سیویلیکا - ناشر تخصصی مقالات کنفرانس ها و ژورنالها
گواهی ثبت مقاله در سیویلیکا
www.CIVILICA.com

عنوان مقاله:
توسعه یک الگوریتم فشار مبنا برای حل جریان سیال در رژیم مافوق صوت

محل انتشار:
بیست و ششمین همایش سالانه بین المللی انجمن مهندسان مکانیک ایران (سال:1397)

تعداد صفحات اصل مقاله: ۵ صفحه

نویسندگان:
علیرضا جیرایی - دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک،
محمدحسن جوارشکیان - دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک،

خلاصه مقاله:
در این تحقیق یک الگوریتم فشار مبنا برای حل جریان در رژیم مافوق صوت توسعه داده شده است. در این الگوریتم فرم جدیدی از معادلات ناویر استوکس ارایه شده سپس معادلات بقا شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی توسط روش حجم محدود گسسته شده است. در این شبیه سازی روش های مختلف محاسبه شار جابجایی اعمال گردیده است، از جمله آنها، روش ری و چو، رو سانو و تیودی می باشد. در الگوریتم فوق بجای استفاده از متغیرها در معادلات بقاء مقادیر اصلاح آنها در معادلات در نظر گرفته می شود. بعبارت دیگر معادلات بقا بر اساس اختلاف کیمتها در دو گام مختلف نوشته می شود. با تلفیق معادلات ممنتم برای اصلاح سرعت و پیوستگی، معادله ای تحت عنوان معادله تصحیح فشار بدست می آید. اگر چه روش سیمپل استاندارد و نسخه های مختلف آن تا عدد ماخ ۲ می تواند جریان را حل نماید ولی در الگوریتم جدید جریان تا عدد ماخ ۵ حل گردیده شده است. با توسعه الگوریم مذکور ماهیت بیضوی معادلات به ماهیت هذلولوی تغییر داده شده است. نتایج این تحقیق، روند الگوریتم توسعه یافته را تایید می نماید.

کلمات کلیدی:
فشار مبنا، عدد ماخ ، شارهای غیر لزج، حجم محدود، جریان قابل تراکم و غیر قابل تراکم

لینک ثابت ثبت مقاله در پایگاه سیویلیکا:
https://www.civilica.com/Paper-ISME26-ISME26_355.html

این صفحه به معنای تاییدیه نمایه سازی مقاله در پایگاه استنادی سیویلیکا می باشد. در هر لحظه به منظور تایید اصالت این گواهی می توانید وضعیت ثبت مقاله را از طریق لینک فوق به صورت آنلاین کنترل نمایید.

بیست و ششمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران، ISME2018
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان ، ایران، ۴ تا ۶ اردی بهشت ۱۳۹۷
SME2018-26-355

توسعه یک الگوریتم فشار مبنا برای حل جریان سیال در رژیم مافوق صوت

علیرضا جیریایی[۱]، محمد حسن جوارشکیان[۲]

[۱]دانشگاه فردوسی مشهد ، نام دانشگاه / موسسه، ایمیل نویسنده اول (قلم بی‌نازنین ۱۰ معمولی وسط چین)
[۲]آدرس نویسنده دوم، نام دانشگاه / موسسه، ایمیل نویسنده دوم (قلم بی‌نازنین ۱۰ معمولی وسط چین)

چکیده

در این تحقیق یک الگوریتم فشار مبنا برای حل جریان در رژیم مافوق صوت توسعه داده شده است. در این الگوریتم فرم جدیدی از معادلات ناویر استوکس ارایه شده سپس معادلات بقا شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی توسط روش حجم محدود گسسته شده است. در این شبیه سازی روشهای مختلف محاسبه شار جابجایی اعمال گردیده است، از جمله آنها، روش ری و چو، روسانو ، رو و تی‌ودی می باشد. در الگوریتم فوق بجای استفاده از متغیرها در معادلات بقا، مقادیر اصلاح آنها در معادلات در نظر گرفته می شود. بعبارت دیگر معادلات بقا بر اساس اختلاف کیمتها در دو گام مختلف نوشته می شود. با تلفیق معادلات ممنتوم برای اصلاح سرعت و پیوستگی معادله‌ای تحت عنوان معادله تصحیح فشار بدست می‌آید. اگرچه روش سیمپل استاندارد و نسخه های مختلف آن تا عدد ماخ ۲ می تواند جریان را حل نماید ولی در الگوریتم جدید جریان تا عدد ماخ ۵ حل گردیده شده است. با توسعه الگوریم مذکور ماهیت بیضوی معادلات به ماهیت هذلولوی تغییر داده شده است. نتایج این تحقیق، روند الگوریتم توسعه یافته را تایید می‌نماید.

