The 10th International Conference of Iranian Operations Research Society
Babolsar- Iran, May 3-5, 2017
دهمین کنفرانس بین المللی
انجمن ایرانی تحقیق در عملیات
بابلسر، ۱۳ تا ۱۵ اردیبهشت ۱۳۹۶

مقایسه‌ی اعداد فازی با استفاده از نامساوی کر بهبود یافته

[۱] خاطره قربانی مقدم، [۲] رضا قنبری ، [۳] نظام الدین مهدوی امیری

[۱] دانشگاه صنعتی شریف (دانشجوی دکتری)، kh_ghorbani67@yahoo.com
[۲] دانشگاه فردوسی مشهد، rghanbari@um.ac.ir
[۳] دانشگاه صنعتی شریف، nezamm@sharif.edu

چکیده

تا کنون روش فراگیری برای مقایسه‌ی عددهای فازی ارایه نشده است. از جمله روش‌های شناخته شده برای مقایسه‌ی دو عدد فازی روش کر است. روش کر مستلزم محاسباتی پیچیده بر روی اعداد فازی LR است. از این رو، این جا یک روش بهبود یافته‌ی کر را پیشنهاد می‌کنیم تا با انجام محاسباتی ساده‌تر و در زمانی کوتاه‌تر بتوان دو عدد فازی LR را با هم مقایسه کرد. سپس با ساده کردن فرمول به دست آمده برای مقایسه‌ی دو عدد فازی LR فرمول مستقیمی برای مقایسه‌ی دو عدد فازی مثلثی بدست می‌آوریم. سپس، ویژگی‌هایی از فرمول مقایسه‌ی دو عدد فازی مثلثی را بیان می‌کنیم. سرانجام، از کاربردهای مهم فرمول پیشنهادی به کاربردن آن در الگوریتم‌های بهینه‌سازی است.

واژه های کلیدی: نامساوی کر، تابع رتبه بندی، اعداد فازی.

۱- مقدمه

مقایسه‌ی دو عدد فازی نقش محاسباتی مهمی در الگوریتم‌های مختلف دارد ([۶-۴]). روش‌های متفاوتی برای مقایسه‌ی اعداد فازی معرفی شده اند. ازجمله، ونگ و کر[۱] [۸] سه روش برای مرتب سازی اعداد فازی بر اساس روش رتبه بندی ارایه کردند. آدامو[۲] [۱] برای مرتب سازی اعداد فازی از α- برش استفاده کرد. یاگر[۳] [۹] روش‌های رتبه بندی را برای مرتب سازی اعداد فازی به کار گرفت.

استفاده از نامساوی کر [۲] یکی از روش‌های شناخته شده برای مقایسه‌ی دو عدد فازی است. نخست، با استفاده از اصل گسترش و یا α- برش ماکسیمم فازی برای دو عدد فازی محاسبه می‌شود و سپس با استفاده از متر هامینگ[۴] [۲] مقایسه صورت می‌گیرد. این جا، می‌خواهیم روش کر را برای مقایسه‌ی دو عدد فازی LR از دیدگاه پیچیدگی محاسباتی بهبود دهیم. در ادامه، نشان می‌دهیم که برای مقایسه‌ی دو عدد فازی LR نیازی به محاسبه‌ی ماکسیمم فازی برای دو عدد در مقایسه با روش کر اصلی نیست، و سپس فرمولی برای مقایسه‌ی دو عدد فازی مثلثی ارایه می‌دهیم و ویژگی‌هایی از آن فرمول را بیان کنیم.

۲- تعریف‌های مقدماتی

این جا، تعریف‌هایی مقدماتی در مورد عدد فازی و خلاصه‌ای از روش کر را بیان می‌کنیم.

[1] Wang and Kerre

[2] Adamo

[3] Yager

[4] Hamming Distance

تعریف ۱ (عدد فازی). [۷] یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ بر $\mathbb{R}$ به عنوان یک عدد فازی، باید دست کم سه ویژگی زیر را داشته باشد:

۱. $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ برای دقیقا یک $x=r$ و $0<\mu_{\tilde{A}}(x)<1$ برای $x\neq r$.

