



تحلیل عددی و مطالعه تجربی فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی (مطالعات موردی روی آلیاژ آلومینیوم 6061 و آلیاژ فولاد 1018)

محمد رضا اجنوردی¹، فرهاد کلاهان^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 91779-48944، kolahan@um.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 مهر 1396

پذیرش: 25 دی 1396

ارائه در سایت: 12 بهمن 1396

کلید واژگان:

جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی

روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته

معادله ناویر-استوکس

فولاد نرم

آلیاژ آلومینیوم

در این مقاله تحلیل عددی و مطالعه تجربی جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی مدنظر قرار گرفته است. برای حل معادلات حاکم بر رفتار مواد از روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته استفاده شده است. روش حل مذکور به‌عنوان روش اختلاف محدود با بالاترین مرتبه شناخته می‌شود و یکی از روش‌های فاقد شبکه است که در مقایسه با روش‌های اختلاف محدود و اجزاء محدود سرعت همگرایی بسیار بالاتری را داراست. پس از اعتبارسنجی روش تحلیل با نتایج تجربی روی آلیاژ آلومینیوم، جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی قطعات فولادی مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج حاصل با نتایج منتشر شده توسط دیگران مقایسه گردیده است. تحلیل‌های عددی نشان می‌دهند در سرعت دورانی بالای ابزار، فرآیند باید به صورت سه‌بعدی تحلیل شود. به منظور شناخت بهتر فرآیندهایی که روی آلیاژهای غیرمشابه صورت می‌پذیرد ویژگی‌های جوش کاری روی آلیاژهای آلومینیوم و فولاد به طور هم‌زمان مورد توجه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که رفتار ماکروسکوپی هر دو ماده در حین عملیات جوش کاری اغتشاشی اصطکاکی مشابه است. همچنین طیف ویسکوزیته در محدوده‌ی دمای خمیری تا ذوب حاکی از سیالیت بالای فولاد است و برای جوش کاری آن می‌توان از نسبت سرعت دورانی به سرعت خطی (ω/v) بالاتری در مقایسه با آلومینیوم استفاده نمود؛ بنابراین هنگام اتصال آلیاژهای آلومینیوم و فولاد باید نسبت سرعت مناسب براساس این موضوع تنظیم شود.

Numerical analysis and experimental study on friction stir welding (Case studies on aluminum alloy 6061 and steel alloy 1018)

Mohammad Reza Ojnordey, Farhad Kolahan*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 91779-48944, Mashhad, Iran, kolahan@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 October 2017
Accepted 15 January 2018
Available Online 01 February 2018

Keywords:

Friction Stir Welding
Generalized Differential Quadrature Method
Navier-Stokes equation
Mild Steel
Aluminum alloy

ABSTRACT

In this paper, numerical analysis and experimental study on Friction Stir Welding (FSW) is considered. Generalized Differential Quadrature (GDQ) method was used to solve the equations of the material flow during the process. This method which is known as the highest-order finite difference scheme is one of the meshless method and has a very high convergence speed respect to ordinary finite difference and finite element methods. After validating the application of this procedure with the results of experiments on aluminium alloy, friction stir welding of mild steel considered and the results compared with the published results of other researchers. Numerical analyses show that at high rotational speed of the welding tool the analysis of the process should be done in 3-dimensional framework. The results of FSW on aluminum features along with the welding results on steel ones considered in order to better understanding of the process nature of dissimilar alloys. Results of this study show that the macroscopic behavior of both materials during friction stir welding is the same. Furthermore, viscosity spectrum shows high fluidity of steel in the range of solidity to melting temperatures, so the ratio of rotational to welding speeds (ω/v) in friction stir welding of steel work pieces could be higher which it should be mentioned whenever joining of aluminium to mild steel work pieces is planned.

1- مقدمه

زمان کوتاهی (زمان تأمل²) دمای قطعه‌کارها در اثر اصطکاک افزایش یافته و به حالت خمیری می‌رسند سپس حرکت خطی ابزار آغاز شده و در ضمن پیشروی، اختلاط دو فلز در مرز اتفاق می‌افتد. ابزار مورد استفاده معمولاً از دو قسمت پین³ و شانه‌ای⁴ تشکیل می‌شود.

جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی¹ فرآیند اتصال قطعات سخت جوش‌پذیر است که در موسسه جوش کاری انگلستان و در اوایل دهه 90 میلادی ابداع گردید [1]. در این روش، یک پین در حال دوران به مرز بین دو صفحه (قطعه‌کارها) که توسط فیکسچر در کنار هم محکم قرار گرفته‌اند نفوذ کرده و پس از مدت

² Dwell time

³ Probe or Pin

⁴ Shoulder

¹ Friction Stir Welding

Please cite this article using:

M. R. Ojnordey, F. Kolahan, Numerical analysis and experimental study on friction stir welding (Case studies on aluminum alloy 6061 and steel alloy 1018), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 253-263, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

دیفرانسیل‌ها^۳ است که ابتدا توسط بلمان در دهه هفتاد میلادی [11] معرفی شده و سپس مبانی ریاضی آن در سال‌های بعد توسعه‌ی بیشتری یافته است [12]. لازم به ذکر است که در روش تقریب دیفرانسیل‌ها، دیفرانسیل یک تابع نسبت به متغیر مکانی توسط مقادیر وزن‌دار آن تابع در نقاطی در امتداد آن مختصه‌ی مکانی تقریب زده می‌شود. این تکنیک توسط شو [13] در سال 2000 توسعه یافته و نام درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته برای آن در نظر گرفته شده است. هدف از این تحقیق استفاده از این روش برای حل معادلاتی است که مدل ریاضی این فرآیند را تشکیل می‌دهند. فرض اساسی در این مطالعه این است که در جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی، فرآیند انتقال مواد خمیری، فرآیندی سیالاتی است و برای تحلیل آن می‌توان از معادلات دینامیک سیالات استفاده نمود. در این تحقیق سعی شده است تا با حل این معادلات کارایی و دقت روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته در تحلیل فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی سنجیده شود. به همین منظور دو مطالعه‌ی موردی روی آلیاژ آلومینیوم و فولاد در نظر گرفته شده و برای اعتبارسنجی نتایج، نمونه قطعات آلومینیومی تحت جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی قرار گرفته‌اند. لازم به ذکر است که اگرچه عمده‌ی تحقیقات انجام گرفته در این حوزه روی آلیاژهای آلومینیوم بوده است اما اتصال آلیاژهای غیرمشابه جزو کاربردهای اصلی این روش جوش کاری محسوب می‌شود. در این کاربردها، پارامترهای تنظیمی فرآیند باید به گونه‌ای انتخاب شوند که ویژگی‌های رفتاری هر دو آلیاژ برای انجام جوش کاری مورد ملاحظه قرار گرفته باشد تا اتصال مناسبی حاصل گردد. محدوده‌ی مجاز پارامترهای فرآیند برای قطعات آلومینیومی و همچنین قطعات فولادی به‌دست آمده است اما توجه هم‌زمان به این مواد از نظر فرآیند می‌تواند به هنگام تنظیم پارامترها برای اتصال آنها به همدیگر بسیار مفید باشد؛ لذا در این تحقیق به این موضوع نیز توجه شده است.

2- مدل ریاضی فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی

همان‌طور که بیان شد برای تحلیل این فرآیند می‌توان از معادلات دینامیک سیالات استفاده نمود. روابط (1) تا (3) فرم تانسوری این معادلات را نشان می‌دهد [14]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla T) = \frac{k}{\rho c_p} \nabla \cdot \nabla T + \frac{1}{\rho c_p} Q \quad (3)$$

در معادله توزیع حرارت، Q منبع حرارتی است که نرخ تولید حرارت بر واحد حجم ماده را بیان می‌دارد. این منبع حرارتی شامل حرارت ایجاد شده در فصل مشترک بین ابزار و قطعه کارها و همچنین ناشی از کار پلاستیک ماده است؛ بنابراین Q می‌تواند به‌صورت رابطه (4) نوشته شود:

$$Q = Q_s + Q_p \quad (4)$$

Q_s حرارت ناشی از اصطکاک در فصل مشترک ابزار/قطعه کار و Q_p حرارت ناشی از کار پلاستیک است. برآوردی از میزان Q_s به صورت رابطه (5) ارائه شده است [3]:

$$Q_s = \frac{2}{3} \pi \left(\delta \frac{\sigma_{yield}}{\sqrt{3}} + (1 - \delta) \mu_f p_N \right) \times \omega [(R_{shoulder}^3 - R_{pin}^3) (1 + \tan \alpha) + R_{pin}^3 + 3R_{pin}^2 H_{pin}] \quad (5)$$