واژه های کلیدی

فشار مبنا، عدد ماخ ، شارهای غیر لزج، حجم محدود، جریان قابل تراکم و غیر قابل تراکم

مقدمه

بطور کلی روش های عددی برای حل جریان سیال را، از یک نقطه نظر به دو گروه طبقه بندی می‌کنند که این طبقه بندی به قابل تراکم [۱] یا غیرقابل تراکم بودن[۲] جریان سیال بستگی دارد. یک سری از روش‌های مورد انتظار برای جریان قابل تراکم بر انتگرال ساده زمانی از معادلات جریان در شبکه‌های هم مکان بنا شده است[۳]. بعبارت دیگر اگر فشار از معادله حالت بدست آید و از معادله پیوستگی برای محاسبه چگالی استفاده شود روش حل را چگالی مبنا گویند. در روش دیگر از شبکه بندی غیر هم مکان برای حل جریان غیر قابل تراکم استفاده می‌کنند. در جریان غیرقابل تراکم رابطه‌ای بین فشار و چگالی وجود ندارد، در واقع تغییرات فشار تاثیری بر روی چگالی نمی‌گذارد[۴]. از این رو معادله‌ای برای حل میدان فشار نخواهیم داشت. در روش‌هایی که برای فشار یا تصحیح فشار معادله‌ای در نظر گرفته می شود روش فشار مبنا[۵] گویند، که برای حل جریان غیر قابل تراکم ارائه گردید. به این معادله که از ترکیب معادلات پیوستگی و ممنتم به دست می‌آید معادله پواسون[۶] می‌گویند.

عدد ماخ جریان روش حل را مشخص می‌کند. هر دو روش چگالی مبنا و فشار مبنا، در مسایلی که با هر دو جریان قابل تراکم و غیر قابل تراکم روبه‌رو هستیم ضعف‌های بسیاری دارند. به طور مثال در یک جریان لزج مافوق صوت که با پدیده لایه مرزی روبه‌رو هستیم، جریان در لایه مرزی به صورت غیرقابل تراکم نیز وجود دارد که برای پیش بینی رفتار سیال بایستی بتوان از هر دو ویژگی روش چگالی مبنا و فشار مبنا استفاده کرد، تا بتوان نتایج دقیق‌تری را به دست آورد. در سال‌های اخیر سعی شده تا این دو روش به سمت هم سوق داده شوند[۷].

برای ترکیب ویژگی های این دو روش باید نحوه فرمول بندی را عوض کرد فرمول بندی در روش‌های چگالی مبنا و فشار مبنا به دلیل آرایش بندی مختلف شبکه و نیاز برای معاله پواسون بسیار زیاد است. روش‌های دیگری نیز برای رسیدن به یک الگوریتم ترکیبی وجود دارد که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت.

البته تمامی این ترکیب‌ها پایدار نبوده و از نظر پایداری باید مورد بررسی قرار گیرند. محاسبه شار عددی نیز باید به صورتی باشد که برای اعداد مختلف ماخ مناسب باشد، چرا که شارهای عددی به طور ذاتی بدلیل وابستگی به عدد ماخ در نحوی محاسبه متغیرها بر روی سطح سلول، مناسب برای اعداد ماخ مختلف نیستند.

روش‌های ایجاد تراکم پذیری مصنوعی[۸] و پیش شرط گذاری[۹] برای توسعه روش‌های چگالی مبنا به رژیم‌های با ماخ کم انجام شده است. اما در بخش فشار مبنا یک درخواست طولانی مدت برای توسعه این روش به رژیم‌های مافوق صوت وجود دارد. کارهایی در زمینه صورت گرفته که میتوان به مواردی مانند موکالد و درویش[۱۰] فرنیکس و همکاران[۱۱] که هر دو روش جداسازی بالادست که یک روش ذاتا چگالی مبناست را با یک حل کننده فشار مبنا مرتبط کرده‌اند.

در روش های اشاره شده همواره سعی بر ترکیب روش‌های چگالی مبنا و فشار مبنا با یک اسکیم بوده است اما در تحقیق حاضر فرمول بندی معادلات تغییر کرده و یک روش فشار مبنای جدیدی توسعه پیدا کرده است، که با فرم‌های مختلف محاسبه شار عددی می‌تواند ترکیب شود. در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم.