۲. تکیه‌گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ کران‌دار است.

۳. هر α-برش مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ یک بازه‌ی بسته است.

تعریف ۲ (عدد فازیLR). [۷] یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}), & x\leq a, \\ R(\frac{x-a}{\beta}), & x\geq a, \end{cases}$$

یک عدد فازی LR می‌نامند که در آن، L (به طور مشابه R) تابعی نا افزایشی از $\mathbb{R}^{+}$ به $[0,1]$ است، $L(0)=1$، $L(1)=0$ و برای $x\neq 0,1$، $0<L(x)<1$. این عدد را با $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)$ نشان می دهیم . در نمایش عدد فازی LR، a مقدار میانی، α و β به ترتیب پهنای چپ و راست $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند.

تعریف ۳ (عدد فازی مثلثی). [۷] یک عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ را با سه عدد حقیقی $a<b<c$ نشان می‌دهند که بازه‌ی $[a,b]$ را پایه‌ی این عدد و $x=a$ را راس عدد فازی می‌گویند و این عدد را به صورت $\tilde{A}=(a/b/c)$ نشان می‌دهند. یک عدد حقیقی a به صورت $\tilde{A}=(a/a/a)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف۴ (متر هامینگ). [۷] متر هامینگ بین دو عدد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$d(\tilde{M},\tilde{N})=\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{M}(x)-\tilde{N}(x)|\,dx.$$

۱،۱ مقایسه‌ی دو عدد فازی با استفاده از نامساوی کر

در [۲] ، ماکسیمم فازی ($\widetilde{\max}$) برای دو عدد فازی مثلثی با استفاده اصل گسترش به صورت زیر تعریف شده است:

$$\widetilde{\max}(\tilde{M},\tilde{N})(z)=\sup\{\min(\tilde{M}(x),\tilde{N}(y))\mid z=\max(x,y)\}.$$

براساس روش کر، گوییم $\tilde{M}\leq\tilde{N}$ اگر و تنها اگر

$$d(\tilde{N},\widetilde{\max})\leq d(\tilde{M},\widetilde{\max}),$$

که در آن، $d(.,.)$ متر هامینگ است و $=$ و $\geq$ به صورت مشابه تعریف می‌شود.

۳- روش کر بهبود یافته

در روش پیشنهادی ما [۳] به عنوان کر بهبود یافته، ماکسیمم دو عدد فازی با استفاده از اصل گسترش بدست می‌آید. ما ابتدا نتیجه‌ای را بیان می‌کنیم که منجر به فرمول مستقیمی برای محاسبه‌ی ماکسیمم فازی می‌شود، با به کارگیری این فرمول مستقیم برای محاسبه‌ی ماکسیمم فازی

روش کر بهبود یافته را بیان می‌کنیم. سپس، با استفاده از فرمول به دست آمده برای نامساوی کر بهبود یافته به منظور مقایسه‌ی دو عدد فازی LR، فرمولی را برای مقایسه‌ی دو عدد فازی مثلثی بیان می‌کنیم.

تعریف ۵. w_z و E_z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w_z=\{w\,|\,w\le z\},$$
$$E_z=\{(x,y)\,|\,x,y\in w_z,\ z=\max(x,y)\}.$$

لم ۱. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)_{LR}$ و $\tilde{N}=(a'/b'/c')_{LR}$ دو عدد فازی LR هستند. در این صورت، برای هر z داریم:

$$\max(\min(\tilde{M}(x),\tilde{N}(y)))\le\max(\tilde{M}(z),\tilde{N}(z)),\quad \forall(x,y)\in E_z.$$