σ_{yield} استحکام تسلیم قطعه کارها، δ ضریب لغزش، μ_f ضریب اصطکاک،

وظیفه‌ی پین، تولید حرارت در اثر اصطکاک و ایجاد تغییرشکل شدید برای فلزات است. شانه‌ای ابزار نیز باعث ایجاد حرارت شده، به حرکت مواد کمک نموده و از بیرون‌زدگی ماده خمیری از سطح فلزات جلوگیری می‌نماید. برای شناخت و کنترل فرآیند از همان سال‌های نخستین تحقیقات مختلفی روی آن آغاز گردید. اولین موضوعاتی که مورد توجه قرار گرفته‌اند توزیع حرارت و نحوه‌ی حرکت مواد در حین انجام این فرآیند است. از سال 2000 به بعد مطالعات نظری همراه با تحقیقات آزمایشگاهی در خصوص این موضوعات مورد توجه بوده است [2]. در تحقیقات اولیه به منظور تعیین توزیع حرارت، تنها توزیع حرارت ناشی از هدایت حرارتی لحاظ شده و از تولید و توزیع حرارت ناشی از جابجایی مواد پلاستیک صرف‌نظر شده است اما در تحقیقات بعدی حرکت مواد و در نتیجه حرارت تولید شده ناشی از کار پلاستیک مورد توجه قرار گرفته و مدل‌هایی جهت محاسبه توزیع دما در قطعه کارها پیشنهاد شده است [3]. تحقیق سایدل و رینولدز، در سال 2003، به‌عنوان یکی از اولین نمونه‌ها از این تحقیقات به شمار می‌رود که در این تحقیق، حرکت مواد به صورت دو بعدی در نظر گرفته شده و پس از تحلیل، نتایج حاصل از مطالعات نظری با نتایج تحقیقات آزمایشگاهی مقایسه شده است [4]. این مقایسه نشان داده است که نتایج تحلیل دوبعدی، به ویژه در سرعت‌های بالای ابزار، با نتایج آزمایشگاهی اختلاف معنی‌داری داشته و شناخت دقیق فرآیند مستلزم تحلیل سه‌بعدی از آن است. به همین دلیل در سال‌های بعد تحلیل‌های گوناگونی به‌صورت سه‌بعدی از این فرآیند انجام شده و به تدریج تأثیرگذاری پارامترهای مختلف بر مشخصات حین فرآیند و نیز خواص اتصال پس از فرآیند مورد تحقیق قرار گرفته است. به‌عنوان مثال، تحقیق در خصوص تأثیر زاویه ابزار بر حرکت مواد و توزیع حرارت توسط کولگرو و شرکلیف [5]، تأثیر سرعت‌های مختلف ابزار بر نیروها و توزیع دما توسط اولیس [6]، تغییرات ویسکوزیته‌ی ماده و گشتاور ابزار در جوش کاری فولاد توسط ناندان و همکاران [7] نمونه‌هایی از این تحقیقات هستند که ویژگی‌های حین فرآیند را مورد هدف قرار داده‌اند. تحقیق در خصوص اثر سرعت ابزار بر خواص اتصال توسط قهرمانی مقدم و همکاران [8] در سال 2015 و اثر ارتعاش قطعات در حین جوش کاری بر خواص اتصال پس از جوش توسط فولادی و همکاران [9] نمونه‌هایی از تحقیق بر روی خواص پس از فرآیند هستند. برای انجام این تحقیقات، مدل ریاضی فرآیند به روش‌های مختلفی مورد تحلیل قرار گرفته است. در سال 2014، هی و همکاران انواع این مدل‌سازی‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند [10]. هر کدام از این مدل‌سازی‌ها محدود به فرضیات و یا شرایطی هستند که نتایج حاصله را یا به صورت کم دقت و یا پرهزینه می‌سازند. در حال حاضر انجام تحلیل‌های سریع در کنترل فعال فرآیندهایی نظیر فرآیند جوش کاری از اهمیت زیادی برخوردار است و این موضوع در خصوص فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی به این مفهوم است که در حین فرآیند، مشخصاتی مانند دما و ویسکوزیته‌ی مواد سنجش گردیده و پس از پردازش سریع، پارامترهای سرعت خطی و دورانی ابزار به صورت لحظه‌ای^۱ تعیین گردند. انجام این کنترل فعال مستلزم مجهز بودن سیستم رباتیک به یک روش کارآمد جهت پردازش سریع است و لازم است روش‌های مختلف، از نظر کارایی و نیز سادگی پیاده‌سازی، مورد تحقیق قرار گیرند. یکی از روش‌هایی که تاکنون برای تحلیل این فرآیند مورد استفاده قرار نگرفته است روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته^۲ است. این روش نوع پیشرفته‌تری از روش اختلاف محدود و توسعه‌یافته‌ی روش تقریب

¹ Real - time

² Generalized Differential Quadrature (GDQ)

³ Differential Quadrature (DQ)

معادلات و روابط فوق در این تحقیق دو مطالعه‌ی موردی¹ مدنظر قرار گرفته است. در هر کدام از این مطالعات فرض شده است که کار پلاستیک ناچیز بوده و بنابراین $f_m = 0$ لحاظ شده است. هندسه‌ی قطعه‌کارها و ابزار در "شکل 2" نمایش داده شده است. ناحیه‌ای که در هر کدام از مطالعات مورد تحلیل قرار می‌گیرد ناحیه‌ی زیر شانه‌ی ابزار است زیرا مشاهدات تجربی نشان داده‌اند که تنها در این ناحیه حرکت مواد اتفاق می‌افتد. موقعیت‌های 1 تا 6 که در "شکل 1" مشخص شده‌اند مقاطعی هستند که نتایج تحلیل‌ها برای آن‌ها ارائه می‌شود. "شکل 2" نمای برش خوردگی "شکل 1" و همچنین ناحیه‌ای که تحلیل برای آن انجام شده است را نشان می‌دهد.

3- مدل رفتاری ماده

در این تحقیق قطعه‌کارها به عنوان یک قطعه‌ی پیوسته مدل شده و خط جدایشی که قبل از اتصال قطعه‌کارها وجود دارد در مدل‌سازی در نظر گرفته نمی‌شود. این فرض چندان هم دور از واقعیت نیست زیرا در جلوی ابزار به دلیل توسعه‌ی حرارت، مواد خمیری تشکیل شده و مقاومت سطوح اکسیدی در مرز جدایش قطعه‌کارها بسیار کاهش می‌یابد. همچنین مدل رفتاری ماده مطابق با معادلات مورد کاربرد در پروسه‌های شکل‌دهی گرم در نظر گرفته می‌شود. انواع مختلفی از این معادلات رفتاری وجود دارند که در منابع متعدد از جمله مرجع [15] می‌توان به آن‌ها دست یافت. در این‌جا از مدل رفتاری معروف به مدل سلاز و تگارت [17] استفاده می‌شود. این مدل رفتاری براساس رابطه (11) داده می‌شود:

$$\sigma_e = (\alpha^{-1}) \sinh^{-1}[(Z/A)^{\frac{1}{n}}] \quad (11)$$

σ_e تنش جریان، و مقادیر α ، n و A ثابت‌های ماده هستند. Z پارامتر زرن-هولومون است که توسط رابطه (12) به دست می‌آید:

$$Z = \dot{\epsilon} \exp(Q/RT) \quad (12)$$

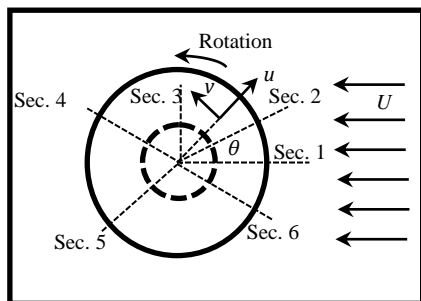


Fig. 1 Fluid model of the process. Sections 1 to 6 are the sample regions under the shoulder that the results of the analysis will achieve on these sections.

شکل 1 مدل سیالی از فرآیند. مقاطع 1 تا 6 نواحی نمونه‌ای در زیر شانه‌ی هستند که نتایج تحلیل برای این مقاطع به دست خواهد آمد.

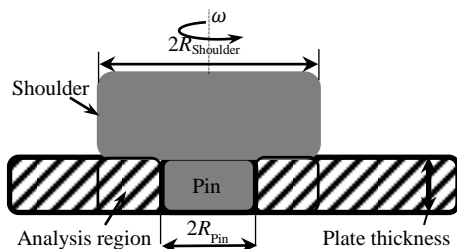


Fig. 2 Section view of process components. Analysis region under the shoulder specified.

شکل 2 نمایش مقطع از اجزاء فرآیند. ناحیه تحت تحلیل مشخص شده است.

p_N فشار ناشی از ابزار روی ماده‌ی خمیری قطعه‌کارها، ω سرعت دوران ابزار، $R_{Shoulder}$ شعاع شانه‌ی ابزار، R_{Pin} شعاع پین، α زاویه مخروطی بودن پین (که در این مطالعه صفر است) و H_{Pin} ارتفاع پین می‌باشد. مطالعات تجربی و همچنین داده‌های تئوری نشان داده‌اند که در دماهای بالا، اندازه‌ی p_N با σ_{yield} تقریباً برابر است [15] و با توجه به این که در این تحقیق $\alpha = 0$ می‌توان از رابطه (6) استفاده نمود:

$$Q_s = \frac{2}{3} \pi \left(\delta \frac{1}{\sqrt{3}} + (1 - \delta) \mu_f \right) \sigma_{yield} \times \omega [R_{Shoulder}^3 + 3R_{Pin}^2 H_{Pin}] \quad (6)$$

مقدار ضریب لغزش با دور شدن از محور ابزار تغییر کرده و افزایش می‌یابد. این ضریب در حالت چسبندگی کامل ماده‌ی خمیری به ابزار مساوی صفر و در حالت لغزش کامل بین ابزار و ماده‌ی خمیری یک است ($0 \leq \delta \leq 1$). رابطه‌ی (6) در حالتی مابین دو حالت چسبندگی / لغزش نوشته شده است. ناندان و همکارانش در سال 2007 رابطه (7) را برای ضریب لغزش پیشنهاد نموده‌اند [7]:

$$\delta = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\delta_0} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{r}{R_{Shoulder}}\right) \quad (7)$$

در این رابطه δ_0 ثابتی است که مقدار آن در خصوص جوش کاری هر آلیاژی متفاوت می‌باشد و ω_0 سرعت دورانی مرجع نامیده می‌شود و به منظور بی‌بعد کردن ω استفاده می‌شود. در این تحقیق مقادیر این پارامترها در جداول مربوط به مطالعات موردی داده شده است.