روش های عددی برای یک جریان سیال بخش‌های صریح و ضمنی را در بر می‌گیرد این تقسیم بندی خیلی واضح‌تر دیده می‌شود اگر از فرم دلتا در بخش صریح استفاده شود[۱۲]. استفاده کردن از

فرم دلتا راه را، برای ترکیب کردن ویژگی‌های روش فشار مبنا و چگالی مبنا هموار می‌کند. که در نهایت می‌تواند یک الگوریتکم کارا را در اختیار قرار دهد.

در این روش، معادلات از روش حجم محدود گسسته سازی شده‌اند. سپس معادلات در فرم دلتا نوشته خواهند شد. بالانس جرمی صفر در نظر گرفته نمی‌شود، و شارها نیز اصلاح نمی‌شوند. اثر شارها از طریق باقی مانده‌های آنها در حل عددی اعمال می‌شود. الگوریتم ایجاد شده شبیه به روش سیمپل است. از طرف دیگر نیز اگرچه از اسکیم ماسل برای درون‌یابی مقادیر بر روی سطوح سلول استفاده که در فرمول‌نویسی آن از بردار متغیرهایی بقایی استفاده می‌شود اما در روش حاضر خود متغیرهای اولیه شامل دما، فشار و سرعت از این روش بر روی سطوح سلول محاسبه می‌شوند.

هدف این مطالعه این است که با تغییر فرمول بندی معادلات جریان به فرم دلتا (اختلاف متغیرهای در دو گام) و ترکیب آن با روش‌های مختلف محاسبه شار عددی بتواند الگوریتم فشار مبنا را برای حل جریان مافوق صوت با ماخ بالا توسعه داد.

معادلات

می‌توان معادلات حاکم بر جریان سیال را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial \rho(e+\frac{v^2}{2})}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (۳)$$

معادلات (۱) تا (۳) برای هر دو سیال تراکم پذیر و تراکم ناپذیر قابل استفاده است. اگر با توجه به روش حجم محدود معادلات بالا را جداسازی کنیم، و در یک فرم کلی آنها را بیان کنیم به فرمول زیر خواهیم رسید:

$$\mathcal{V}_i\frac{d\mathcal{U}_i}{dt}+\sum_j S_j(F^*-F_v).n_j=\mathcal{V}_i Q_i \qquad (۴)$$

در روش‌های عددی حجم محدود همواره به دنبال روشی برای محاسبه شار بر روی سطح سلول هستیم. این موضوع در فرم معادله (۴) نیز مشاهده می‌شود. زمانی که ما در محدوده‌ی رژیم‌های مافوق صوت هستیم به علت در اختیار داشتن معادله برای محاسبه چگالی روش از پیچیدگی‌های بسیار کمتری برخوردار است. اما در رژیم‌های مادون صوت محاسبه فشار کار بسیار دشوارتری است. جریانی که در این مقاله شبیه سازی شده غیرلزج بوده وبه همین دلیل از توضیح شارهای لزج عبور می‌کنیم.

برای محاسبه شارهای غیرلزج از روش‌های متعددی استفاده می‌شود که ما برای مثال اینجا از روش اصلاح شده ری‌چو استفاده می‌کنیم که فرمول بندی آن در زیر آمده است. این فرم از معادله برای جریان‌های قابل تراکم نیز قابل استفاده است.

$$F^*_{i+1/2}=0.5*\left[\hat{F}\left(\mathcal{U}^R_{i+\frac{1}{2}}\right)+\hat{F}\left(\mathcal{U}^L_{i+\frac{1}{2}}\right)\right]-0.5|\hat{u}_{i+1/2}|[\mathcal{U}^R_{i+1/2}-\mathcal{U}^L_{i+1/2}] \qquad (۵)$$

با ترکیب این اسکیم برای محاسبه شار و روش فشار مبنای توسعه یافته که در ادامه به توضیح آن خواهیم پرداخت. می‌توان رژیم‌های مختلف جریان را مدل سازی نمود. ابتدا باید شار را در دو طرف سطح سلول محاسبه کنیم. چرا که برای محاسبه شار در سطح سلول با توجه به فرمول(۵) نیاز به شار در طرفین سلول داریم. برای این موضوع از اسکیم درون یابی ماسل استفاده می‌کنیم. این اسکیم با توجه به مقادیر $\mathcal{K}$ می‌تواند از درجات مختلفی باشد. البته در حالتی که اسکیم از مرتبه دو است باید از یک محدودکننده استفاده کرد.

