن به مدل‌های SAR مراتب بالا میسر است. ثانیاً هماهنگی کامل با مدل (۳) را دارد و در واقع شکل دیگری از مدل می‌باشد. ثالثاً با اندک تغییراتی که در فرمول صورت می‌گیرد برای پیش‌گویی در خارج قلمرو داده‌ها نیز قابل استفاده است. همان‌طور که اشاره شد پیش‌گویی در خارج قلمرو داده‌ها با روش اول امکان‌پذیر نیست زیرا با توجه به رابطه (۱۷) علاوه بر داده‌های ربع سوم، داده‌های ربع دوم موقعیت نیز مورد نیاز است. در کل با جمیع شرایط و دلایلی که ذکر شد روش دوم برای پیش‌گویی درون و خارج قلمرو داده‌ها پیشنهاد می‌شود.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم و هیئت تحریریه مجله علوم آماری که سبب ارتقا سطح کیفی مقاله شدند، ابراز می‌دارند.

## مراجع

محمدزاده، م. (۱۳۹۴)، آمار فضایی و کاربردهای آن، چاپ دوم، مرکز نشر آثار علمی، تهران، دانشگاه تربیت مدرس.

- Awang, N., and Shitan, M. (2006), Estimating the Parameters of the Second Order Spatial Unilateral Autoregressive Model, *International Journal of Statistical Sciences*, **5**, 37-58.
- Baran, S., and Pap, G. (2012), Parameter Estimation in a Spatial Unilateral Unit Root Autoregressive Model, *Journal of Multivariate Analysis*, **107**, 282-305.
- Bartlett, M. S. (1971), Physical Nearest-Neighbour Models and Non-Linear Time Series, *Journal of Applied Probability*, **8**, 222-232.
- Bartlett, M. S. (1978), Nearest Neighbour Models in the Analysis of Field Experiments. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, **40**(2), 147-174.
- Basawa, I. V., Brockwell, P. J., and Mandrekar, V. (1992), Inference for Spatial Time Series, *In Computing Science and Statistics*, Springer, New York, 301-302.
- Basu, S., and Reinsel, G. C. (1992), A Note on Properties of Spatial Yule-Walker Estimators, *Journal of statistical computation and simulation*, **41**, 243-255.
- Basu, S., and Reinsel, G. C. (1993), Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model, *Advances in Applied Probability*, **25**, 631-648.
- Basu, S., and Reinsel, G. C. (1994), Regression Models with Spatially Correlated Errors, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 88-99.
- Besag, J. (1974), Spatial Interaction and the Statistical Analysis of Lattice Systems, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, **36**, 192-236.
- Bhattacharyya, B. B., Richardson, G. D., and Franklin, L. A. (1997), Asymptotic Inference for Near Unit Roots in Spatial Autoregression, *The Annals of Statistics*, **25**, 1709-1724.
- Bustos, O., Fraiman, R., and Yohai, V. J. (1984), Asymptotic Behaviour of the Estimates Based on Residual Autocovariances for ARMA Models, *In Robust and Nonlinear Time Series Analysis*, Springer, New York, NY, 26-49.
- Cressie, N. (1993), *Statistics for Spatial Data*, John Wiley, New York.
- Cullis, B. R., and Gleeson, A. C. (1991), Spatial Analysis of Field Experiments-an Extension to Two Dimensions, *Biometrics*, **47**, 1449-1460.

- Davydov, Y., and Paulauskas, V. (2008), On Estimation of Parameters for Spatial Autoregressive Model, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **11**, 237-247.
- Genton, M. G. and Koul, H .L. (2008), Minimum Distance Inference in Unilateral Autoregressive Lattice Processes, *Statistica Sinica*, **18**, 617-631.
- Goryainov, V. B. (2011). Least-Modules Estimates for Spatial Autoregression Coefficients, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **50** , 565-572.
- Grau, E. A., and Lu, J. C. (2004), Robust Estimation in a Spatial Unilateral Autoregressive model, *School of Industrial and Systems Engineering*, Institute of Technology, Atlanta, GA.
- Griffith, D. A. (2004), Faster Maximum Likelihood Estimation of Very Large Spatial Autoregressive Models: An Extension of the Smirnov–Anselin Result, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **74**, 855-866.
- Haining, R. P. (1978), Estimating Spatial-Interaction Models, *Environment and Planning A*, **10**, 305-320.
- Martin, R. J. (1979), A Subclass of Lattice Processes Applied to a Problem in Planar Sampling, *Biometrika*, **66**, 209-217.
- Martin, R. J. (1996), Some Results on Unilateral ARMA Lattice Processes, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **50**, 395-411.
- Ord, K. (1975), Estimation Methods for Models of Spatial Interaction, *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 120-126.
- Tjøstheim, D. (1978), Statistical Spatial Series Modeling, *Advances in Applied Probability*, **10**, 130-154.
- Tjøstheim, D. (1983), Statistical Spatial Series Modelling II: Some Further Results on Unilateral Lattice Processes, *Advances in Applied Probability*, **15**, 562-584.
- Whittle, P. (1954), On Stationary Processes in the Plane, *Biometrika*, **41**, 434-449.
- Yao, Q., and Brockwell, P. J. (2006), Gaussian Maximum Likelihood Estimation for ARMA Models II: Spatial Processes, *Bernoulli*, **12**, 403-429.