ضریب اصطکاک μ_f بر اساس داده‌های تجربی و مطابق رابطه (8) ارائه شده است [7]:

$$\mu_f = \mu_0 \exp(-\lambda \delta \omega r) \quad (8)$$

μ_0 ثابتی است که مقدار 0.4 برای آن پیشنهاد شده و $\lambda = 1$ (s/m) در نظر گرفته شده است [16]. تولید حرارت ناشی از کار پلاستیک، Q_p ، با رابطه (9) معین می‌گردد:

$$Q_p = f_m \mu \Phi \quad (9)$$

μ نشان‌دهنده‌ی ویسکوزیته و ضریبی است که سهم انرژی حرارتی ناشی از کار پلاستیک را در افزایش دمای قطعه‌کارها نشان می‌دهد. مقدار این ضریب براساس یافته‌های تجربی در خصوص فولاد کمتر از 0.05 [7] و در خصوص آلومینیوم در حدود 0.045 [16] ارزیابی شده است. عمده‌ی حرارت تولید شده صرف تغییر و تحولات ریزساختاری شده و بنابراین سهم Q_p در افزایش دمای میدان جوش در حین جوش کاری ناچیز می‌باشد. در سیستم مختصات استوانه‌ای کمیت Φ توسط رابطه (10) بدست می‌آید:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2 \quad (10)$$

در فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی پس از گذشت زمان تأمل و شروع حرکت خطی ابزار، حالت پایدار ایجاد می‌گردد. در این حالت می‌توان فرآیند را یک فرآیند شبه‌استاتیکی فرض نمود [3]. جریان ماده به عنوان جریان سیال غیرنیوتونی، غیر قابل تراکم با رفتار ویسکوپلاستیک فرض می‌گردد. تنش برشی ماکزیمم در حالت تسلیم با رابطه‌ی $\tau = \sigma_{yield} / \sqrt{3}$ برآورد می‌گردد که در این رابطه σ_{yield} تنش تسلیم براساس تئوری انرژی اعوجاجی در حالت تنش صفحه‌ای است. چگالی ماده نیز ثابت فرض می‌شود. براساس

¹ Case Study

اول نشان می‌دهند. در تحقیق حاضر پنج تابع وجود دارند که مشتقات آن‌ها با استفاده از روش فوق گسسته می‌گردند:

$$u_r(r, \theta, z), u_\theta(r, \theta, z), u_z(r, \theta, z) \\ p(r, \theta, z), T(r, \theta, z)$$

برای سادگی قرار می‌دهیم:

$$u = u_r, \quad v = u_\theta, \quad w = u_z$$

در روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته نحوه توزیع هندسی گره‌ها در میزان دقت و همچنین پایداری روش بسیار تعیین‌کننده است. برای تضمین دقت و پایداری جواب‌ها، توصیه شده است که از توزیع نایکنواخت نقاط گرهی استفاده گردد [18]. مرسوم‌ترین روش توزیع نقاط گرهی براساس رابطه‌ی چبیشف-گوس-لوباتو و به صورت رابطه (22) است:

$$\xi_k = 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{k-1}{N-1} \pi \right) \right) \quad (22)$$

5- معادلات حاکم و گسسته‌سازی آن‌ها براساس روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته

براساس این روش معادلات ممنوم (ناویر استوکس)، پیوستگی و انرژی در سیستم مختصات استوانه‌ای گسسته شده‌اند. معادله‌ی اول ممنوم که در امتداد r می‌باشد به صورت رابطه (23) است [19]:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^* \partial u^*}{r^* \partial \theta^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} = \\ - \frac{\partial P}{\partial r^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^*)}{\partial r^*} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^{*2}} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (23)$$

معادله‌ی (23) به صورت بی‌بعد و با استفاده از پارامترهای زیر نوشته شده است:

$$r^* = \frac{r}{\delta_r}, \quad \theta^* = \theta, \quad z^* = \frac{z}{\delta_z} \\ \delta_r = \frac{R_{\text{pin}} + R_{\text{shoulder}}}{2}, \quad \delta_z = H_{\text{pin}} \\ u^* = \frac{u}{U} - \cos \theta, \quad v^* = \frac{v}{U} + \sin \theta \\ w^* = \frac{w}{U}, \quad P^* = \frac{P}{\rho U^2}, \quad \text{Re} = \frac{\rho \delta_r U}{\mu}$$

فرم گسسته معادله (23) در یک گره نمونه‌ی (r_i, θ_j, z_k) به صورت رابطه (24) است:

$$E_u + E_v + E_w + E_{vr} = E_p + \frac{1}{\text{Re}} [D_1 + \dots + D_8] \quad (24)$$

که در این رابطه:

$$E_u = u(r_i, \theta_j, z_k) \sum_{t=1}^{N_r} A_{it} u(r_t, \theta_j, z_k)$$

$$E_v = \frac{v(r_i, \theta_j, z_k)}{r_i} \sum_{t=1}^{N_\theta} B_{jt} u(r_i, \theta_t, z_k)$$

$$E_w = w(r_i, \theta_j, z_k) \sum_{t=1}^{N_z} C_{kt} u(r_i, \theta_j, z_t)$$

$$E_{vr} = - \frac{[v(r_i, \theta_j, z_k)]^2}{r_i}$$

$$E_p = - \sum_{t=1}^{N_r} A_{it} P(r_t, \theta_j, z_k)$$

$$D_1 = \sum_{t=1}^{N_r} \overline{A_{it}} u(r_t, \theta_j, z_k)$$

Q انرژی اکتیواسیون ماده (مستقل از دما)، R ثابت عمومی گازها و T دما است. محاسبه‌ی ویسکوزیته برای مواد خمیری براساس معادله‌ی پرزینا¹ صورت می‌پذیرد [15]:

$$\mu = \frac{\sigma_e}{3 \dot{\epsilon}} \quad (13)$$

μ ویسکوزیته ماده و $\dot{\epsilon}$ نرخ کرنش منتجه است. نرخ کرنش منتجه بر اساس رابطه (14) به دست می‌آید [17]:

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}} \quad (14)$$

که در این رابطه:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (15)$$

4- روش حل

همان‌طور که اشاره گردید در این تحقیق از روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته، که در این‌جا برای حالت سه‌بعدی توسعه داده شده است استفاده گردیده است. در این روش مشتقات یک تابع پیوسته با رابطه‌ای خطی از مقادیر آن تابع در نقاط گرهی و در یک امتداد معین تقریب زده می‌شود [18]. اگر $f(r, \theta, z)$ تابعی مفروض و پیوسته در سیستم مختصات استوانه‌ای باشد در این صورت قرار می‌دهیم:

$$f_r^{(m)}(r_i, \theta_j, z_k) = \sum_{t=1}^M a_{it}^{(m)} f(r_t, \theta_j, z_k) \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (16)$$

$$f_\theta^{(n)}(r_i, \theta_j, z_k) = \sum_{t=1}^N b_{jt}^{(n)} f(r_i, \theta_t, z_k) \\ n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (17)$$

$$f_z^{(l)}(r_i, \theta_j, z_k) = \sum_{t=1}^L c_{kt}^{(l)} f(r_i, \theta_j, z_t) \\ l = 1, 2, \dots, L-1 \quad (18)$$

برای: $k = 1, 2, \dots, L$ و $j = 1, 2, \dots, N$ ، $i = 1, 2, \dots, M$ در روابط (16) تا (18)، $a_{it}^{(m)}$ ، $b_{jt}^{(n)}$ و $c_{kt}^{(l)}$ ضرایب وزن در امتدادهای r ، θ و z می‌باشند و M ، N و L تعداد نقاط گرهی در آن جهت‌ها هستند. ضرایب وزنی به صورت رابطه (19) می‌باشند:

$$\psi_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{t \neq j}^G (\xi_i - \xi_t)}{\prod_{t \neq j}^G (\xi_j - \xi_t)} \\ i, j = 1, 2, \dots, G, \quad j \neq i \quad (19)$$

ψ نماینده‌ی a و b ؛ c نشانگر r ، θ و z و G نشان‌دهنده‌ی M ، N و L است. $\psi_{ij}^{(1)}$ مقادیر مربوط به ضرایب در مشتق اول تابع $f(r, \theta, z)$ را نشان می‌دهد. برای مشتقات بالاتر f داریم:

$$\psi_{ij}^{(m)} = m \left(\psi_{ii}^{(m-1)} \psi_{ij}^{(1)} - \frac{\psi_{ij}^{(m-1)}}{(\xi_i - \xi_j)} \right) \\ i, j = 1, 2, \dots, G \\ j \neq i, \quad m = 2, 3, \dots, G-1 \quad (20)$$

و در صورتی که $j = i$:

$$\psi_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^G \psi_{ij}^{(m)} \\ i = 1, 2, \dots, G, \quad m = 1, 2, 3, \dots, G-1 \quad (21)$$

روابط (20) و (21) ضرایب مشتقات دوم و بالاتر را براساس ضرایب مشتقات

¹ Perzyna's Model

جریان ماده یکسان است بنابراین با ضرب شدن عدد رینولدز در ترم دارای فشار نمی توان از آن چشم پوشی نمود. سیستم معادلات به فرم ماتریسی به صورت روابط (27) تا (31) خواهد بود:

$$\text{Re}[A]\{P\} = \{[\bar{A}] + [Ir][A] + [Ir2]([\bar{B}] - [I]) + [\bar{C}]\}\{U\} - 2[Ir2][B]\{V\} - \{COS\} \quad (27)$$

در امتداد r

$$\text{Re}[Ir][B]\{P\} = \{[\bar{A}] + [Ir][A] + [Ir2]([\bar{B}] - [I]) + [\bar{C}]\}\{V\} + 2[Ir2][B]\{U\} + \{SIN\} \quad (28)$$

در امتداد θ

$$\text{Re}[C]\{P\} = \{[\bar{A}] + [Ir][A] + [Ir2][\bar{B}] + [\bar{C}]\}\{W\} \quad (29)$$

معادله پیوستگی:

$$([A] + [Ir])\{U\} + [Ir][B]\{V\} + [C]\{W\} + [Ir]\{COS\} = 0 \quad (30)$$

معادله انرژی:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\{U\} + \{COS\})[A] + [Ir](\{V\} + \{SIN\})[B] + \{W\}[C] + \\ \frac{k}{\rho c_p} \{ [Ir][A] + [\bar{A}] + [Ir2][\bar{B}] + [\bar{C}] \} \end{array} \right\} \{T\} + \{S\} = 0 \quad (31)$$

که در این معادلات $\{\chi\}^T = \{\chi_i\}$ که در آن χ نشان دهنده ی هر کدام از بردارهای $U, V, W, S, T, P, COS, SIN$ است و $[Ir]$ و $[Ir2]$ ماتریس های قطری مربعی هستند که مقادیر روی قطر آنها به ترتیب $1/r_i$ و $1/r_i^2$ است.