$$\mathcal{U}^L_{i+1/2}=\mathcal{U}_i+0.25[(1-\mathcal{K})(\mathcal{U}_i-\mathcal{U}_{i-1})+(1+\mathcal{K})(\mathcal{U}_{i+1}-\mathcal{U}_i)] \qquad (۶)$$

$$\mathcal{U}^R_{i+1/2}=\mathcal{U}_{i+1}-0.25[(1-\mathcal{K})(\mathcal{U}_{i+2}-\mathcal{U}_{i+1})+(1+\mathcal{K})(\mathcal{U}_{i+1}-\mathcal{U}_i)] \qquad (۷)$$

اما در روش حاضر به جای محاسبه بردار متغیرهای بقایی در طرف چپ و راست سطح سلول خود متغیرهای اولیه شامل دما، سرعت و فشار از این اسکیم محاسبه خواهند شد.

در ادامه به توضیح روش فشار مبنای توسعه یافته خواهیم پرداخت. ایده استفاده از روش دلتا برای اولین بار توسط مک کورمک برای حل جریان های ویسکوز ناپایا در الگوریتم های چگالی مبنا مطرح شد[۱۲].

روش دلتا را می‌توان به صورت زیر به طور خلاصه بیان کرد روش دلتا دارای دو بخش است بخش فیزیکی آن در بردارنده باقی مانده از معادلات جدا سازی شده است و بخش عددی با استفاده از یک سری اعمال ریاضی به دنبال صفر کردن باقی مانده‌های به وجود آمده از جداسازی معادلات است.

$$\text{numerics}\{\triangle\,\mathcal{U}\}=\text{physics} \qquad (۸)$$

با این حساب خواهیم داشت، که ملاحظه می‌شود باقی‌مانده در بردارنده تفاضل شارها در دو طرف سطح سلول است.

$$R=-\sum_j S_j(F^*-F_V)^n_j.n_j+\mathcal{V}_i Q^n_i \qquad (۹)$$

ابتدا معادله پیوستگی را در این فرم خواهیم نوشت:

$$\mathcal{V}_i\frac{\delta\rho_i}{\triangle t}=R^c_i \qquad (۱۰)$$

برای معادله ممنتم نیز خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\mathcal{V}_i\rho^n_i}{\triangle t}-\sum_{in}\dot{m}^n_j+\sum_j\frac{S_j\mu}{\triangle S_j}\right)\delta V_i+\sum_{in}\dot{m}^n_j\,\delta V_j-\sum_j\frac{S_i\mu_j}{\triangle S_j}\delta V_j=R^M_i-V^n_i R^c_i \qquad (۱۱)$$

که همانطور که مشـــاهده می‌شـــود فرم دلتا در تمامی این موارد رعایت شده است. برای معادله انرژی نیز به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\left(\frac{\mathcal{V}_i\rho_i^n}{\triangle t}-\sum_{in}\dot{m}_j^n+\sum_j\frac{S_j\lambda}{c_p\triangle s_j}\right)\delta h_i+\sum_{in}\dot{m}_j^n\,\delta h_j-\sum_j\frac{S_j\lambda_j}{c_p\triangle s_j}=R_i^h \quad (۱۲)$$

برای حل میدان فشار نیز معادله تصحیح فشار که از ترکیب کردن معادلات ممنتم و پیوستگی به دست می‌آید، را حل خواهیم کرد.

$$\left(\frac{\mathcal{V}_i}{\triangle t}+\sum_{out}\frac{\dot{m}_j}{\rho_j}\right)\frac{P_i'}{c_i^2}+\sum_j\frac{S_j^2\rho_j}{\bar{a}_{p,j}^u}\left(P_i'-P_j'\right)+\sum_{in}\frac{\dot{m}_j}{\rho_j}\frac{P_j'}{c_i^2}=R_i^c \quad (۱۳)$$

در این روش گام زمانی نیز به صـورت محلی تعریف شـده اسـت. عبارتی که در مخرج عبارت دوم در سمت چپ معادله است به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{a}_{p,j}^u=\left(\frac{\mathcal{V}_i\rho_i^n}{\triangle t}-\sum_{in}\dot{m}_j^n+\sum_j\frac{S_j\mu}{\triangle s_j}\right) \quad (۱۴)$$