قضیه ۱. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)_{LR}$ و $\tilde{N}=(a'/b'/c')_{LR}$ دو عدد فازی LR هستند و $b\le b'$. در این صورت، داریم:

$$\tilde{\max}(\tilde{M},\tilde{N})(z)=\begin{cases}N(z), & b<z<b'\\ \max(\tilde{M}(z),\tilde{N}(z)), & z\ge b'\\ \min(\tilde{M}(z),\tilde{N}(z)), & z\le b'\end{cases}$$

تعریف ۶. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)_{LR}$ و $\tilde{N}=(a'/b'/c')_{LR}$ دو عدد فازی LR هستند و $\tilde{O}=\tilde{\max}(\tilde{M},\tilde{N})$، $r(.,.)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=d(\tilde{M},\tilde{O})-d(\tilde{N},\tilde{O}).$$

توجه داریم که درنامساوی کر، اگر $d(\tilde{M},\tilde{O})-d(\tilde{N},\tilde{O})\ge 0$، **آن‌گاه** $\tilde{M}\le\tilde{N}$ و اگر $d(\tilde{M},\tilde{O})-d(\tilde{N},\tilde{O})\le 0$، **آن‌گاه** $\tilde{M}\ge\tilde{N}$. بنابراین، اگر $r(\tilde{M},\tilde{N})\ge 0$، آن‌گاه $\tilde{M}\le\tilde{N}$، در غیر این صورت، $\tilde{M}\ge\tilde{N}$.

اکنون، با استفاده از قضیه‌ی زیر می‌توان $r(\tilde{M},\tilde{N})$ **را** بدون محاسبه‌ی $\tilde{O}$ به دست آورد.

قضیه ۲. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)_{LR}$ و $\tilde{N}=(a'/b'/c')_{LR}$ دو عدد فازی LR هستند و $b\le b'$. در این صورت،

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=\int_{\min(a,a')}^{b}(\tilde{M}(z)-\tilde{N}(z))\,dz+\int_{b}^{b'}|\tilde{M}(z)-\tilde{N}(z)|\,dz+\int_{b'}^{\max(c,c')}(\tilde{N}(z)-\tilde{M}(z))\,dz. \quad (۱)$$

با استفاده از تعریف ۳، فرمول (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=\int_{\min(a,a')}^{b}(\tilde{M}_L(z)-\tilde{N}_L(z))\,dz+\int_{b}^{b'}|\tilde{M}_R(z)-\tilde{N}_L(z)|\,dz+\int_{b'}^{\max(c,c')}(\tilde{N}_R(z)-\tilde{M}_R(z))\,dz. \quad (۲)$$

اگر $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی باشند، آن‌گاه می‌توان فرمول (۲) را ساده کرد. در فرمول (۲) ، عبارت $\int_{b}^{b^{'}}|\tilde{M}_R(z)-\tilde{N}_L(z)|\,dz$ با استفاده از نقطه‌ی اشتراک M_R و N_L ساده‌تر می‌شود. از آن جا که $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی مثلثی هستند، $\bar{x}$ نقطه‌ی اشتراک M_R و N_L به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{b^{'}c-ba^{'}}{(c-b)+(b^{'}-a^{'})}.$$

چون M_R تابعی کاهشی بر روی بازه‌ی $[b,c]$ و N_L تابعی افزایشی بر روی بازه‌ی $[a^{'},b^{'}]$ هستند، می‌توان فرمول (۲) را به صورت زیر نوشت:

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=\int_{\min(a,a^{'})}^{b}(\tilde{M}_L(z)-\tilde{N}_L(z))dz+\int_{b}^{\bar{x}}|\tilde{M}_R(z)-\tilde{N}_L(z)|\,dz+\int_{\bar{x}}^{b^{'}}|\tilde{N}_L(z)-\tilde{M}_R(z)|\,dz+\int_{b^{'}}^{\max(c,c^{'})}(\tilde{N}_R(z)-\tilde{M}_R(z))dz.$$

نتیجه ۱. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی هستند. اگر $c\le a^{'}$، آن‌گاه