فرم فشرده معادلات ممنوم (روابط (27) تا (29)) به صورت رابطه (32) است:

$$Ax = b \quad (32)$$

که در این معادله:

$$A = \begin{bmatrix} [r] & [A] & 0 \\ -[A] & [r] & 0 \\ 0 & 0 & [r]w \end{bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{W\} \end{Bmatrix}$$

$$b = \begin{Bmatrix} \text{Re}[A]\{P\} + \{COS\} \\ \text{Re}[Ir][B]\{P\} - \{SIN\} \\ \text{Re}[C]\{P\} \end{Bmatrix}$$

و نیز:

$$[r] = \begin{Bmatrix} [\bar{A}] + [Ir][A] + \\ [Ir2]([\bar{B}] - [I]) + [\bar{C}] \end{Bmatrix}, \quad [A] = -2[Ir2][B]$$

$$[r]w = [r] + [Ir2]$$

و در خصوص معادله ی پیوستگی:

$$Cx = C_0$$

$$C = \{[A] + [Ir] \quad [Ir][B] \quad [C]\}$$

$$C_0 = -[Ir]\{COS\} \quad (33)$$

بنابراین معادلات ممنوم و پیوستگی به فرم فشرده و مطابق با رابطه (34) حاصل می گردند:

$$\begin{cases} Ax = b \\ Cx = C_0 \end{cases} \quad (34)$$

فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی یک فرآیند ترمومکانیکی است و به دلیل وابستگی خواص ماده به دما و جریان مواد (نرخ های کرنش) مجموعه معادلات ممنوم، پیوستگی و انرژی باید به صورت وابسته¹ حل شوند. معادله پیوستگی دارای ترم فشار نیست و به همین دلیل از الگوریتم هایی نظیر

$$D_2 = \frac{1}{r_i} \sum_{t=1}^{N_r} A_{it} u(r_t, \theta_j, z_k)$$

$$D_3 = -\frac{u(r_i, \theta_j, z_k)}{r_i^2}$$

$$D_4 = \frac{1}{r_i^2} \sum_{t=1}^{N_\theta} \bar{B}_{jt} u(r_i, \theta_t, z_k)$$

$$D_5 = \frac{\cos(\theta_i)}{r_i^2}$$

$$D_6 = -\frac{2}{r_i^2} \sum_{t=1}^{N_\theta} B_{jt} v(r_i, \theta_t, z_k)$$

$$D_7 = -\frac{2\sin(\theta_i)}{r_i^2}$$

$$D_8 = \sum_{t=1}^{N_z} \bar{C}_{kt} u(r_i, \theta_j, z_t)$$

و همچنین:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{(r_i, \theta_j, z_k)} = \sum_{t=1}^{N_r} A_{it} u(r_t, \theta_j, z_k)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \Big|_{(r_i, \theta_j, z_k)} = \sum_{t=1}^{N_r} \bar{A}_{it} u(r_t, \theta_j, z_k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{(r_i, \theta_j, z_k)} = \sum_{t=1}^{N_r} B_{jt} u(r_i, \theta_t, z_k)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \Big|_{(r_i, \theta_j, z_k)} = \sum_{t=1}^{N_r} \bar{B}_{jt} u(r_i, \theta_t, z_k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(r_i, \theta_j, z_k)} = \sum_{t=1}^{N_z} C_{kt} u(r_i, \theta_j, z_t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{(r_i, \theta_j, z_k)} = \sum_{t=1}^{N_z} \bar{C}_{kt} u(r_i, \theta_j, z_t)$$

با مرتب ساختن کلیه معادلات برای کل گره ها در امتداد r به معادله ماتریسی (25) خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} & \{U\}^T [A] \{U\} + \{V\}^T [Ir][B]\{U\} + \{W\}^T [C]\{U\} \\ & + \{V\}^T [Ir]\{V\} = -[A]\{P\} + \frac{1}{\text{Re}} [\bar{A}]\{U\} \\ & + \frac{1}{\text{Re}} [Ir][A]\{U\} + \frac{1}{\text{Re}} [Ir2][\bar{B}]\{U\} \\ & - 2 \frac{1}{\text{Re}} [Ir2][B]\{V\} + \frac{1}{\text{Re}} [\bar{C}]\{U\} \\ & - \frac{1}{\text{Re}} [Ir2]\{U\} - \frac{1}{\text{Re}} [Ir2]\{COS\} \end{aligned} \quad (25)$$

در رابطه ی (25) ماتریس های $[A], [\bar{A}], [B], [\bar{B}], [C], [\bar{C}]$ ماتریس های ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مرتبه اول و دوم برای کلیه ی نقاط گره ی در سه امتداد سیستم مختصات می باشند. همچنین:

$$[\bar{A}] = [A][A] \quad (26-الف)$$

$$[\bar{B}] = [B][B] \quad (26-ب)$$

$$[\bar{C}] = [C][C] \quad (26-ج)$$

در فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی ویسکوزیته ی ماده ی خمیری بسیار زیاد است و بنابراین عدد رینولدز بسیار کوچک خواهد بود ($1 \ll \text{Re}$) لذا عبارت های سمت چپ در معادله (25) پس از ضرب شدن در مقدار Re مقادیر ناچیزی خواهند داشت و می توان از آنها برای ساده تر شدن فرآیند حل صرف نظر نمود. لازم به ذکر است که مرتبه مقداری ترم فشار و تنش

¹ Couple

است. T_a دمای محیط بیرون است. برای سطح خارجی ناحیهی موردنظر در این تحقیق:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\text{ex. surface}} = \dot{q}_{\text{ex. surface}} \quad (41)$$

$\dot{q}_{\text{ex. surface}}$ شار حرارتی خروجی از سطح استوانه‌ای ناحیهی موردنظر می‌باشد.

با توجه به تعادل انرژی در حالت پایدار در کل ناحیهی تحت بررسی:

$$\dot{q}_{\text{shoulder}} + \dot{q}_{\text{pin}} + \dot{q}_{\text{bot}} + \dot{q}_{\text{ex. surface}} = 0 \quad (42)$$

سرعت‌های مواد در سطح پین با احتساب ضریب لغزش به صورت روابط (43) و (44) می‌باشند:

$$\begin{aligned} u &= -U \cos \theta \\ v &= (1 - \delta) \omega R_{\text{pin}} + U \sin \theta \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

در سطح شانه‌ای:

$$v = (1 - \delta) \omega r + U \sin \theta \quad (44)$$

8- نتایج و بحث

ناحیه‌ای که در این تحقیق مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است یک ناحیه استوانه‌ای است به شعاع داخلی R_{pin} و شعاع خارجی R_{shoulder} و ارتفاع H_{pin} که مقطع این ناحیه در "شکل 2" نشان داده شده است. برای تحلیل حرکت مواد در این ناحیه، برنامه‌ای برای حل معادلات ماتریسی نوشته شده و سپس با اعمال شرایط مرزی نتایج تحلیل به دست آمده است. در راستای عمودی، شعاعی و حلقوی به ترتیب 6، 7 و 8 گره در نظر گرفته شده است که در هر راستا مطابق رابطه چبیشف - گاوس - لوباتو (رابطه 22)) توزیع شده‌اند. در این تحقیق دو مطالعه‌ی موردی مدنظر قرار گرفته و نتایج تحلیل هر کدام با آنچه که در مراجع داده شده مقایسه شده است. در ابتدا از آلیاژ آلومینیوم به‌عنوان جنس قطعه‌کارها استفاده شده و نتایج تحلیل با نتایج آزمایشات تجربی مقایسه شده است تا صحت روش حل تأیید گردد؛ سپس مطالعه دیگری روی فولاد نرم انجام شده و با نتایج تحقیقات دیگران و نیز تحلیل مطالعه اول مقایسه شده است.

1-8- مطالعه موردی 1: آلومینیوم 6061

در این قسمت قطعه‌کارها از جنس آلومینیوم 6061 با شرایط کاری و خواص مندرج در جدول 1 مدنظر قرار گرفته‌اند.

"شکل 3" کانتورهای سرعت منتهی را در ناحیهی زیر شانه‌ای و برای موقعیت 3 نشان می‌دهد. این سرعت با رابطه‌ی (45) به دست می‌آید:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (45)$$

نمودارهای سرعت نشان می‌دهند که بیشترین سرعت حرکت ماده در نزدیک اتصال پین و شانه‌ای است. همچنین نحوه توزیع سرعت نشان می‌دهد بیشترین اختلاط مواد در قسمت بالای صفحات اتفاق می‌افتد. این موضوع در مشاهدات رینولدز نیز عنوان شده است [25]. در تحقیقات رینولدز نشان-گرهای کوچکی^۱ قبل از شروع جوش کاری در مرز بین دو قطعه تعبیه شده و پس از جوش کاری، نحوه جابجایی آن‌ها بررسی شده است. به دلیل پایین بودن سرعت دورانی و یا نسبت ω/v ، سرعت در امتداد عمودی در این مطالعه بسیار پایین و حداکثر در حدود 0.0066 میلی‌متر بر ثانیه است که در صفحه‌ی پایین و در نزدیک پین اتفاق می‌افتد (در موقعیت 3 و در قسمت پیشرونده). طیف سرعت عمودی در "شکل 4" این موضوع را نشان می‌دهد.