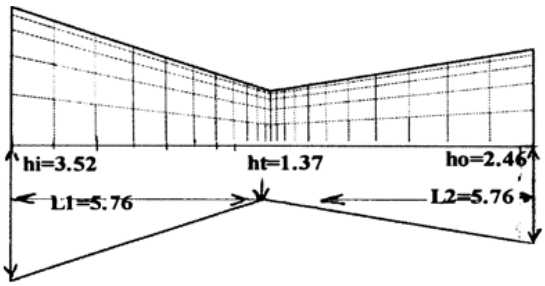
برای تغییرات یک متغیر نیز تعریف زیر را داریم که در فرمول بندی ها مورد استفاده قرار گرفته است.

$$\delta V_i=V_i^{n+1}-V_i^n \quad (۱۵)$$

با ترکیب روش ف شار مبنای تو سعه یافته و ا سکیم‌های محا سبه شار می‌توان مساله را نسبت به عدد ماخ مستقل کرد. در ادامه جریان داخل یک شـیپوره همگرا واگرا شـبیه‌سـازی شـده که جریان از رژیم تراکم ناپذیر تا جریان تراکم پذیر وجود دارد. جریان با شـوک نیز شبیه‌سازی شده است.

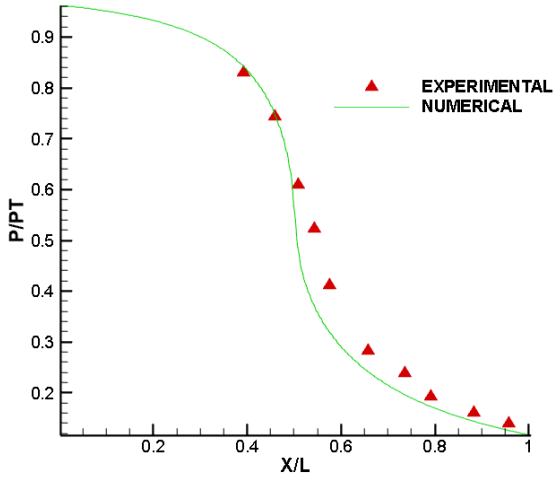
نتایج

همانطور که در قبل اشاره شد یک شیپوره که در شکل زیر هندسه آن مشاهده می‌شود، شبیه‌سازی شده که نتایج تجربی آن در[۱۳] آمده است.



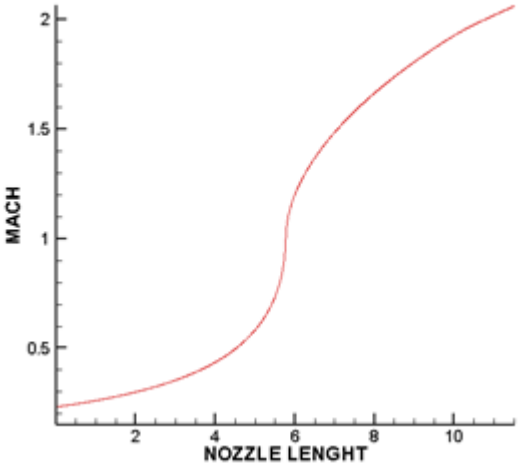
شکل ۱: شیپوره شبیه‌سازی شده در کد

در این شبیه سازی جریان غیر لزج و بدون انتقال حرارت ا ست. نتایج فشـار اسـتاتیک به فشـار کل در طول نازل با داده‌های تجربی اعتبار سنجی شده است. نتایج در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: اعتبار سنجی کد با داده‌های آزمایشگاهی

در نازل همگرا واگرای شکل ۱ جریان میتواند با تغییرات متفاوتی روبه‌رو شـود. در شـکل ۳ جریان در ورود به نازل دارای رژیم غیرقابل تراکم است در حالی در خروجی آن جریان مافوق صوت می‌شود.



شکل ۳: جریان مادون صوت تا مافوق صوت در داخل نازل همگرا واگرا

حال به بررسـی جر یان های پیچیده‌تر در دا خل نازل می‌پردازیم. میخواهیم شـوک نرمال را در داخل نازل تسـخیر کنیم به دلیل اینکه روابط این جریان به طور دقیق نیز وجود دارد با محاسبات مکان شوک را در داخل نازل محاسبه کرده و سپس با کد به حل آن می‌پردازیم در شکل ۴ این موضوع نشان داده شده است.