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=\frac{(c-a)}{2}+\frac{(c^{'}-a^{'})}{2}.$$

نتیجه ۲. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی هستند. اگر $b=b^{'}$، آن‌گاه

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=\frac{(c^{'}-a^{'})}{2}-\frac{(c+a)}{2}.$$

نتیجه ۳. فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی هستند. اگر $b<b^{'}$ و $\bar{y}=\tilde{M}_R(\bar{x})=\tilde{N}_L(\bar{x})$، آن‌گاه،

$$r(\tilde{M},\tilde{N})=\frac{(c^{'}-a^{'})}{2}+\frac{(c+a)}{2}-\bar{y}(c-a^{'}). \qquad (۳)$$

۳,۱ ویژگی‌های نامساوی کر بهبود یافته

برای فرمول (۳) ویژگی‌های زیر را می‌توان ثابت کرد:

۱. **اگر** $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی باشند به طوری‌که $b<b^{'}$ و $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$، آن‌گاه $r(\lambda\tilde{M},\lambda\tilde{N})=\lambda r(\tilde{M},\tilde{N})$.

۲. **اگر** $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی باشند به طوری‌که $b<b^{'}$، آن‌گاه $r(\tilde{M},\tilde{N})=r(-\tilde{N},-\tilde{M})$.

۳. **اگر** $\tilde{M}=(a/b/c)$ و $\tilde{N}=(a^{'}/b^{'}/c^{'})$ دو عدد فازی مثلثی باشند به طوری‌که $b<b^{'}$، آن‌گاه $r(\tilde{M},\tilde{N})=\lim_{\varepsilon\to 0}r(\tilde{0},\tilde{N}-\tilde{M})$، که در آن، $\tilde{0}=(-\varepsilon/0/\varepsilon)$.

۴- نتیجه گیری

یک نامساوی کر بهبود یافته را برای مقایسه‌ی اعداد فازی ارایه کردیم که از نظر محاسباتی ساده‌تر بود. با استفاده از این فرمول می‌توان دو عدد فازی LR را در زمان کوتاه‌تری با هم مقایسه کرد. سپس فرمول ساده‌ای برای مقایسه‌ی دو عدد فازی مثلثی با استفاده از فرمول مقایسه‌ی اعداد فازی LR به دست آوردیم و ویژگی‌هایی از آن را بیان کردیم.

۵- مراجع

[1] **J. M., Adamo,** (1980) Fuzzy decision trees, Fuzzy Sets and Systems, 4, 207-219.

[2] **J. J., Buckely and L. J., Jowers,** (2007) Monte Carlo Method in Fuzzy Optimization, Studies in Fuzziness and Soft Computing.

[3] **R. Ghanbari, K. Ghorbani-Moghadam and N. Mahdavi-Amiri,** Solving fuzzy number linear programs using modified Kerre's method and time variant multi-objectie particle swarm optimization, submitted.

[4] **N., Mahdavi-Amiri and S. H., Nasseri,** (2007) Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems, 158, 1961–1978.

[5] **N., Mahdavi-Amiri, S. H., Nasseri and A., Yazdani**, (2009) Fuzzy primal simplex algorithm for solving fuzzy linear programming problems, Iranian Journal of Operations Research, 1, 68-84.

[6] **N., Mahdavi-Amiri and S. H., Nasseri**, (2006) Duality in fuzzy number linear programming by use of certain linear ranking function, Applied Mathematics and Computation, 180, 206-216.

[7] **H. T., Nguyen and E. A., Walker,** (2000) A First Course in Fuzzy Logic, Chapman & Hall.

[8] **X., Wang and E. E., Kerre,** (1996) , On the classification and the dependencies of the ordering methods, Fuzzy logic foundations and industrial applications, International Series in Intelligent Technologies, 8, 73-90.

[9] **R. R., Yager,** (1980) On choosing between fuzzy subsets, Kybernetes, 9, 151-154.