سیمپل^۱، سیمپلر^۲، پنالتی^۳ و ... به‌منظور کوپل کردن فشار با معادله پیوستگی استفاده می‌شود. در این تحقیق از روش پنالتی استفاده شده است [20]. براساس این روش، فشار با ضریب بسیار کوچکی مانند ϵ به معادله پیوستگی اضافه می‌شود:

$$\epsilon p + Cx = C_0 \quad (35)$$

مقدار ϵ در مسائل 10^{-5} و یا 10^{-6} انتخاب می‌گردد [20]؛ بنابراین در معادله ممنوم می‌توان به جای p از رابطه‌ی (36) استفاده کرد:

$$p = \frac{1}{\epsilon} (-Cx + C_0) \quad (36)$$

6- نرخ کرنش و نرخ دوران

برای به دست آوردن مقادیر ویسکوزیته بر مبنای رابطه‌ی پریزنا (رابطه 13)) لازم است تا نرخ کرنش منتهی در هر گره محاسبه شود. محاسبه این نرخ کرنش با استفاده از روش درونی‌یابی مشتق تعمیم‌یافته و تعاریف هندسی ضرایب بسیار ساده خواهد بود. در سیستم مختصات استوانه‌ای روابط نرخ کرنش و نرخ دوران بر مبنای مقادیر سرعت در مرجع [17] داده شده است که در این‌جا نمونه‌ای از این معادلات به همراه فرم گسسته آن ارائه گردیده است:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \{E_{rr}\} = [A]\{U\} \\ \omega_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \rightarrow \\ \{\Omega_{r\theta}\} &= \frac{1}{2} ([A]\{V\} + [Ir]\{V\} - [Ir][B]\{U\}) \end{aligned}$$

7- شرایط مرزی

حرارت تولید شده در فصل مشترک قطعه‌کار/ ابزار براساس خواص، بین قطعه‌کار و ابزار تقسیم می‌گردد. براساس تحقیقات پیشین سهم قطعه‌کارها از کل شار حرارتی در حدود 74 درصد است [21]؛ بنابراین در اینجا $0.74Q_s$ به‌عنوان شرط مرزی در فصل مشترک قطعه‌کار/ ابزار در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که تولید حرارت در فصل مشترک بین شانه‌ای/ قطعه‌کار با تولید حرارت در فصل مشترک بین پین/ قطعه‌کار نیز متفاوت است. اگر $Q_{s,\text{pin}}$ انرژی حرارتی تولید شده در سطح پین/ قطعه‌کار و $Q_{s,\text{shoulder}}$ میزان انرژی حرارتی تولید شده در سطح شانه‌ای/ قطعه‌کار باشد خواهیم داشت [21]:

$$Q_s = Q_{s,\text{shoulder}} + Q_{s,\text{pin}} \quad (37)$$

که در رابطه (37)، $Q_{s,\text{shoulder}}$ و $Q_{s,\text{pin}}$ براساس رابطه (6) محاسبه می‌شوند. شرایط مرزی برای حرارت ورودی در فصل مشترک شانه‌ای و سطح بالای قطعه‌کار به‌صورت رابطه (38) است:

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\text{top}} = \dot{q}_{\text{shoulder}} \quad (38)$$

k ضریب هدایت حرارتی قطعه‌کار و $\dot{q}_{\text{shoulder}}$ شار حرارتی اعمالی از سوی شانه‌ای است. همچنین برای سطح پین:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\text{pin}} = \dot{q}_{\text{pin}} \quad (39)$$

در رابطه‌ی (39) \dot{q}_{pin} شار حرارتی اعمالی از سوی پین می‌باشد. در سطح پایین قطعه‌کارها:

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\text{bot}} = h_{\text{bot}}(T - T_a) = \dot{q}_{\text{bot}} \quad (40)$$

h_{bot} ضریب جابجایی حرارتی و \dot{q}_{bot} شار حرارتی خروجی از ناحیه موردنظر

¹ SIMPLE
² SIMPLER
³ PENALTY

⁴ Marker

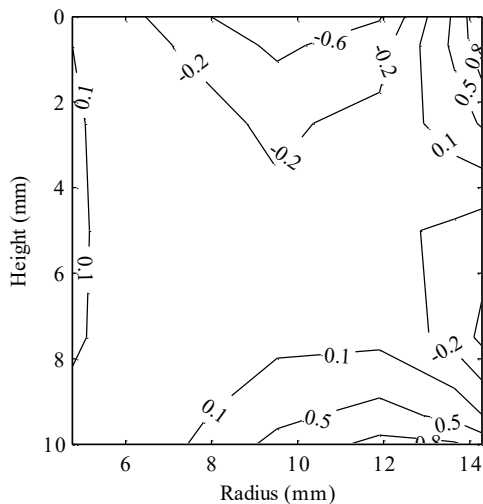


Fig. 4 Vertical velocity (10^{-6} m/s) contours in section 3 of Aluminum workpiece

شکل 4 کانتورهای سرعت عمودی (10^{-6} m/s) در مقطع 3

در صفحه $(z-r)$ نرخ‌های دوران محاسبه شده و کانتورهای "شکل 5" نتایج این محاسبات را نشان می‌دهد که در آن حرکت دورانی مواد در صفحه‌ی عمودی مشخص شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این دوران‌ها مقادیر ناچیزی دارند. حرکت همزمان مواد در امتدادهای شعاعی و عمودی این دوران‌ها را به وجود می‌آورد. مساحت نواحی دوران‌های مثبت (دوران مواد در خلاف جهت عقربه‌های ساعت) و منفی نیز در قسمت پیش‌رونده و عقب‌رونده متفاوت است. لازم به ذکر است که مطابق با نظرات مطرح شده در مرجع [2] مواد به صورت توده‌ای در سمت پیش‌رونده به سمت پایین و در سمت عقب‌رونده به سمت بالا رانده می‌شوند اما این حرکت در صفحه‌ی $(\theta-z)$ اتفاق می‌افتد که یک صفحه‌ی استوانه‌ای است و در این‌جا قابل نمایش نمی‌باشد.

طیف دما و ویسکوزیته به طور نمونه برای مقطع 2 در "شکل‌های 6 و 7" آورده شده است. تطبیق طیف‌های دما و ویسکوزیته در نواحی مختلف مقطع 2 مطابق انتظار است: هر جا که دما مقادیر بالایی دارد ویسکوزیته مقادیر پایینی داشته و سیالیت ماده بیشتر است. این موضوع ناشی از اعمال مدل

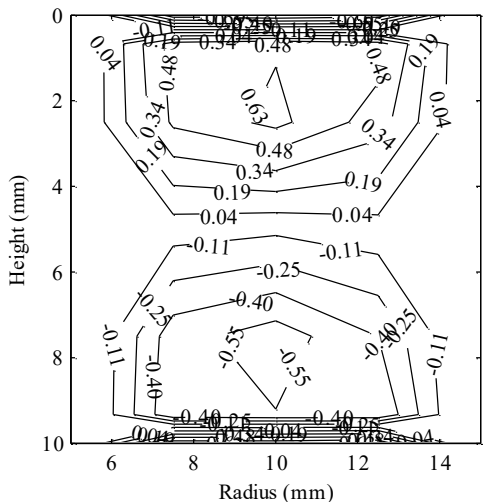


Fig. 5 Rate of rotation (1/s) contours in section 3 of Aluminum workpiece

شکل 5 نرخ دوران (1/s) نقاط میدان در موقعیت 3

جدول 1 پارامترهای فرآیند و خواص آلیاژ آلومینیوم 6061
Table 1 Process parameters and properties of Aluminum alloy 6061

پارامتر	واحد	مقدار
سرعت خطی ابزار	(mm/s)	2.34
سرعت دورانی ابزار	(rad/s)	19.5
شعاع پین	(mm)	5
شعاع شانه‌ای	(mm)	15
ضخامت ورق	(mm)	10
ارتفاع پین	(mm)	10
چگالی [22]	(kg/m ³)	2700
انرژی اکتیواسیون [22]	(J/mol)	145000
ثابت گازها [23]	(J/molK)	8.31451
دمای محیط	(°C)	27
ضریب اصطکاک مرجع [24]	-	0.4
ضریب هدایت حرارتی [24]	(W/mK)	115.23+0.1594T
ظرفیت گرمایی ویژه [24]	(J/kgK)	789.9+0.4959T
دمای آستانه خمیری [24]	(°C)	582
ثابت A [22]	(1/s)	2.41×10 ⁸
ثابت n [22]	-	3.55
ثابت α [22]	(1/MPa)	0.045
ضریب لغزش مرجع [25]	-	0.65
ضریب جابجایی [15]	(W/m ² K)	50
استحکام نهایی [24]	(MPa)	310