فهرست علائم

A	مساحت، m^2
E	مدول الاستیسیته، N/m^2

علائم یونانی

ρ	چگالی، kg/m^3

زیرنویس

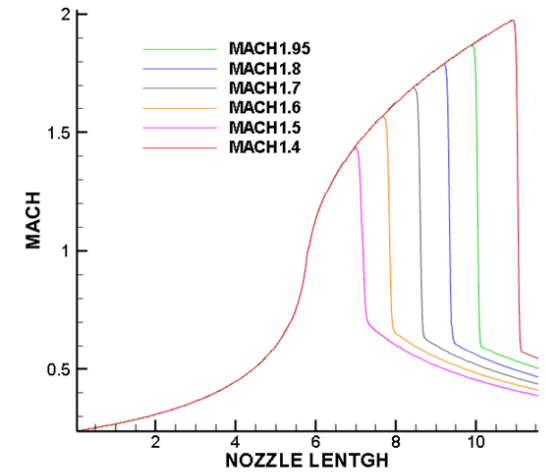
f	سیال

بالانویس

*	شرایط مرجع

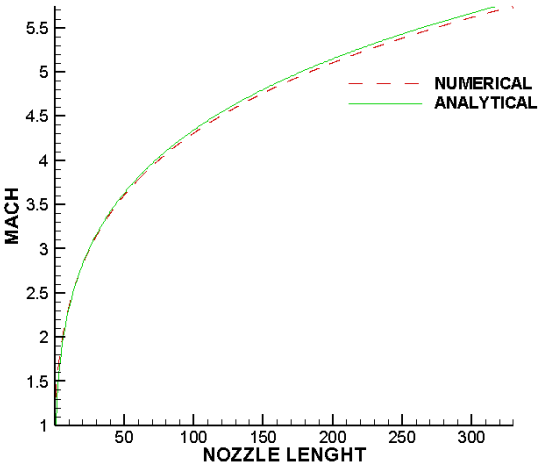
مراجع و منابع

[1] Harten, A., Lax, P. D., & Leer, B. V. (1983). On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. SIAM review, 25(1), 35-61.
[2] Patankar, S. V., & Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. International journal of heat and mass transfer, 15(10), 1787-1806.
[3] Lax,P.D. (1957). Hyperbolic systems of conservation laws II. Communications on pure and applied mathematics, 10(4), 537-566.
[4] Issa, R. I., & Javareshkian, M. H. (1998). Pressure-based compressible calculation method utilizing total variation diminishing schemes. AIAA journal, 36(9), 1652-1657.
[5] Xisto, C. M., Páscoa, J. C., Oliveira, P. J., & Nicolini, D. A. (2012). A hybrid pressure‐density - based algorithm for the Euler equations at all Mach number regimes. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 70(8), 961-976.
[6] Galpin, P. F., Van Doormaal, J. P., & Raithby, G. D. (1985). Solution of the incompressible mass and momentum equations by application of a coupled equation line solver. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 5(7), 615-625.
[7] Miettinen, A., & Siikonen, T. (2015). Application of pressure - and density - based methods for different flow speeds. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 79(5), 243-267.
[8] Chorin, A. J. (1997). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. Journal of computational physics, 135(2), 118-125.
[9] Turkel, E. (1987). Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. Journal of computational physics, 72(2), 277-298.
[10] Moukalled, F., & Darwish, M. (1999). A high-resolution pressure-based algorithm for fluid flow at all speeds. AMERICAN UNIV BEIRUT (LEBANON).



شکل ۴: تسخیر شوک نرمال در ماخ‌های مختلف

در ادامه جریان را به صورت کاملا مافوق صوت در نظر می‌گیریم و جریان از گلوگاه شبیه سازی شده جایی که عدد ماخ به یک می‌رسد. و جریان در خروجی به ماخ ۵،۸ می‌رسد. در شکل ۵ این موضوع مشاهده می‌شود.



شکل ۵: جریان کاملا مافوق صوت در نازل

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

با تغییر فرمول نویسی در معادلات جریان برای الگوریتم فشار مبنا توانستیم محدوده ماخ آن را گسترش دهیم. این الگوریتم در شبکه‌های خشن نیز از دقت قابل قبولی برخوردار است. و توانایی حل مسایلی که با محدوده گسترده‌ای از ماخ روبه‌رو هستند را دارد.

تشکر و قدردانی

در اینجا لازم می‌دانم از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر جوارشکیان تشکر کرده و آرزوی موفقیت روزافزون را داشته باشم.

[11] Nerinckx, K., Vierendeels, J., & Dick, E. (2006). A Mach-uniform pressure-correction algorithm with AUSM+ flux definitions. International Journal of Numerical Methods For Heat & Fluid Flow, 16(6), 718-739.

[12] MacCormack, R. W. (1982). A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. AIAA journal, 20(9), 1275-1281.