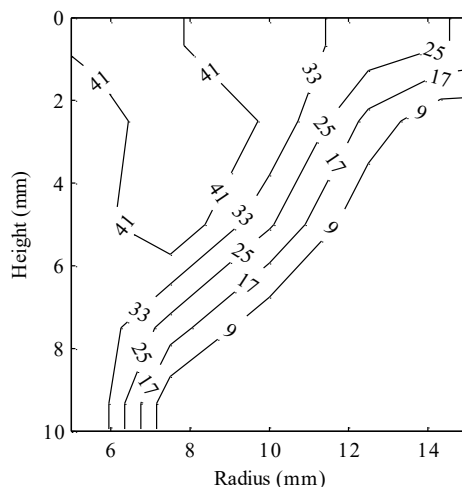


Fig. 3 Velocity contours (m/s) in section 3 of Aluminum workpiece

شکل 3 کانتورهای سرعت منتجه (m/s) در مقطع 3

مطابق با مشاهدات تجربی توصیف شده در مرجع [2] در هنگام دوران ابزار، توده‌ای از مواد در اطراف پین شروع به چرخش می‌نماید که این موضوع باعث افزایش ظاهری قطر پین می‌گردد؛ از نمودار طیف سرعت عمودی در "شکل 4" نیز این موضوع قابل دریافت است. در این نمودار، سرعت عمودی ماکزیمم و مینیمم در فاصله‌ای بعد از شعاع پین پدیدار شده است که نشان می‌دهد در نزدیکی ابزار جریان حرکت مواد به صورت چرخشی و حول محور دوران پین است. از نمودارهای سرعت عمودی و منتجه می‌توان نتیجه گرفت که قطر پین به‌طور ظاهری به اندازه‌ی 3 میلی‌متر افزایش یافته است. این نتایج نشان می‌دهند که در نسبت‌های پایین ω/v ، عمده‌ی حرکت ماده به صورت صفحه‌ای و دو بعدی است و می‌توان در امتداد محور عمودی (z) میدان جوش کاری را به صورت لایه‌های صفحه‌ای در نظر گرفت.

جدول 2 نتایج حاصل از آزمایشات انجام شده و مقایسه با نتایج تحلیل

Table 2 Results of experiments compared with the results of analysis

$T_{max.GDQ}$	$T_{max.Exp}$	U	N	d/D	شماره
(°C)	(°C)	(mm/min)	(rpm)		(تعداد تکرار)
673	689	50	420	6/16	1(3)
684	693	75	470	6/16	2(3)
692	697	60	470	6/16	3(4)
694	675	50	470	6/16	4(3)
702	681	50	420	6/21	5(3)
688	667	100	420	6/21	6(2)
712	703	50	420	8/21	7(3)
706	686	70	420	8/21	8(3)
693	659	100	420	8/21	9(2)

سرعت خطی پیشروی ابزار برحسب $T_{max.Exp}$ دمای حداکثر میانگین حاصل از آزمایشات و $T_{max.GDQ}$ دمای محاسبه شده حاصل از روش درون‌یابی مشتق تعمیم یافته است.

"شکل 8" مقطع یکی از نمونه‌های آزمایش شده در مطالعه حاضر را نشان می‌دهد. تطبیق این تصویر با کانتورهای ویسکوزیته حاکی از این است که عدم سیالیت کافی در ناحیه B باعث بروز عیب نارسایی ماده در مرز بین ناحیه اختلاطی و ناحیه ترمومکانیکی شده است.

در سرعت‌های دورانی بالا به دلیل افزایش بیشتر دما، مواد در نزدیکی شعاع خارجی شانه‌ای دارای سیالیت بیشتری هستند و به همین علت، عیب بیرون‌زدگی ماده بوجود می‌آید (شکل 9). این عیب مانع از اندازه‌گیری دمای محل تماس شانه‌ای با قطعه‌کارها با استفاده از سیستم مادون قرمز است [15]. ماکزیمم دما در مرجع [23] برابر 716 درجه کلوین (443 درجه سانتی‌گراد) به‌دست آمده است. این نتیجه کمتر از دمای آستانه‌ی خمیری آلومینیوم 6061 می‌باشد و به نظر می‌رسد نتیجه‌ی حاصل از تحقیق حاضر با واقعیت تطابق بهتری دارد. لازم به ذکر است که در مرجع [23] با استفاده از روش اجزاء محدود، فرآیند جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی به‌صورت دو بعدی مورد تحلیل قرار گرفته است؛ همچنین مقادیر سرعت در محدوده‌ی اختلاطی گزارش نشده است.

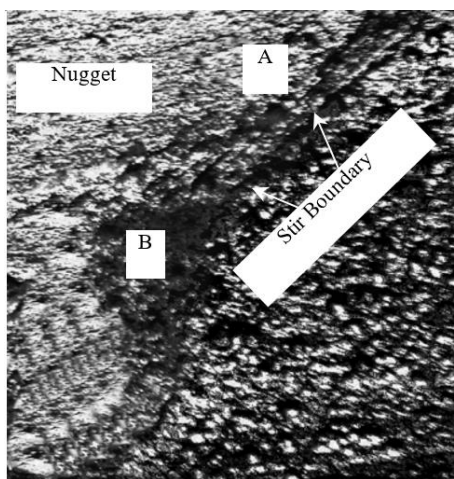


Fig. 8 Weld section in one of tested cases (420 rpm, 50 mm/min). Region A indicates the higher fluidity of material due to higher temperature. Insufficient fluidity in region B results void defect in this region.

شکل 8 مقطع جوش در یکی از نمونه‌های آزمایش شده (سرعت دورانی 420 rpm و سرعت خطی 50 mm/min). ناحیه A نشان‌دهنده‌ی سیالیت بیشتر ناشی از دمای بالاتر است. عدم سیالیت کافی در ناحیه B منجر به بروز عیب حفره در این ناحیه شده است.

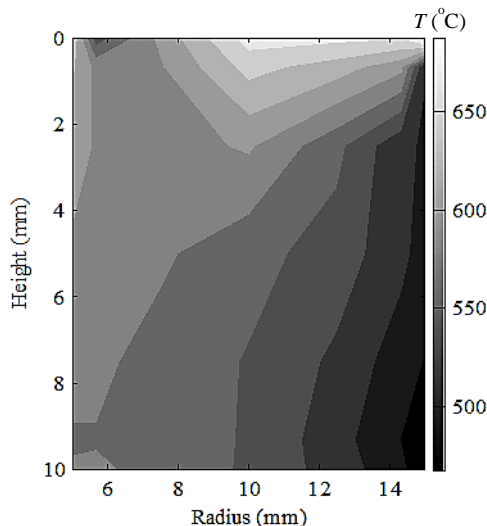


Fig. 6 Temperature distribution (°C) in section 2 of aluminum workpiece

شکل 6 طیف دما (°C) در مقطع 2 برای آلیاژ آلومینیوم

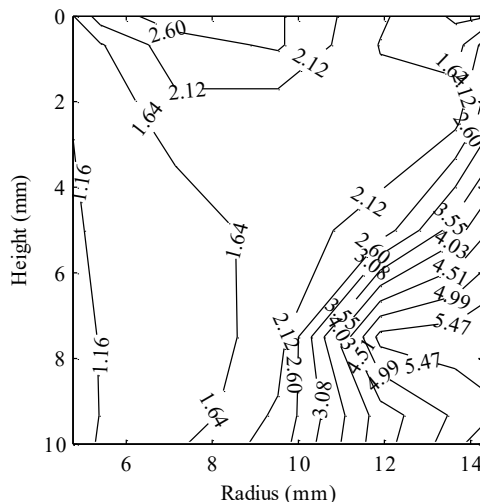


Fig. 7 Viscosity distribution (MPa·s) in section 2 of aluminum workpiece

شکل 7 طیف تغییرات ویسکوزیته (MPa·s) در مقطع 2 برای آلیاژ آلومینیوم

رفتاری ماده در الگوریتم حل است و نشانه‌ای از صحت روش حل اتخاذ شده می‌باشد. در سایر مقاطع تحت بررسی (مقاطع نشان داده شده در شکل 2) نیز همین رفتار دیده می‌شود که از آوردن تصاویر آن‌ها در این‌جا صرف‌نظر می‌گردد.

نمودارهای توزیع دما مشخص می‌کند که بیشترین دما در نزدیک شعاع خارجی شانه‌ای اتفاق می‌افتد. توجه هم‌زمان به طیف‌های سرعت و دما مشخص می‌سازد تقریباً پنجاه درصد از سطح شانه‌ای با ماده‌ی خمیری چسبندگی بیشتری ایجاد نموده است و هر چه به شعاع خارجی شانه‌ای نزدیکتر می‌شویم لغزش مواد نسبت به سطح شانه‌ای بیشتر شده و در نتیجه دما نیز افزایش می‌یابد.

جدول 2 نتایج تحقیق حاضر و آزمایش‌های صورت گرفته را نشان می‌دهد. این نتایج حاکی از آن است که روش حل از دقت خوبی در مقایسه با آزمایش برخوردار است. در ستون اول، شماره آزمایش همراه با تعداد تکرار آن آزمایش آورده شده است. در جدول 2، N سرعت دورانی ابزار برحسب U , rpm

سرعت در مقطع 3 را نشان می‌دهد. مقایسه منته‌های سرعت در "شکل 10" نشان می‌دهد که نحوه حرکت مواد در مطالعه حاضر با آنچه که توسط ناندان و همکارانش حاصل شده است مشابه است. لازم به توضیح است که در "شکل 10" توزیع سرعت‌ها در امتداد عمودی (در راستای ارتفاع پین) ارائه شده است.

کانتورهای نرخ دوران فولاد نیز مشابه این کانتورها برای آلومینیوم است که از ارائه تصویر آن در این‌جا صرف‌نظر می‌شود. بررسی مقادیر نرخ دوران نشان می‌دهند که در صفحه‌ی $(z-r)$ حرکت مواد به‌صورت عمودی و چرخشی است. لازم به ذکر است که با وجود سرعت دورانی بالاتر و سیالیت بیشتر نسبت به مطالعه‌ی موردی [1]، نرخ‌های دوران در صفحه‌ی $(z-r)$ مقادیر کمتری پیدا نموده‌اند که می‌تواند ناشی از چگالی بالاتر فولاد و همچنین مقادیر بالاتر نرخ دوران در صفحه‌ی $(\theta-z)$ باشد.

نمودارهای "شکل 11" توزیع دمای حاصل از مطالعه حاضر و تحقیقات هراندز و همکاران [26] و همچنین ناندان و همکارانش [7] را نشان می‌دهد. هراندز و همکارانش برای تحلیل فرآیند از روش حجم محدود استفاده نموده و نتایج تحقیق خود را با استفاده از آزمایش اعتبارسنجی نموده‌اند. ناندان و همکارانش با استفاده از روش حل عددی به تحلیل فرآیند پرداخته و آن‌ها نیز نتایج خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نموده‌اند. نمودارهای "شکل 11" حاکی از دقت مناسب روش حل اتخاذ شده در این تحقیق است. توجه به این نکته ضروری است که دمای حاصل از تحقیق حاضر در محدوده‌ی دمای خمیری قرار گرفته و در همان محدوده‌ی است که در مرجع [26] به‌دست آمده است. "شکل 12" نمونه‌ای از طیف تغییرات دما در آلیاژ فولاد را نشان می‌دهد.

"شکل 13" توزیع ویسکوزیته را در مقایسه با تحقیقات مراجع [7] و [26] نشان می‌دهد.

همان‌طور که از نمودارهای "شکل 13" مشخص است داده‌های حاصل از تحقیق حاضر با نتایج تحقیقات مراجع اشاره شده همخوانی مناسبی دارد. لازم به ذکر است که با افزایش دما و نرخ کرنش، میزان ویسکوزیته کاهش می‌یابد و نیز کمترین میزان ویسکوزیته در موقعیتی دورتر از سطح بین اتفاق می‌افتد و این مسئله حرکت توده‌وار ماده در اطراف پین و افزایش قطر

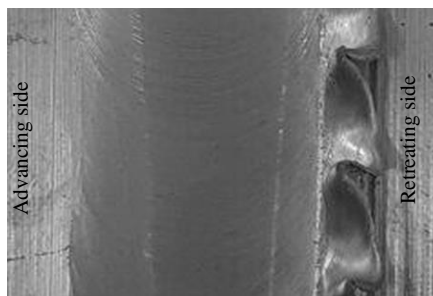


Fig. 9 Flashing defect under the shoulder and retreating side of the weld in one of a tested cases (420 rpm, 50 mm/min).

شکل 9 عیب بیرون زدگی ماده در قسمت زیر شانه‌ای و سمت پس‌رونده در یکی از نمونه‌های آزمایش شده. (50 mm/min ، 420 rpm).

2-8- مطالعه موردی 2: فولاد نرم

در این قسمت قطعه‌کارها از جنس فولاد 1018 با شرایط کاری و خواص مندرج در جدول 3 مدنظر قرار گرفته‌اند. به منظور مقایسه، داده‌های جدول 3 مطابق با داده‌های استفاده شده در مراجع [7] و [26] انتخاب گردیده است.

همچنین:

ثابت A برحسب $(1/s)$ [7]:

$$A = 1.80 \times 10^6 + 1.74 \times 10^8 (\%C) - 6.5 \times 10^7 (\%C)^2$$

ثابت n [7]:

$$n = 0.2 + 3.966 \times 10^{-4}T$$

ثابت α برحسب $(1/MPa)$ [7]:

$$\alpha = 1.07 + 1.70 \times 10^{-4}T - 2.81 \times 10^{-7}T^2$$

ضریب هدایت حرارتی فولاد برحسب (W/mK) [7]:

$$k = 63.1 - 0.032T \quad T \leq 1073 \text{ (K)}$$

$$k = 27.2 \left\{ 1.0 + \frac{T - 1073}{1745 - 1073} \right\} \quad T > 1073 \text{ (K)}$$

ظرفیت گرمایی ویژه فولاد برحسب (J/kgK) [7]:

$$C_p = 347.27 + 62.3e^{T/471.706} \quad T \leq 1073 \text{ (K)}$$

$$C_p = 962.32 \quad T > 1073 \text{ (K)}$$

بر این اساس، توزیع‌های سرعت، دما، ویسکوزیته و نرخ‌های دوران به‌دست آمده است. نمودارهای نشان‌داده شده در "شکل 10" نمونه‌ای از نتایج تحلیل

جدول 3 پارامترهای فرآیند و خواص فولاد 1018

مقدار	واحد	پارامتر
0.4	(mm/s)	سرعت خطی ابزار
47.1	(rad/s)	سرعت دورانی ابزار
4	(mm)	شعاع پین
12	(mm)	شعاع شانه‌ای
8	(mm)	ضخامت ورق
8	(mm)	ارتفاع پین
7860	(kg/m ³)	چگالی [26]
245000	(J/mol)	انرژی اکتیواسیون [26]
8.31451	(J/molK)	ثابت گازها [26]
27	(°C)	دمای محیط
0.4	-	ضریب اصطکاک مرجع [7]
0.18	(%C)	درصد کربن در آلیاژ [7]
1073	(°C)	دمای آستانه خمیری [26]
50	(W/m ² K)	ضریب جابجایی [7]
0.4	-	ضریب لغزش مرجع [7]
0.65	-	ضریب لغزش مرجع [7]

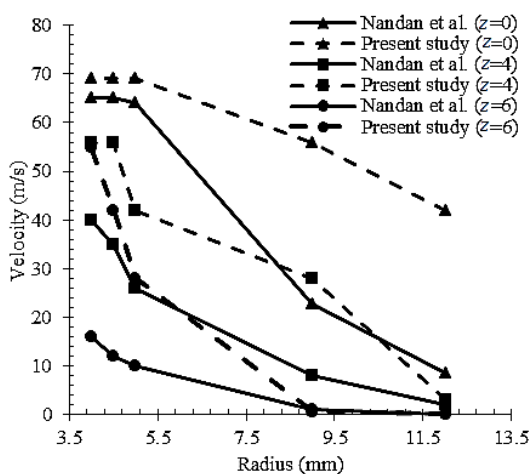


Fig. 10 Resultant velocity distribution (m/s) in section 3 of steel workpiece on the xy plane under the shoulder ($z=0$), plane $z=4$ (mm) and plane $z=6$ (mm)

شکل 10 توزیع سرعت منته‌ها برای مقطع 3 در جوش کاری فولاد در صفحات زیر شانه‌ای ($z=0$)، صفحه $z=4$ (mm) و صفحه $z=6$ (mm)

9- نتیجه گیری

براساس روش حل اتخاذ شده و نتایج حاصله از مطالعات موردی، نتایج زیر قابل دریافت است:

1- روش حل درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته این قابلیت را ایجاد می‌کند که بتوان تأثیرگذاری یک کمیت (مانند دما، ...) را در هر نقطه از میدان بر سایر نقاط دیگر و همچنین تأثیر همان کمیت در سایر نقاط بر آن نقطه از میدان را به‌طور مستقیم و با دقت بالاتری به‌دست آورد. در این روش، به‌دلیل این خاصیت که ماتریس ضرایب برای محاسبه مشتقات بالاتر یک تابع از حاصل‌ضرب ماتریس ضرایب مشتقات پایین‌تر آن تابع حاصل می‌شود محاسبه‌ی گرادیان یک کمیت و مشتقات بالاتر آن نیز به راحتی امکان‌پذیر می‌گردد؛ به عنوان مثال در خصوص ویسکوزیته:

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = [A]\{M\} \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} = [A]^2\{M\}, \quad \dots \quad (46)$$

که در رابطه‌ی (46)، $\{M\}$ بردار مقادیر ویسکوزیته در نقاط مختلف است.

2- در این روش، دستیابی به دقت مناسب محاسباتی با تعداد کمتری از گره‌ها صورت می‌گیرد. همان‌طور که بیان شد برای این تحقیق و برای هر کدام از مطالعات موردی از تعداد 336 گره استفاده شده است که در مقایسه با تعداد گره‌ها و المان‌ها در سایر روش‌ها بسیار کمتر است. مقایسه‌ی عکس‌های ناحیه‌ی اختلاطی با نتایج طیف ویسکوزیته و دما حاکی از برآورد مناسب‌تر کمیت‌ها در این روش است. لازم به ذکر است که سرعت پردازش برای دستیابی به نتایج بسیار بالاست که می‌تواند در برآورد لحظه‌ای کمیت‌ها، به منظور کنترل فعال فرآیند، بسیار حائز اهمیت باشد.

3 - محاسبات مربوط به میدان جوش در جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی نشان می‌دهد طیف‌های دما در آلومینیوم و فولاد تقریباً مشابه است. به‌عبارت دیگر میانگین دما در جوش کاری فولاد نسبت به آلومینیوم در کلیه نقاط گره‌ی برابر 1.55 می‌باشد؛ این در حالی است که نسبت ω/v در جوش کاری فولاد در حدود 6 برابر همان نسبت در جوش کاری آلومینیوم اتخاذ شده است: $[(\omega/v)_{Steel} = 117.75, (\omega/v)_{Aluminum} = 19.48]$ لازم به ذکر است که اندازه‌گیری مستقیم دما در عمق میدان جوش امکان‌پذیر نیست و تخمین میزان دما با توجه به تغییر و تحولات ریزساختاری صورت می‌پذیرد [28,27].

4- مقایسه‌ی ویسکوزیته‌ی دو آلیاژ آلومینیوم و فولاد حاکی از سیالیت بیشتر فولاد در دمای خمیری است. سیالیت بالاتر فولاد به مفهوم آن است که برای این آلیاژ می‌توان از نسبت سرعت‌های ω/v بالاتری استفاده کرد. این موضوع از منظر اتصال این آلیاژ به آلیاژ آلومینیوم حائز اهمیت است و در تنظیم پارامترهای سرعت خطی و دورانی ابزار باید لحاظ گردد.

5- محاسبات مربوط به این تحقیق نشان می‌دهد رفتار آلومینیوم و فولاد در قبال عملیات جوش کاری اصطکاکی اغتشاشی مشابه است و این موضوع توسط مشاهدات تجربی تأیید شده است؛ با این وجود از نقطه‌ی شروع عملیات تا زمان پایدار شدن شرایط و ادامه‌ی عملیات، تحولات ریزساختاری این دو فلز (مانند تغییر فاز، تشکیل فازهای رسوبی و ...) کاملاً متفاوت است. به‌عبارت دیگر با این‌که معادلات در نهایت به جواب‌هایی صحیح منجر شده‌اند اما تأثیر تغییر و تحولات ریزساختاری در این معادلات برجسته نیست و این تحولات از طریق تغییرات خواص (مانند تغییرات ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب هدایت حرارتی) و از طریق کمیت دما به معادلات وارد شده‌اند زیرا خواص مواد در این‌جا تنها تابعی از یک متغیر (دما) هستند.

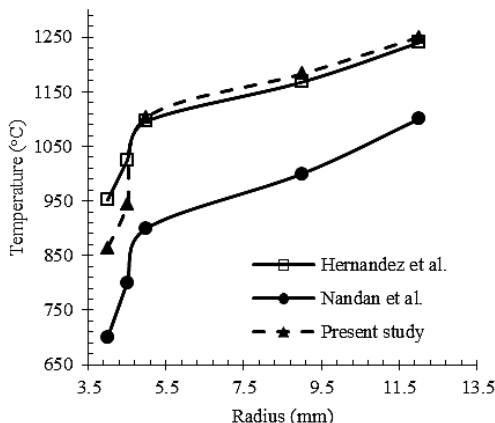


Fig. 11 Temperature distribution (°C) in section 3 of steel workpiece under the shoulder.

شکل 11 توزیع دما (°C) در مقطع 3 در آلیاژ فولاد در صفحه زیر شانه‌ای

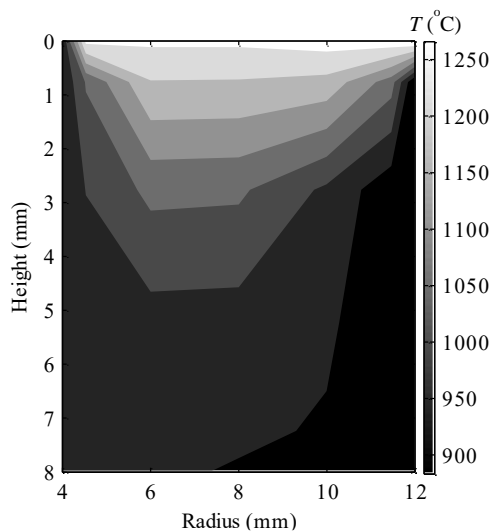


Fig. 12 Temperature distribution (°C) in section 2 of steel workpiece

شکل 12 طیف تغییرات دما (°C) در مقطع 2 در آلیاژ فولاد

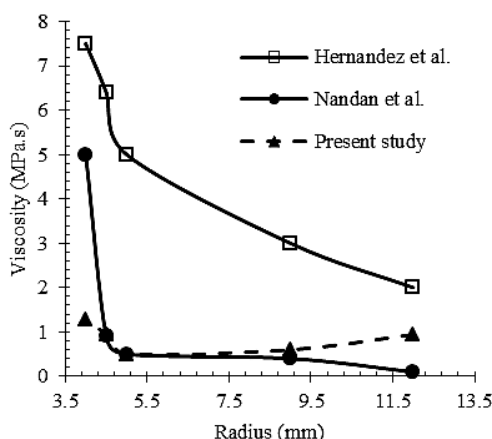


Fig. 13 Viscosity distribution in section 3 of steel workpiece under the shoulder ($z=0$).

شکل 13 توزیع ویسکوزیته در مقطع 3 در آلیاژ فولاد در صفحه زیر شانه‌ای ($z=0$)

ظاهری بین را تأیید می‌سازد. براساس توزیع دما و ویسکوزیته می‌توان دریافت که به‌صورت تقریبی شعاع پین در حدود 1 میلی‌متر افزایش یافته است.

10- مراجع

- [15] T. J. Lienert, W. L. Stellwag, B. B. Grimmett, R. W. Warke, Friction stir welding studies on mild steel, *Welding Research*, Vol. 82, No. 1, pp. 1s-9s, 2003.
- [16] M. Nourani, *Integrated Multiphysics Modeling, Testing and Optimization of Friction Stir Welding of Aluminum Alloys*, PhD Thesis, University of British Columbia, British Columbia, 2014.
- [17] C. M. Sellars, W. J. M. Tegart, On the mechanism of hot deformation, *Acta Metallurgica*, Vol. 14, No. 10, pp. 1136-1138, 1966.
- [18] C. Shu, B. C. Khoo, K. S. Yeo, and Y. T. Chew, Application of GDQ scheme to simulate natural convection in a square cavity, *International Communication in Heat and Mass Transfer*, Vol. 21, No. 6, pp. 809-817, 1994.
- [19] H. Lomax, T. Pulliam, D. Zingg, and T. Kowalewski, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, pp. 7-18, Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [20] C. Vuik, A. Segal, *Solution of the coupled Navier-Stokes equations*, W. Hackbusch, G. Wittum (Eds.), *Numerical Treatment of Coupled Systems*, pp. 186-197, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1995.
- [21] A. Simar, *A Multyscale Multiphysics Investigation of Aluminum Friction Stir Welds*, PhD Thesis, Department of Applied Sciences, University of Leuven, Leuven, 2006.
- [22] T. Long, A. P. Reynolds, Parametric studies of friction stir welding by commercial fluid dynamics simulation, *Science and Technoogy of Welding and Joining*, Vol. 11, No. 2, pp. 200-209, 2006.
- [23] G. Mathers, *Welding of Aluminum and its Alloys*, pp. 12-68, Witney (UK): Woodhead Publishing Limited, 2002.
- [24] A. Fallahi Arezoudar, A. Hosseini, Optimization of friction stir welding parameters of dissimilar AA5052 and AA6061-T6 joint for achieving optimum microstructure and mechanical properties, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 20-30, 2017. (In Persian فارسی)
- [25] A. P. Reynolds, Flow visualization and simulation in FSW, *Scripta Materialia*, Vol. 58, No. 5, pp. 338-342, 2008.
- [26] C. A. Hernández, V. H. Ferrer, J. E. Mancilla, L. C. Martínez, Three-dimensional numerical modeling of the friction stir welding of dissimilar steels, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-15, 2017.
- [27] A. De, H. K. D. H. Bhadeshia, T. Debroy, Friction stir welding of mild steel: Tool durability and steel microstructure, *Material Science and Technology*, Vol. 30, No. 3, pp. 1050-1056, 2014.
- [28] D. Micallef, D. Camilleri, A. Toumpis, A. Galloway, L. Arbaoui, Local heat generation and material flow in friction stir welding of mild steel assemblies, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, Vol. 230, No. 2, pp. 586-602, 2016.
- [1] *Friction stir welding-invention, innovations and applications*, Accessed on 14 May 2016; <https://www.twi-global.com/technical-knowledge/published-papers/friction-stir-welding-invention-innovations-and-applications-march-2001>.
- [2] R. S. Mishra, Z. Y. Ma, Friction stir welding and processing, *Material Science and Engineering*, Vol. 50, No. 3, pp. 1-78, 2005.
- [3] H. Wang, P. A. Colegrove, J. F. dos Santos, Numerical investigation of the tool contact condition during friction stir welding of aerospace aluminium alloy, *Computational Materials Science*, Vol. 71, No.7, pp. 101-108, 2013.
- [4] T. Siedel, A. P. Reynolds, Two-dimensional friction stir welding process model based on fluid mechanics, *Science and Technology of Welding and Joining*, Vol. 8, No. 4, pp. 175-183, 2003.
- [5] P. A. Colegrove, H. Schercliff, Development of Trivex friction stir welding tool; Part 2-Three-dimensional flow modeling, *Science and Technology of Welding and Joining*, Vol. 9, No. 11, pp. 352-361, 2004.
- [6] P. Ulysse, Three-dimensional modeling of the friction stir-welding process, *International Journal of Machine Tools and Manufacturing*, Vol. 42, No. 23, pp. 1549-1557, 2002.
- [7] R. Nandan, G. G. Roy, T. J. Lienert, T. Debroy, Three-dimensional heat and material flow during friction stir welding of mild steel, *Acta Materiala*, Vol. 55, No. 12, pp. 883-895, 2007.
- [8] D. Ghahremani Moghadam, K. Farhang Doost, A. Rastegar, M. Raezani Moghaddam, Tool's speed effect on hardness and residual stress in friction stir welded Al 2024-T351: Experimental method and Numerical simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 61-71, 2015. (In Persian فارسی)
- [9] S. Fouladi, M. Abbasi, M. Givi, Friction stirs vibration welding and study about the effects of its parameters on microstructure and mechanical properties of Al5052 joint, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 217-224, 2017. (In Persian فارسی)
- [10] X. He, F. Gu, A. Ball, A review of numerical analysis of friction stir welding, *Progress in Material Science*, Vol. 65, No. 1, pp. 1-66, 2014.
- [11] R. Bellman, J. Casti, Differential quadrature and long-term integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.
- [12] R. Bellman, B. G. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.
- [13] C. Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, pp. 25-68, London: Springer-Verlag, 2000.
- [14] J. Hattel, H. Schmidt, C. Tatum, Thermomechanical modelling of friction stir welding, *ASM Proceeding of International Conference: Trends in Welding Researches*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-10, 2009.